

Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume*)

Von

HELMUT SCHAEFER in Mainz

Einleitung

Während das Studium linearer Verbände Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen ist, hat der (umfassendere) Begriff des halbgeordneten linearen Raumes bisher weniger Beachtung erfahren¹⁾. Wir erwähnen hier vor allem die Arbeiten von BONSALL [2—6] sowie von KREIN und seinen Schülern [15—17]²⁾. Sie befassen sich vorzugsweise mit positiven linearen Transformationen in halbgeordneten linearen Räumen, die zumeist die topologische Struktur eines Banachschen oder allgemeiner normierten Raumes tragen. Dabei stehen wiederum die Spektraleigenschaften gewisser Klassen positiver Transformationen im Vordergrund. In halbgeordneten Räumen mit einer allgemeineren, nämlich lokalkonvexen topologischen Struktur sind positive Transformationen erstmals vom Verfasser [20] untersucht worden.

Bei vielen zur Erzeugung linearer Räume benutzten Prozessen, die in der Theorie linearer Räume bedeutsam sind, besitzt der neugebildete Raum eine in natürlicher Weise durch die Ordnungsstrukturen — wenn vorhanden — der gegebenen Räume erzeugte Halbordnung (vgl. den folgenden Abschnitt). So sind das topologische Produkt, die direkte Summe halbgeordneter linearer Räume wieder halbgeordnet; ebenso ein linearer Teilraum und ein Quotientenraum, vor allem aber der zu einem halbgeordneten topologischen Vektorraum duale Raum, d. h. der Raum stetiger Linearformen. Daher ist es nicht verwunderlich, daß die meisten in den Anwendungen auftretenden topologischen Vektorräume in natürlicher Weise halbgeordnet sind; denn sie sind fast durchweg mit Hilfe der reellen oder komplexen Zahlen gebildet. Für die Rolle, die die Halbordnung in solchen Räumen spielt, ist nun sehr wesentlich, in welchem Verhältnis sie zur Topologie steht; anders ausgedrückt: welche topologischen Eigenschaften der Kegel der für diese Halbordnung positiven Elemente besitzt.

*) Ich danke an dieser Stelle besonders der Deutschen Forschungsgemeinschaft, durch deren Unterstützung mir die Anfertigung dieser Arbeit erleichtert wurde.

¹⁾ Für die in der Einleitung verwendeten Begriffe vergleiche den folgenden Abschnitt.

²⁾ Nach Vollendung des Manuskriptes erhielt der Verfasser Kenntnis der Arbeit von I. NAMIOKA [19]. An den wenigen Stellen, wo die Ergebnisse beider Arbeiten in enger Parallele stehen — dies betrifft vorzugsweise Teile des 4. Abschnittes der vorliegenden Arbeit — ist der Zugang zu ihnen doch so verschieden, daß ein Vergleich der genauen Untersuchung bedarf und einige weitere Ergebnisse bringen dürfte. Wir verschieben dies auf die beabsichtigte Fortsetzung dieser Arbeit.

Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, den Zusammenhang zwischen Halbordnung und Topologie in linearen Räumen systematisch zu studieren. Da hierbei die Theorie der Dualität wesentlich benutzt wird, beschränken wir uns von vornherein auf lokalkonvexe Topologien, und um viele Komplikationen (die grundsätzlich ohne Belang sind) zu vermeiden, auf die reellen Zahlen als Skalarkörper. Im Laufe der Untersuchung stellte sich heraus, daß es im wesentlichen zwei Begriffe sind, die eine entscheidende Rolle spielen: Der Begriff des *normalen* und der des *BZ-Kegels*³⁾. Diese Begriffe sind unabhängig voneinander von KREIN [15] bzw. BONSALL [4] für Kegel in normierten Räumen aufgestellt worden. Sie werden im folgenden in einer für alle lokalkonvexen Räume gültigen Weise definiert und sind über die Dualität sehr eng miteinander verknüpft: In reflexiven Räumen ist der zu einem normalen Kegel konjugierte stets BZ-Kegel und umgekehrt. Die wichtigsten Eigenschaften und das gegenseitige Verhältnis von normalen und BZ-Kegeln werden in den beiden ersten Abschnitten betrachtet. In den übrigen drei Abschnitten werden dann die gewonnenen Ergebnisse auf verschiedenartige Fragestellungen angewandt. Ihnen ist gemeinsam, daß sie sich auf die innere Struktur halbgeordneter lokalkonvexer Räume beziehen, also sozusagen geometrischer Natur sind, während von der Betrachtung linearer Transformationen (mit Ausnahme der Linearformen) abgesehen wird. Diese sollen einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Wir geben im folgenden (unter der entsprechenden Ziffer) einen kurzen Überblick über die Ergebnisse der einzelnen Abschnitte.

1. Wir geben die Definition eines normalen Kegels in einem lokalkonvexen Raum E und in (1.1) ihr analytisches Äquivalent. Die Eigenschaft der Normalität überträgt sich unmittelbar auf Teilräume und topologische Produkte (1.2). Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist das Zerlegungstheorem (1.3): Jede auf E stetige Linearform ist Differenz zweier auf K positiver⁴⁾, ebenfalls stetiger Linearformen, wenn K ein normaler Kegel ist. (1.5) gibt mit Hilfe der „ \mathcal{C} -Kegel“ eine duale Kennzeichnung normaler Kegel, aus der zusammen mit (1.3) sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ergibt, daß jede stetige Linearform Differenz zweier positiver (stetiger) Linearformen ist (1.6). Um — besonders im 4. Abschnitt — eine inhaltsreiche Theorie zu erhalten, erweist es sich als notwendig, den (allgemeinsten) Begriff des halbgeordneten linearen Raumes etwas einzuengen. Wir definieren reguläre Ordnungsstrukturen auf linearen Räumen mit Hilfe des Äquivalenzsatzes (1.7), wobei sich der Begriff des normalen Kegels wieder als grundlegend erweist. (1.8) zeigt, daß die Forderung der Regularität eine vernünftige Beschränkung darstellt. Der Abschnitt schließt mit zwei wichtigen Sätzen der Maßtheorie, die als Anwendung von (1.3) bewiesen werden.

2. Der zweite Abschnitt schließt mit der Definition des BZ-Kegels, des wichtigsten Spezialfalles der \mathcal{C} -Kegel, unmittelbar an (1.5) an. (2.1) gibt ein

³⁾ Definitionen im 1. bzw. 2. Abschnitt.

⁴⁾ Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, verwenden wir die Wörter „positiv“ und „nichtnegativ“ in gleicher Bedeutung.

Kriterium für die BZ-Eigenschaft, (2.2) einen Einblick in den dualen Charakter der normalen und BZ-Kegel. (2.3) gibt eine duale Charakterisierung der BZ-Kegel mit Hilfe der starken Topologie im dualen Raum, die sich (2.4) für tonnelierte Räume umkehren läßt. Eine Konsequenz der BZ-Eigenschaft im Dual tonnelierter Räume ist (2.5); die Frage nach der BZ-Eigenschaft im Fall $E = K - K$ mußte leider — mit Ausnahme von Banachräumen (2.6) — offenbleiben. (2.7) ist eine Folge der vorangehenden Ergebnisse für reflexive Räume und läßt den dualen Charakter der beiden Typen von Kegeln voll in Erscheinung treten. (2.8) zeigt den Einfluß der BZ-Eigenschaft auf die Stetigkeit positiver Linearformen und bildet, wie die nachfolgenden Beispiele zeigen, eine Ergänzung eines bekannten Kriteriums hierfür (BOURBAKI [7], p. 75). Die Beispiele zeigen außerdem das Zusammentreffen von Normalität und BZ-Eigenschaft für die positiven Kegel der geläufigsten klassischen B-Räume.

3. Eine Verallgemeinerung der in Rieszschen Räumen geläufigen relativen Beschränktheit von Linearformen (BOURBAKI [9], p. 34) ist die hier gegebene Definition ordnungsbeschränkter Linearformen in beliebigen halbgeordneten linearen Räumen. Ist der positive Kegel K im Rieszschen lokalkonvexen Raum E normal, so ist jede stetige Linearform relativ beschränkt (3.2). Die Umkehrung dieser Aussage ist für BZ-Kegel nur unter wesentlich engeren Voraussetzungen richtig (3.3). (3.4) gibt ein Kriterium für das Zusammenfallen beider Klassen von Linearformen, das im reflexiven Fall eine besonders einfache Form annimmt.

4. Durch (3.2) und (3.3) wird die Vermutung nahegelegt, daß die Klassen ordnungsbeschränkter und stetiger Linearformen auf einem halbgeordneten linearen Raum E nur für eine genügend feine Topologie übereinstimmen werden. Der vorliegende Abschnitt beantwortet die Frage nach der Existenz dieser Topologie positiv. Dies geschieht zunächst für den Fall, daß E eine Ordnungseinheit besitzt (4.1). Die Ordnungstopologie ist dann normiert und die feinste, für welche der positive Kegel K normal ist. Ist $E[\mathfrak{T}]$ ein B-Raum mit Ordnungseinheit und K normal, so ist \mathfrak{T} die Ordnungstopologie (4.2). Im allgemeinen Fall (4.4) ist die Ordnungstopologie \mathfrak{T}_O induktiver Limes normierter und (4.5) tonnelierter Räume und \mathfrak{T}_O feiner als jede lokalkonvexe Topologie, für die K normal ist. Die Topologie \mathfrak{T}_O dürfte ein neuartiges allgemeines Beispiel für den Begriff des induktiven Limes bilden. Um sicherzugehen, daß \mathfrak{T}_O eine Hausdorffsche Topologie ist, muß die Ordnungsstruktur als regulär (vgl. Definition 3, Abschnitt 1) vorausgesetzt werden. (4.6) und (4.7) sind das erwartete Ergebnis: \mathfrak{T}_O ist die feinste lokalkonvexe Topologie, für die der duale Raum aus allen ordnungsbeschränkten Linearformen besteht. Ob der positive Kegel eines regulär halbgeordneten Raumes für die Ordnungstopologie stets normal ist, ist eine offene Frage. Wohl aber existiert auf jedem solchen Raum eine feinste lokalkonvexe Topologie \mathfrak{T}_N , für die K normal ist (4.8), und die Regularität der Ordnungsstruktur ist hierfür auch notwendig. (4.9) gibt eine hinreichende Bedingung für die Übereinstimmung von \mathfrak{T}_N und \mathfrak{T}_O . Die Übereinstimmung von \mathfrak{T}_N mit einer

vorgegebenen lokalkonvexen Topologie \mathfrak{T} läßt sich in vielen Fällen mit Hilfe von (4.10) feststellen; so in den nachfolgenden Beispielen, bei denen auch \mathfrak{T}_N mit \mathfrak{T}_0 zusammenfällt.

5. Wir zeigen zunächst (5.1), (5.2), daß die beiden bekannten Darstellungssätze für beliebige lokalkonvexe und für separable Banachsche Räume als Räume stetiger Funktionen sich auch auf die Ordnungsstruktur erstrecken, sofern die Räume halbgeordnet sind mit normalem Kegel. — Der Rest des Abschnitts beschäftigt sich mit dem Basisproblem und gibt in (5.3) und (5.4) mit Hilfe der Normalität und BZ-Eigenschaft hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein abzählbares System in einem tonnelierten (separablen) Raum eine Basis bzw. eine absolute Basis ist. Nebenbei ergibt sich (5.5), daß nicht jeder totale Kegel eines separablen B-Raumes die BZ-Eigenschaft besitzt. (5.6) bezieht sich auf reflexive B-Räume und weist die Äquivalenz zwischen der Normalität (oder BZ-Eigenschaft) der von einem maximalen Biorthogonalsystem $[x_n, y'_m]$ aufgespannten Kegel $K[x_n]$ bzw. $K[y'_m]$ und der Eigenschaft nach, daß $\{x_n\}$ bzw. $\{y'_m\}$ absolute Basen in E bzw. E' sind.

Übersicht über die verwendeten Hilfsmittel

Wir geben in diesem Abschnitt eine kurze Übersicht über die verwendeten Hilfsmittel. Nach einigen Hinweisen, die für die gesamte Arbeit von Belang sind, unterteilen wir die Angaben nach den Abschnitten, auf die sie besonderen Bezug haben. Die einzelnen Abschnitte der Arbeit sind insofern nicht unabhängig voneinander, als in späteren häufig auf früher bewiesene Behauptungen und Sätze zurückgegriffen wird.

Wir setzen den Begriff des lokalkonvexen Vektorraumes (BOURBAKI [7], KÖTHER [14]) und seine einfachsten Eigenschaften als bekannt voraus. Jedoch wird ein lokalkonvexer linearer Raum stets als separiert (d. h. seine Topologie als Hausdorffsch) angenommen. Die Topologie \mathfrak{T} von E wird, wenn Verwechslungen nicht ausgeschlossen sind, durch den Zusatz $E[\mathfrak{T}]$ gekennzeichnet. Die abgeschlossene Hülle einer Menge $M \subset E$ bezeichnen wir, nötigenfalls unter Angabe der gemeinten Topologie, mit \overline{M} . Wir betrachten ausschließlich lineare Räume über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Ein linearer Raum E heißt halbgeordnet, wenn auf einer (nichtleeren) Menge $\{(x, y) \in E \times E\}$ eine Relation $x \leq y$ erklärt ist, die den Bedingungen genügt:

- 1^o. *Es ist stets $x \leq x$ (Reflexivität).*
- 2^o. *Aus $x \leq y, y \leq z$ folgt $x \leq z$ (Transitivität).*
- 3^o. *$x \leq y, y \leq x$ bedingt $x = y$ (eigentliche Halbordnung).*
- 4^o. *Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$ für alle $z \in E$.*
- 5^o. *Aus $x \geq 0$ folgt $\lambda x \geq 0$ für $\lambda \geq 0$.*

4^o. und 5^o. verknüpfen die Ordnungsstruktur mit den linearen Relationen in E . Ist $E[\mathfrak{T}]$ lokalkonvex, so fordern wir keine generelle Verträglichkeitsbedingung zwischen Ordnungsstruktur und Topologie. (Die Forderung, daß die Menge K der „positiven“ Elemente \mathfrak{T} -abgeschlossen sei, vgl. BOURBAKI [9],

p. 26, ist häufig durch Abschließung von K leicht zu verwirklichen; aber die Abgeschlossenheit von K ist für viele unserer Betrachtungen nicht wesentlich.) Ein halbgeordneter linearer Raum heißt fast-archimedisch, wenn seine Ordnungsstruktur der Bedingung genügt:

6° Aus $-\xi y \leq x \leq \xi y$ für alle $\xi > 0$ folgt $x = 0$.

Wir nennen die Elemente $x \geq 0$ in E positiv. Ihre durch die Ordnungsstruktur wohlbestimmte Gesamtheit K ist ein konvexer Kegel in E mit dem Scheitel 0, der stets zu K gehört. Außerdem ist K echt, d. h. K enthält (wegen 3°, 4° und 5°) keine Gerade durch 0. Umgekehrt definiert ein konvexer echter Kegel K mit dem Scheitel 0 durch $x \leq y$ für $y - x \in K$ stets eine Ordnungsstruktur, die den Axiomen 1° bis 5° genügt. Wir verstehen im folgenden unter einem Kegel (schlechthin) stets einen konvexen Kegel, der seinen Scheitel 0 enthält. Wenn im selben Zusammenhang von einer Halbordnung und einem Kegel K die Rede ist, so ist K stets die Menge der bezüglich dieser Halbordnung positiven Elemente.

Sind E_1, E_2 zwei lineare halbgeordnete Räume mit den Ordnungskegeln K_1, K_2 , so heißt jede lineare Abbildung A von E_1 in E_2 mit $A(K_1) \subset K_2$ Ordnungshomomorphismus. Ist die Abbildung eineindeutig von E_1 auf E_2 und $A(K_1) = K_2$, so sprechen wir von einem (linearen) Ordnungsisomorphismus.

Ist E ein halbgeordneter linearer topologischer Raum mit positivem Kegel K , so ist ein linearer Teilraum $L \subset E$ durch den Kegel $L \cap K$, ein Quotientenraum E/H durch \hat{K} halbgeordnet, \hat{K} das Bild von K beim kanonischen Homomorphismus $E \rightarrow E/H$. Seien E_α halbgeordnete lineare Räume, K_α der Ordnungskegel in E_α . Das Produkt $\prod_\alpha E_\alpha$ ist durch $K = \prod_\alpha K_\alpha$, die direkte Summe $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ durch $K = \bigoplus_\alpha K_\alpha$ halbgeordnet.

1. Ein Dualsystem $\langle F, G \rangle$ ist ein Paar von linearen Räumen, auf deren Produkt $F \times G$ eine Bilinearform $\langle x, y \rangle$ mit folgender Eigenschaft erklärt ist: Aus $\langle x_0, y \rangle = 0$ für alle $y \in G$ folgt $x_0 = 0$; aus $\langle x, y_0 \rangle = 0$ für alle $x \in F$ folgt $y_0 = 0$. Mit $\sigma(F, G)$ wird die Topologie der einfachen (punktweisen) Konvergenz auf F bezeichnet; hierbei werden die $y \in G$ als lineare Abbildungen von F in \mathbf{R} vermöge $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ aufgefaßt. Entsprechend definiert man $\sigma(G, F)$. $\sigma(F, G)$ heißt (die) schwache Topologie auf F (bezüglich $\langle F, G \rangle$). Das wichtigste Beispiel eines Dualsystems ist $\langle E, E' \rangle$, wo $E[\mathfrak{L}]$ ein lokalkonvexer Raum, E' der Raum aller \mathfrak{L} -stetigen Linearformen auf E ist. $\langle x, x' \rangle$ ist der Wert von $x' \in E'$ im Punkte $x \in E$. Für $M \subset F$ heißt

$$M^0 = \{y \in G : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in M\}$$

die zu M polare Menge. M^{00} ist die $\sigma(F, G)$ -abgeschlossene konvexe Hülle von $M \cup \{0\}$. (Bipolarensatz.) Eine F überdeckende Klasse \mathfrak{S} von Teilmengen heißt gesättigt, wenn sie mit S jede Teilmenge von S , alle positiven Vielfachen ρS und mit endlich vielen Mengen die absolutkonvexe schwach-abgeschlossene Hülle ihrer Vereinigung enthält; dabei heißt M absolutkonvex, wenn es konvex und symmetrisch ist. Eine lokalkonvexe Topologie \mathfrak{L} heißt zulässig auf F für das Dualsystem $\langle F, G \rangle$, wenn $F[\mathfrak{L}]' = G$ ist. Jede

zulässige Topologie ist eine \mathfrak{S} -Topologie (d. h. Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von \mathfrak{S}), wobei \mathfrak{S} eine gesättigte Klasse relativ schwach kompakter Teilmengen von G ist. Die feinste \mathfrak{S} -Topologie $\beta(F, G)$, \mathfrak{S} die Klasse aller schwachbeschränkten (s. u.) Teilmengen von G , ist im allgemeinen nicht mehr zulässig. $\beta(F, G)$ bezeichnet man als starke Topologie, die feinste zulässige Topologie, $\tau(F, G)$, als Mackeysche Topologie auf F .

2. Eine Menge $B \subset E[\mathfrak{T}]$ heißt \mathfrak{T} -beschränkt, wenn $B \subset \rho U$ für jede Nullumgebung U und geeignetes $\rho = \rho(U) > 0$. Ein System $\{B_\alpha\}$ heißt Fundamentalsystem beschränkter Mengen, wenn $B \subset B_\alpha$ für jede beschränkte Menge bei geeignetem Index α . Ist $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem, so sind die beschränkten Mengen für alle zulässigen Topologien dieselben (MACKEY). $E[\mathfrak{T}]$ heißt tonneliert, wenn \mathfrak{T} die starke Topologie $\beta(E, E')$ ist. Im dualen Raum E' eines tonnelierten Raumes ist jede $\sigma(E', E)$ -beschränkte Menge auch $\beta(E', E)$ -beschränkt (denn jede schwachbeschränkte Menge ist \mathfrak{T} -gleichstetig). E heißt halbreflexiv, wenn sein Bidual E'' aus lauter $\sigma(E', E)$ -stetigen Linearformen besteht, also (algebraisch) isomorph zu E ist, reflexiv, wenn E'' in der starken Topologie $\beta(E'', E')$ isomorph zu $E[\mathfrak{T}]$ ist. Jeder reflexive Raum ist tonneliert. Schließlich nennt man $E[\mathfrak{T}]$ bornologisch, wenn jede absolutkonvexe Menge M mit $B \subset \rho M$ für jedes beschränkte B (bei passendem $\rho > 0$) eine Nullumgebung ist. Jeder folgenvollständige bornologische Raum ist tonneliert.

3. Alle für den dritten Abschnitt wesentlichen Begriffe sind dort erklärt. Für weitere Information siehe BOURBAKI [9], chap. II.

4. Ist E ein linearer halbgeordneter Raum mit positivem Kegel K , so heißt $a \in K$ eine Ordnungseinheit, wenn es zu jedem $b \in E$ ein $\lambda > 0$ gibt mit $b \leq \lambda a$ (d. h. wenn a alle Elemente von E umfaßt im Sinne der Definition 5, Abschnitt 4). Für einen Raum mit Ordnungseinheit gilt stets $E = K - K$; indessen besitzt ein halbgeordneter Raum im allgemeinen keine Ordnungseinheit. Es sei $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ eine Klasse lokalkonvexer Räume, $E \supset \bigcup_\alpha E_\alpha$.

Als Hüllentopologie auf E bezeichnet man die feinste lokalkonvexe Topologie \mathfrak{T} , für die sämtliche Einbettungen I_α von E_α in E stetig sind (falls \mathfrak{T} separiert ist). Ist überdies die Indexmenge $\{\alpha\}$ gerichtet⁵⁾, $E_\alpha \subset E_\beta$ für $\alpha < \beta$, sind ferner die Einbettungen I_α^β von $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ in $E_\beta[\mathfrak{T}_\beta]$ stetig, so heißt E bezüglich der Hüllentopologie \mathfrak{T} induktiver Limes der $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$: $E[\mathfrak{T}] = \varinjlim E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$. Der induktive Limes einer Menge bornologischer Räume ist bornologisch, einer Menge tonnelierter Räume tonneliert. Jeder induktive Limes $\varinjlim E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ ist isomorph einem Quotientenraum der lokalkonvexen direkten Summe $\bigoplus_\alpha E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ nach einem geeignet gewählten linearen Teilraum. Wir bemerken noch, daß $\varinjlim E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha] = \varinjlim E_{\alpha'}[\mathfrak{T}_{\alpha'}]$ ist, wenn $\{\alpha'\}$ eine zum gerichteten System $\{\alpha\}$ konfinale Teilmenge bedeutet. Weiteres über induktive Limites siehe bei KÖTHE [14].

⁵⁾ Eine halbgeordnete Menge $A = \{\alpha\}$ heißt gerichtet, wenn zu α, β stets $\gamma \in A$ existiert mit $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$.

1. Konjugierte Kegel in dualen Räumen

Es sei $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem. Für $x \in F, x' \in G$ bezeichnen wir mit $\langle x, x' \rangle$ den Wert der kanonischen Bilinearform auf $F \times G$. Ist K ein Kegel in F , so ist

$$K' = \{x' \in G : \langle x, x' \rangle \geq 0 \text{ für } x \in K\}$$

wieder ein Kegel, den wir den zu K konjugierten Kegel in G nennen.

Offenbar ist $K' = -K^0, K^0$ die (bezüglich der Dualität zwischen F und G) zu K polare Menge. Hieraus folgt, daß $K' \sigma(G, F)$ -abgeschlossen ist. Aus dem Bipolarenaussatz (BOURBAKI [8], p. 52, prop. 3) ergibt sich $K^{00} = K'' = K$, wenn (und nur wenn) K abgeschlossen ist für $\sigma(F, G)$. Ist dies der Fall, so ist K auch abgeschlossen für jede zulässige Topologie auf F . Ist K abgeschlossen in F , so ist die durch K auf F erzeugte Halbordnung archimedisch. Denn aus $x \leq \xi y$ für alle $\xi > 0$ folgt $x \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi y = 0$.

Wir führen eine Eigenschaft konvexer Kegel ein, die für Banachräume bekannt und zuerst wohl von KREIN [15] formuliert worden ist.

Definition 1. Ein Kegel K^0 in einem lokalkonvexen Raum $E[\mathfrak{L}]$ heiße normal für \mathfrak{L} , wenn es eine aus absolutkonvexen Mengen bestehende \mathfrak{L} -Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U} = \{U\}$ mit der Eigenschaft gibt: Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ und jede Menge $M \subset K$ mit leerem $M \cap U$ ist $(M + K) \cap U$ ebenfalls leer.

(1.1) Ein Kegel K in $E[\mathfrak{L}]$ ist dann und nur dann normal, wenn es ein \mathfrak{L} erzeugendes System $\{p_\alpha\}$ von Halbnormen gibt, die auf K monoton sind:

$$(*) \quad p_\alpha(x + y) \geq p_\alpha(x) \quad \text{für } x, y \in K.$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Ist umgekehrt ein \mathfrak{L} erzeugendes System $\{p_\alpha\}$ von Halbnormen gegeben, das (*) genügt, so bilden die $V_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebungssubbasis für \mathfrak{L} . Man sieht nun leicht, daß für die Distanzfunktionen der Durchschnitte

$\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ je endlich vieler V_α ebenfalls (*) gilt. Die positiven Vielfachen dieser Durchschnitte bilden aber eine \mathfrak{L} -Nullumgebungsbasis, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir stellen noch einige Folgerungen von (1.1) zusammen.

Corollar. Ein Kegel K in $E[\mathfrak{L}]$ ist dann und nur dann \mathfrak{L} -normal, wenn es eine \mathfrak{L} -Nullumgebungsbasis \mathfrak{U} gibt, so daß aus $x \in U$ und $0 \leq y \leq x$ (für die durch K erzeugte Halbordnung) $y \in U$ folgt für jedes $U \in \mathfrak{U}$.

Corollar. Sei $\{z_i\} \subset K$ eine beliebige \mathfrak{L} -beschränkte Menge. Dann ist, wenn K normal ist für \mathfrak{L} , die Menge $M = \bigcup_i \{z : 0 \leq z \leq z_i\}$ beschränkt.

Beweis. Sei $\{p_\alpha\}$ ein \mathfrak{L} -erzeugendes System von Halbnormen, das (*) genügt. Wäre M nicht beschränkt, so gäbe es eine Teilmenge $\{z_n\} \subset M$ mit $p_\alpha(z_n) \rightarrow \infty$ für wenigstens ein α . Sei etwa $z_n \leq z_{n+1}$. Dann wäre nach (*) $p_\alpha(z_{n+1}) \geq p_\alpha(z_n) \rightarrow \infty$, entgegen der Beschränktheit von $\{z_i\}$.

Corollar. Gibt es zu einer Folge $\{x_n\} \subset K$, die nicht \mathfrak{L} -Nullfolge ist, eine Nullfolge $\{z_n\}$ mit $x_n \leq z_n$, so ist K nicht normal für \mathfrak{L} .

⁹⁾ Wir erinnern daran, daß wir unter einem „Kegel“ stets einen konvexen Kegel mit dem Scheitel 0 verstehen.

Beweis. Wäre K normal, so gäbe es ein \mathfrak{L} erzeugendes System von Halbnormen $\{p_\alpha\}$, das (*) genügt. Da $\{x_n\}$ keine Nullfolge ist, gibt es eine Teilfolge $\{x_{n'}\}$ und ein α mit $p_\alpha(x_{n'}) > \varepsilon_0 > 0$. Hieraus würde nach (*) folgen $p_\alpha(z_{n'}) \geq p_\alpha(x_{n'}) > \varepsilon_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(1.2) Jeder normale Kegel ist echt. Ist H ein linearer Teilraum von $E[\mathfrak{L}]$, K ein \mathfrak{L} -normaler Kegel in E , so ist $K \cap H$ ein \mathfrak{L} -normaler Kegel in H . Damit ein Kegel K normal sei im topologischen Produkt $E = \prod_{\alpha} E_{\alpha}[\mathfrak{L}_{\alpha}]$, ist notwendig und hinreichend, daß $K_{\alpha} = \text{pr } K \mathfrak{L}_{\alpha}$ -normal sei für jedes α , und das gleiche gilt für die lokalkonvexe direkte Summe $E = \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}[\mathfrak{L}_{\alpha}]$.

Beweis. Es sei $x \in K \cap (-K)$, d. h. $x \in K$, $-x \in K$. Aus (1.1) folgt $0 = p_{\alpha}(x - x) \geq p_{\alpha}(x) \geq 0$, daher $p_{\alpha}(x) = 0$ für jedes α . Hieraus folgt $x = 0$, d. h. K ist echt. Die Normalität von $K \cap H$ in H folgt unmittelbar daraus, daß die Einschränkungen eines \mathfrak{L} erzeugenden Systems von Halbnormen auf H die von \mathfrak{L} auf H induzierte Topologie erzeugen. Zum Beweis der dritten Behauptung bemerken wir, daß die Halbnormen p_{α}^{β} :

$$p_{\alpha}^{\beta}(x) = p_{\beta}(x_{\alpha}),$$

wo $x = (x_{\alpha})$ und $\{p_{\beta}\}$ ein \mathfrak{L}_{α} erzeugendes System von Halbnormen auf E_{α} ist, die Produkttopologie auf E erzeugen. Sind daher die $K_{\alpha} = \text{pr } K$ normal in $E_{\alpha}[\mathfrak{L}_{\alpha}]$, so folgt für $x, y \in K$:

$$p_{\alpha}^{\beta}(x + y) = p_{\beta}(x_{\alpha} + y_{\alpha}) \geq p_{\beta}(x_{\alpha}) = p_{\alpha}^{\beta}(x),$$

d. h. K ist normal. Die Umkehrung folgt analog oder auch daraus, daß E_{α} einem linearen Teilraum von E algebraisch, topologisch und ordnungsisomorph ist.

Die Notwendigkeit der letzten Behauptung ist klar. Sei umgekehrt K_{α} normal in $E_{\alpha}[\mathfrak{L}_{\alpha}]$, dann gibt es nach (1.1), 1. Corollar, eine \mathfrak{L}_{α} -Nullumgebungsbasis $\{U_{\alpha}\}$, so daß aus $0 \leq y_{\alpha} \leq x_{\alpha} \in U_{\alpha}$ folgt $y_{\alpha} \in U_{\alpha}$. Nun wird eine Nullumgebungsbasis in $\bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}[\mathfrak{L}_{\alpha}]$ durch die absolutkonvexen Hüllen $U = \Gamma_{\alpha} U_{\alpha}$ gegeben, U_{α} beliebiges Element einer \mathfrak{L}_{α} -Nullumgebungsbasis. Ist jetzt $0 \leq y \leq x \in U$, so ist $x = \sum \xi_{\alpha} x_{\alpha}$, $x_{\alpha} \in U_{\alpha}$ und $\sum |\xi_{\alpha}| \leq 1$, und $y = \sum \eta_{\alpha} y_{\alpha}$. Wegen $K = \bigoplus_{\alpha} K_{\alpha}$ folgt aus $x - y \in K$ $0 \leq y_{\alpha} \leq \xi_{\alpha} x_{\alpha}$, also $y_{\alpha} \in \xi_{\alpha} U_{\alpha}$ und $y \in \Gamma_{\alpha} U_{\alpha}$, w.z.b.w.

Die Ordnungshomomorphismen eines halbgeordneten linearen Raumes E in \mathbf{R} sind nichts anderes als die auf dem Ordnungskegel K positiven Linearformen. Ist E ein linearer topologischer, insbesondere lokalkonvexer Raum, so ist von besonderem Interesse, wie sich die Gesamtheit aller auf E stetigen Linearformen zur Gesamtheit aller positiven Linearformen verhält. Wir kommen auf diese Frage in den Abschnitten 3 und 4 zurück (vgl. auch (2.8)) und untersuchen jetzt, unter welchen Umständen jede stetige Linearform auf E Differenz zweier ebenfalls stetiger positiver Linearformen ist. Man überlegt sich leicht, daß in einem Dualsystem $\langle F, G \rangle$ die Echtheit von $\bar{K} \subset F$

stets die Totalität von K' zur Folge hat, d. h. $K' - K'$ $\sigma(G, F)$ -dicht ist in G ; umgekehrt folgt aus $\overline{K' - K'} = G$ die Echtheit von \overline{K} .

Die Bedeutung der normalen Kegel beruht nun wesentlich auf dem folgenden, für B -Räume von KREIN-GROSBERG [16] bewiesenen Zerlegungstheorem:

(1.3) *Sei E ein lokalkonvexer Raum, K ein normaler Kegel in E . Dann ist $E' = K' - K'$, d. h. jede auf E stetige Linearform ist Differenz zweier auf K nichtnegativer, ebenfalls stetiger Linearformen.*

Beweis. Sei U ein beliebiges Element einer Nullumgebungsbasis in E , welche die in der Definition des normalen Kegels geforderte Eigenschaft besitzt. Wir bezeichnen mit p die vermöge $U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ zu U gehörige Halbnorm, mit $B = U^0$ die zu U polare Menge in E' . Ferner sei H der Nullraum von $U : H = \overline{p}^{-1}(0)$, $L' = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$ der von B aufgespannte Teilraum von E' .

Es sei $\hat{E} = E/H$, \hat{K} das kanonische Bild von K beim Homomorphismus $E \rightarrow E/H$. \hat{E} ist durch $\|\hat{x}\| = p(x)$ für (irgendein) $x \in \hat{x}$ normiert. Man sieht leicht, daß die auf \hat{E} in der Normtopologie stetigen Linearformen eineindeutig den auf U beschränkten Linearformen entsprechen. Denn letztere genügen einer Beziehung $|\varphi(x)| \leq C p(x)$, woraus $\varphi = 0$ auf H folgt, also ist $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ mit $\hat{\varphi}(\hat{x}) = \varphi(x)$ und $|\hat{\varphi}(\hat{x})| \leq C \|\hat{x}\|$ für beliebiges $x \in \hat{x}$. Umgekehrt definiert jedes $\hat{\psi} \in \hat{E}'$ eindeutig ein stetiges $\psi(x) = \hat{\psi}(\hat{x})$ für $x \in \hat{x}$. Sei weiter φ eine nichtnegative Linearform auf E , d. h. $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in K$. Ist φ auf U beschränkt, so gilt für das Bild $\hat{\varphi}$ offenbar $\hat{\varphi}(\hat{x}) \geq 0$ für $\hat{x} \in \hat{K}$, denn \hat{K} besteht aus allen Restklassen mod H , die ein $x \in K$ enthalten. Andererseits entspricht jedem $\hat{\psi} \in \hat{K}'$ ein $\psi \in K'$.

Wir haben bisher gezeigt, daß $L' \cong \hat{E}'$, und die Isomorphie sich auf die algebraische und Ordnungsstruktur beider Räume bezieht. Wir zeigen noch, daß \hat{K} normal ist in \hat{E} . Wegen der Normalität von K folgt aus (1.1) nach Definition der Norm in \hat{E} :

$$\|\hat{x} + \hat{y}\| = p(x + y) \geq p(x) = \|\hat{x}\|$$

für alle $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{K}$, wenn $x \in \hat{x}, y \in \hat{y}$ zwei Elemente aus K sind. Nach KREIN-GROSBERG [16] gilt $\hat{E}' = \hat{K}' - \hat{K}'$. Sei daher $\varphi \in L'$ und $\hat{\varphi}$ das φ in \hat{E}' entsprechende Element; wir haben $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2$ und $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \hat{K}'$. Entsprechen umgekehrt φ_1, φ_2 diesen Elementen, so gilt also $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Da U beliebig war und jedes $\varphi \in E'$ auf einem U beschränkt ist, ist die Behauptung bewiesen.

Corollar. *Ist $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem, K ein bezüglich irgendeiner zulässigen Topologie auf F normaler Kegel, so gilt $G = K' - K'$.*

Es ist naheliegend, nach der Umkehrung zu fragen. Es sei $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem, $F = K - K$. Für welche Topologien auf G ist K' normal? Wir werden sehen, daß dies jedenfalls für die schwache Topologie $\sigma(G, F)$ stets zutrifft.

Sei $\mathfrak{S} = \{S\}$ eine gesättigte Klasse beschränkter Teilmengen von F . Wir bilden die gesättigte Hülle \mathfrak{S}_1 der Klasse aller Mengen $K \cap S$, $S \in \mathfrak{S}$. Man überlegt sich leicht, daß $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$, also die \mathfrak{S}_1 -Topologie größer ist als die \mathfrak{S} -Topologie auf G .

Definition 2. Sei $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem. Der Kegel $K \subset F$ heiße ein \mathfrak{S} -Kegel, wenn $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ ist.

Wir sagen, $\{S_\alpha\}$ sei ein Fundamentalsystem von \mathfrak{S} -Mengen, kurz \mathfrak{S} -Fundamentalsystem, wenn jedes $S \in \mathfrak{S}$ in einem S_α enthalten ist. Wir erhalten

(1.4) Damit K ein \mathfrak{S} -Kegel in F sei, ist notwendig und hinreichend: Es gibt ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem $\{S_\alpha\}$, für das die absolutkonvexen abgeschlossenen Hüllen $\overline{\Gamma(S_\alpha \cap K)}$ wieder ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem bilden.

Beweis. Es sei K \mathfrak{S} -Kegel. Gegeben sei ein \mathfrak{S}_1 -Fundamentalsystem $\{S_\alpha^{(1)}\}$, dessen Elemente wir uns in der Gestalt $S_\alpha^{(1)} = \overline{\Gamma(K \cap S_\alpha)}$ gegeben denken können. Hierbei können wir die Mengen $S_\alpha \in \mathfrak{S}$, da \mathfrak{S} gesättigt ist, als absolutkonvex und abgeschlossen annehmen. (Denn die absolutkonvexen abgeschlossenen Hüllen der $K \cap \overline{\Gamma S_\alpha}$ bilden dann offenbar wieder ein \mathfrak{S}_1 -Fundamentalsystem.)

Wir haben zu zeigen, daß $\{S_\alpha\}$ ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem ist. Sei $S \in \mathfrak{S}$. Da \mathfrak{S} gesättigt ist, ist auch $2S \in \mathfrak{S}$ und wegen $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ $2S \subset \overline{\Gamma(K \cap S_\alpha)}$ für ein geeignetes α . Nun ist

$$\Gamma(K \cap S_\alpha) \subset S_\alpha - S_\alpha = S_\alpha + S_\alpha \subset 2S_\alpha,$$

daher $2S \subset \overline{2S_\alpha} = 2\overline{S_\alpha} = 2S_\alpha$ und $S \subset S_\alpha$, w.z.b.w. Ist umgekehrt $\{\overline{\Gamma(K \cap S_\alpha)}\}$ \mathfrak{S} -Fundamentalsystem, so ist seine gesättigte Hülle $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$, also K \mathfrak{S} -Kegel.

Wir nennen einen \mathfrak{S} -Kegel strikt, wenn bereits die $\Gamma(K \cap S_\alpha)$ ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem bilden (bei geeigneter Wahl von $\{S_\alpha\}$).

(1.5) Sei $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem. Damit der Kegel $K \subset F$ normal sei für die \mathfrak{S} -Topologie, ist hinreichend und für jede zulässige \mathfrak{S} -Topologie auch notwendig, daß K' \mathfrak{S} -Kegel sei in G .

Beweis. Es sei K' ein \mathfrak{S} -Kegel in G , $\{S_\alpha\}$ ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem in G , das (1.4) genügt. Dann bilden die polaren Mengen $\overline{\Gamma(S_\alpha \cap K)}^0$ eine Nullumgebungsbasis für die \mathfrak{S} -Topologie in F , und die Halbnormen

$$p_\alpha(x) = \sup_{x' \in S_\alpha \cap K'} |\langle x, x' \rangle|$$

erzeugen die \mathfrak{S} -Topologie auf F . Nun gilt für $x, y \in K$

$$p_\alpha(x + y) = \sup_{x' \in S_\alpha \cap K'} \langle x + y, x' \rangle \geq \sup_{x' \in S_\alpha \cap K'} \langle x, x' \rangle = p_\alpha(x),$$

daher ist nach (1.1) K normal für die \mathfrak{S} -Topologie.

Sei umgekehrt K normal für eine zulässige \mathfrak{S} -Topologie. Die polaren Mengen $S_\alpha = U_\alpha^0$ einer Nullumgebungsbasis bilden ein \mathfrak{S} -Fundamentalsystem. Wie im Beweis von (1.3) erhalten wir für jedes $\varphi \in S_\alpha$ eine Zerlegung $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, wo $\varphi_1, \varphi_2 \in K'$ und auf U_α beschränkt sind, also $\varphi_1, \varphi_2 \in nS_\alpha$ mit einer (scheinbar) von φ abhängenden natürlichen Zahl n . Nun ist nach dem Beweis

von (1.3) $L' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\alpha}$ ein B -Raum mit der Norm $\|\varphi\| = \sup_{x \in \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}} |\varphi(x)|$. Setzen wir $M_n = \{\varphi \in L' : \|\varphi_1\|, \|\varphi_2\| \leq n \|\varphi\|\}$, so ist M_n abgeschlossen und $L' = \bigcup_n M_n$, daher nach dem Satz von BAIRE $L' = M_n$ für ein n . Nennen wir dieses $n = n_{\alpha}$, so gilt also $S_{\alpha} \subset (n_{\alpha} S_{\alpha} \cap K') - (n_{\alpha} S_{\alpha} \cap K') \subset \Gamma(2n_{\alpha} S_{\alpha} \cap K')$. Da $\{2n_{\alpha} S_{\alpha}\}$ ebenfalls \mathfrak{S} -Fundamentalsystem ist, folgt nach (1.4), daß K' (sogar strikter) \mathfrak{S} -Kegel ist in G .

Corollar. Sei $F = K - K$. Dann ist K' normal für $\sigma(G, F)$.

Corollar. Sei $E[\mathfrak{S}]$ lokalkonvex, K ein \mathfrak{S} -normaler Kegel. Dann ist K normal für die schwache Topologie $\sigma(E, E')$.

Denn aus (1.3) folgt $E' = K' - K'$. Da $\langle E, E' \rangle$ ein Dualsystem ist, folgt aus dem vorangehenden Corollar die Behauptung.

Aus (1.3) und dem ersten Corollar von (1.5) erhalten wir nun eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der zu einem Kegel $K \subset E[\mathfrak{S}]$ in E' konjugierte Kegel K' den dualen Raum E' erzeugt:

(1.6) Es sei K ein Kegel im lokalkonvexen Raum $E[\mathfrak{S}]$. Damit $E[\mathfrak{S}]' = K' - K'$ gelte, ist notwendig und hinreichend, daß K normal sei für die schwache Topologie $\sigma(E, E')$.

Ist $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem, K ein Kegel in F , so ist K' total in G , wenn (und nur wenn) die schwach abgeschlossene Hülle \bar{K} von K ein echter Kegel ist. Ist insbesondere $G = F^*$, dem zu F algebraisch dualen Raum, so ist also für die Totalität des algebraisch konjugierten Kegels K^* in F^* notwendig und hinreichend, daß \bar{K} echt sei für die feinste lokalkonvexe Topologie auf F . Wir geben einige hierzu äquivalente Eigenschaften eines Kegels K in einem linearen Raum F .

(1.7) Sei K ein Kegel in einem linearen Raum F . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1⁰ Es gibt eine lokalkonvexe Topologie auf F , für welche die abgeschlossene Hülle \bar{K} von K ein echter Kegel ist.

2⁰ \bar{K} ist echt für die feinste lokalkonvexe Topologie \mathfrak{S}' auf F .

3⁰ K^* ist total (d. h. $K^* - K^*$ ist $\sigma(F^*, F)$ -dicht) in F^* .

4⁰ Es gibt eine lokalkonvexe Topologie auf F , für die K normal ist.

Beweis:

1⁰ \rightarrow 2⁰: Die \mathfrak{S}' -abgeschlossene Hülle von K ist Teilmenge der \mathfrak{S} -abgeschlossenen Hülle \bar{K} für jede andere lokalkonvexe Topologie \mathfrak{S} auf F .

2⁰ \rightarrow 3⁰: Folgt aus der obigen Bemerkung, da $F[\mathfrak{S}']' = F^*$ ist.

3⁰ \rightarrow 4⁰: Da $H^* = K^* - K^*$ $\sigma(F^*, F)$ -dicht ist in F^* , ist $\langle F, H^* \rangle$ ein Dualsystem, also nach (1.5), erstes Corollar K normal für $\sigma(F, H^*)$.

4⁰ \rightarrow 1⁰: Wenn K normal ist für eine lokalkonvexe Topologie \mathfrak{S} , ist nach (1.1) auch die \mathfrak{S} -abgeschlossene Hülle \bar{K} normal für \mathfrak{S} , daher nach (1.2) echt.

Wenn in einem halbgeordneten linearen Raum der positive Kegel eine (folglich alle vier) der in (1.7) aufgezählten Eigenschaften besitzt, werden wir den Raum als regulär halbgeordnet bezeichnen. Als wichtige Eigenschaft

regulär halbgeordneter Räume wird sich in (4.4) die Separiertheit der Ordnungstopologie ergeben.

Definition 3. *Eine Ordnungsstruktur auf dem linearen Raum F heißt regulär (oder F regulär halbgeordnet), wenn der positive Kegel K eine (folglich alle) der in (1.7) genannten Eigenschaften besitzt.*

Es ist leicht, Ordnungsstrukturen anzugeben, die nicht regulär sind. Sei F ein linearer Raum, f eine Linearform auf F . Die durch den Kegel $K = \{0\} \cup \{x \in E : f(x) > 0\}$ erzeugte Ordnungsstruktur erfüllt die Axiome 1^o bis 5^o (vgl. den 0. Abschnitt), ist aber nicht regulär. Denn ist \mathfrak{T} eine beliebige lokalkonvexe Topologie auf F , so enthält \bar{K} den linearen Raum $\{x : f(x) = 0\}$, ist also nicht echt.

Wir stellen einige Eigenschaften regulär halbgeordneter Räume zusammen.

(1.8) *Jeder regulär halbgeordnete lineare Raum ist fastarchimedisch. Ist F regulär halbgeordnet, so ist jeder lineare Teilraum $H \subset F$ (für die induzierte Ordnungsstruktur) regulär halbgeordnet. Ferner sind das Produkt $\prod_{\alpha} F_{\alpha}$ und die direkte Summe $\oplus_{\alpha} F_{\alpha}$ beliebig vieler regulär halbgeordneter Räume wieder regulär halbgeordnet.*

Beweis. Ist F regulär halbgeordnet, so ist nach (1.7) \bar{K} echt für die feinste lokalkonvexe Topologie \mathfrak{T}^u auf F . Gilt nun $-\xi y \leq x \leq \xi y$ für alle $\xi > 0$ (und ein $y \in K$), so ist wegen $\pm x = \lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi y \pm x) -x \in \bar{K}$ und $x \in \bar{K}$. Da \bar{K} echt ist, folgt $x = 0$.

Sind F bzw. F_{α} regulär halbgeordnet, so existieren nach (1.7) lokalkonvexe Topologien \mathfrak{T} bzw. \mathfrak{T}_{α} , für welche die positiven Kegel K bzw. K_{α} normal sind. Da nach (1.2) $H \cap K$ in $H[\mathfrak{T}]$, $\prod_{\alpha} K_{\alpha}$ bzw. $\oplus_{\alpha} K_{\alpha}$ in $\prod_{\alpha} F_{\alpha}[\mathfrak{T}_{\alpha}]$ bzw. $\oplus_{\alpha} F_{\alpha}[\mathfrak{T}_{\alpha}]$ normal sind, sind nach (1.7) auch H und $\prod_{\alpha} F_{\alpha}$ bzw. $\oplus_{\alpha} F_{\alpha}$ regulär halbgeordnet.

Wir bemerken noch, daß ein Quotientenraum eines regulär halbgeordneten Raumes (für die durch das kanonische Bild des positiven Kegels erzeugte Ordnungsstruktur) keineswegs regulär halbgeordnet zu sein braucht.

In einem Dualsystem $\langle F, G \rangle$ sind beide Räume für die durch K bzw. K' erzeugten Ordnungsstrukturen regulär halbgeordnet, wenn (und nur wenn) dies für einen der Räume gilt und der zugehörige Kegel total ist.

Wir betrachten zwei Anwendungen von (1.3), die die Tragweite des Satzes und den Charakter normaler Kegel illustrieren.

1. Es sei T ein lokalkompakter Raum, E der lineare Raum aller stetigen und reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf T . Ein Radonsches Maß auf T heißt jede stetige Linearform $\mu(f)$ auf $E[\mathfrak{T}]$, wenn E mit der feinsten lokalkonvexen Topologie \mathfrak{T} versehen wird, für welche die Einbettungen $E_C \rightarrow E$ stetig sind; hierbei ist E_C der Banachraum aller stetigen Funktionen auf T , deren Träger in der (festen) kompakten Menge C liegt, mit der Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf C . $E[\mathfrak{T}]$ ist also induktiver Limes der E_C (bezüglich des durch Inklusion gerichteten Systems aller kompakten Teilmengen $C \subset T$); folglich ist eine \mathfrak{T} -Nullumgebungsbasis in E durch die

absolutkonvexen Hüllen $U = \Gamma U_C$ gegeben, U_C beliebiges Element einer Nullumgebungsbasis in E_C .

Die Teilmenge $K = \{f \in E : f(t) \geq 0, t \in T\}$ bildet einen echten Kegel in E . Wir zeigen, daß K normal ist; hierzu ist nach (1.1), erstes Corollar hinreichend: Aus $f \in U$ und $0 \leq g \leq f$ folgt $g \in U$. Es sei also $0 \leq g \leq f \in U = \Gamma U_C$, d. h.

$$f = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu f_\nu \text{ mit } \sum |\xi_\nu| \leq 1 \text{ und } f_\nu \in U_{C_\nu}. \text{ Wenn wir } f_\nu \geq 0 \text{ und } \xi_\nu \geq 0 \text{ annehmen,}$$

so wird die Voraussetzung hiervon nicht berührt⁷⁾. Wir denken uns weiter die C_ν wachsend: $C_1 \subset \dots \subset C_n$. Wir definieren nun $\bar{g}_n = \inf \{\xi_n f_n, g\}$, $\bar{g}_{n-1} = \inf \{\xi_{n-1} f_{n-1}, g - \bar{g}_n\}$, \dots , $\bar{g}_1 = \inf \{\xi_1 f_1, g - \bar{g}_n - \dots - \bar{g}_2\}$. Wir erhalten

$$0 \leq \bar{g}_\nu \leq \xi_\nu f_\nu, (1 \leq \nu \leq n) \text{ und } g = \sum_{\nu=1}^n \bar{g}_\nu \text{ auf } C_n. \text{ Da der Träger von } g \text{ in } C_n$$

liegt, gilt die letzte Beziehung überall auf T . Daher liegt g in $U = \Gamma U_C$, w.z.b.w. Aus (1.3) folgt nun (BOURBAKI [9], p. 54 th. 2):

Jedes Radonsche Maß auf einem lokalkompakten Raum ist Differenz zweier positiver Maße.

Nach Definition des induktiven Limes ist eine Linearform auf $E[\mathfrak{E}]$ dann und nur dann stetig, wenn ihre Einschränkungen auf alle E_C stetig sind. Aus dem Corollar zu (2.8) folgt, wenn wir — um das Beispiel nicht wiederholen zu müssen — vorausgreifen, daß jede auf E positive Linearform stetig ist. Daher (BOURBAKI [9], p. 54 th. 1):

Jede positive Linearform auf $E[\mathfrak{E}]$ ist ein (positives) Radonsches Maß.

2. Wir betrachten den Raum \mathcal{D} beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n (in der Schwartzschen Topologie, vgl. L. SCHWARTZ [22]). \mathcal{D}' ist der Raum der Distributionen. $K = \{f \in \mathcal{D} : f \geq 0\}$ ist ein echter, abgeschlossener Kegel in \mathcal{D} . Die positiven stetigen Linearformen auf \mathcal{D} sind die positiven Maße auf \mathbb{R}^n . Aber nicht jede Distribution ist ein Maß, also auch nicht Differenz zweier positiver Linearformen. Daher folgt aus (1.3): *Der positive Kegel K in \mathcal{D} ist nicht normal.*

Man kann dies auch direkt einsehen. Seien C_r bzw. $C_{r+2\varepsilon}$ die abgeschlossenen Kugeln um den Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ mit den Radien r bzw. $r + 2\varepsilon$. Ferner sei $\varphi_n \geq 0$ eine Folge aus \mathcal{D}_{C_r} mit $\sup \varphi_n = \lambda_n \rightarrow 0$, aber keine Nullfolge für die Topologie von \mathcal{D} . $f_n(t)$ bezeichne die Funktion, die $= \lambda_n$ auf $C_{r+\varepsilon}$, sonst aber 0 ist,

$$\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x - \xi) f_n(\xi) d\xi = \varrho_\varepsilon * f_n$$

die Regularisierte von f_n (L. SCHWARTZ, l. c. p. 22). Offenbar ist $\psi_n \in \mathcal{D}$ und $\psi_n \rightarrow 0$ für die Topologie von \mathcal{D} , ferner $\varphi_n \leq \psi_n$ überall. Aus $0 \leq \varphi_n \leq \psi_n \rightarrow 0$ ergibt sich nach dem dritten Corollar von (1.1), daß der positive Kegel K in \mathcal{D} nicht normal ist.

⁷⁾ Denn sind die U_C Kugeln in E_C , so können wir $\xi_\nu f_\nu = |\xi_\nu| \varepsilon_\nu f_\nu (\varepsilon_\nu = \pm 1)$ setzen und $\varepsilon_\nu f_\nu = g_\nu - h_\nu$ schreiben; $g_\nu = \sup(\varepsilon_\nu f_\nu, 0)$, $h_\nu = \sup(-\varepsilon_\nu f_\nu, 0)$. Dann ist $\|g_\nu\| \leq \|f_\nu\|$, $\|h_\nu\| \leq \|f_\nu\|$ und $0 \leq g \leq \sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu| g_\nu \in \Gamma U_C$.

2. Beschränkte Zerlegbarkeit halbgeordneter Räume

Wir führen im folgenden eine Eigenschaft konvexer Kegel ein, die ein Spezialfall der in der Definition der \mathfrak{S} -Kegel gegebenen ist und in halbgeordneten normierten Räumen mit einem von BONSALL [4], p. 146 stammenden Begriff zusammenfällt.

Definition 2'. Sei $E[\mathfrak{T}]$ ein lokalkonvexer Raum, K ein Kegel in E . K heiße ein BZ-Kegel (bzw. strikter BZ-Kegel) in E , wenn K ein \mathfrak{S} -Kegel (bzw. strikter \mathfrak{S} -Kegel) für die Klasse \mathfrak{S} aller beschränkten Teilmengen von E ist⁸⁾.

Aus (1.4) folgt unmittelbar

(2.1) Damit K ein BZ-Kegel (bzw. strikter BZ-Kegel) in $E[\mathfrak{T}]$ sei, ist notwendig und hinreichend: Es gibt ein Fundamentalsystem $\{B_\alpha\}$ beschränkter Mengen; so daß die absolutkonvexen abgeschlossenen Hüllen $\overline{\Gamma(B_\alpha \cap K)}$ (bzw. die absolutkonvexen Hüllen $\Gamma(B_\alpha \cap K)$) ebenfalls ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen bilden.

Corollar. Ist K strikter BZ-Kegel in E , so gilt $E = K - K$ ⁹⁾.

(2.2) Ist K ein BZ-Kegel in E , so ist K' normal für die starke Topologie $\beta(E', E)$. Ist umgekehrt K \mathfrak{T} -normal und $E[\mathfrak{T}]$ tonneliert, so ist K' BZ-Kegel in E' .

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar, wenn man (1.5) auf das Dualsystem $\langle E, E' \rangle$ anwendet; die zweite ebenfalls, weil \mathfrak{T} die starke Topologie $\beta(E, E')$, diese also für das Dualsystem $\langle E, E' \rangle$ zulässig ist.

Ist $\langle F, G \rangle$ ein Dualsystem, K ein Kegel in F , so bezeichnen wir mit \mathfrak{T}_K die Topologie (auf G) der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Teilmengen von K . $G[\mathfrak{T}_K]$ ist dann und nur dann separiert, wenn K total ist. Damit erhalten wir folgende duale Charakterisierung der BZ-Kegel:

(2.3) Sei $E[\mathfrak{T}]$ lokalkonvex. Auf E' gilt $\mathfrak{T}_K = \beta(E', E)$ genau dann, wenn K ein BZ-Kegel ist in E .

Beweis. Die Topologie \mathfrak{T}_K ist zugleich die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den absolutkonvexen abgeschlossenen Hüllen $C_\alpha = \overline{\Gamma(K \cap B_\alpha)}$, $\{B_\alpha\}$ ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen in E . Da aber die C_α wieder ein solches System bilden, falls K ein BZ-Kegel ist, gilt $\mathfrak{T}_K = \beta(E', E)$. Umgekehrt ist in diesem Falle C_α ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen.

(2.4) Sei $E[\mathfrak{T}]$ tonneliert. Auf E gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{K'}$, genau wenn K' BZ-Kegel ist. Nach den vorangehenden Überlegungen können wir den Beweis dem Leser überlassen.

Wir haben in (1.3) ein Kriterium erhalten, wann für einen halbgeordneten lokalkonvexen Raum E die Relation $E' = K' - K'$ gilt. Umgekehrt könnte von einem abgeschlossenen BZ-Kegel erwartet werden, daß stets $E = K - K$ gilt. Jedoch ist dies nicht für beliebige Räume richtig.

(2.5) Sei E der Dual eines tonnelierten Raumes; K ein schwach abgeschlossener BZ-Kegel in E . K ist strikter BZ-Kegel in E , daher $E = K - K$.

⁸⁾ Wir sagen auch, E besitze bezüglich K die beschränkte Zerlegungseigenschaft (bzw. strikte BZ-Eigenschaft).

⁹⁾ Dies gilt allgemeiner für jeden strikten \mathfrak{S} -Kegel.

Beweis. Sei $\{B_\alpha\}$ ein geeignetes Fundamentalsystem abgeschlossener beschränkter Mengen in E , $\{U_\beta\}$ eine Nullumgebungsbasis. Nach Voraussetzung ist $C_\alpha = I'(B_\alpha \cap K)$ wieder ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen. Sei $z_0 \in E$ beliebig. Es gibt ein $C_{\alpha_0} \ni z_0$ und in jeder $U_\beta(z_0)$ ein Element $x_\beta - y_\beta$ mit $x_\beta, y_\beta \in B_{\alpha_0} \cap K$. Für das gerichtete System $z_\beta = x_\beta - y_\beta$ gilt $z_\beta \rightarrow z_0$. Aus der Beschränktheit und der schwachen Kompaktheit von B_{α_0} folgt, daß $\{x_\beta\}$ einen Berührungspunkt x_0 besitzt. Da K abgeschlossen ist, ist $x_0 \in K$. Für ein zu $\{\beta\}$ konfinales Teilsystem $\{\beta'\}$ gilt daher $x_{\beta'} \rightarrow x_0$, folglich $y_{\beta'} \rightarrow y_0 = x_0 - z_0$. Daher ist $z_0 = x_0 - y_0$, $x_0 \in B_{\alpha_0} \cap K$, $y_0 \in B_{\alpha_0} \cap K$. Folglich ist $C_\alpha \subset (B_\alpha \cap K) - (B_\alpha \cap K)$, also K strikter BZ-Kegel und nach (2.1) Corollar $E = K - K$.

Corollar. *Jeder abgeschlossene BZ-Kegel in einem halbreflexiven Raum E ist strikter BZ-Kegel.*

Denn der Dual eines halbreflexiven Raumes ist tonneliert für die starke Topologie.

(2.6) *Ist $E = K - K$ ein Banachraum, so ist K BZ-Kegel in E .*

Beweis. Das System $\{S_n\}$ der Kugeln um $0 \in E$ mit dem Radius $n = 1, 2, \dots$ ist ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen in E . Mit $C_n = I'(S_n \cap K)$ ist $C_n = n C_1$ und wegen $E = K - K$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = E$, also besitzt C_1 0 als inneren Punkt. Daher ist $\{C_n\}$ wieder Fundamentalsystem beschränkter Mengen in E , also K BZ-Kegel.

Wir bemerken noch, daß diese Schlußweise nicht auf allgemeinere Räume übertragbar ist. Denn sie stützt sich wesentlich darauf, daß E ein Bairescher Raum mit abzählbarem Fundamentalsystem beschränkter Mengen ist. Hieraus folgt sofort, daß in E eine beschränkte (konvexe) Nullumgebung existiert, also E nach einem Satz von KOLMOGOROFF normierbar ist.

Wir erhalten aus den bisherigen Resultaten das Äquivalenztheorem

(2.7) *Sei E ein reflexiver Raum, K ein abgeschlossener Kegel in E . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

- 1° K ist BZ-Kegel in E .
- 2° K ist strikter BZ-Kegel in E .
- 3° K' ist normal für $\beta(E', E)$.
- 4° $\mathfrak{K} = \beta(E', E)$.

Beweis. 1° und 2° sind äquivalent nach (2.5), Corollar. 1° und 3° folgen auseinander nach (2.2), 1° und 4° sind gleichwertig nach (2.3).

Corollar. *In reflexiven Räumen entsprechen normale und BZ-Kegel einander dual.*

Corollar. *In reflexiven B -Räumen sind 1° bis 4° äquivalent zu $E = K - K$.*

Ist $E[\mathfrak{K}]$ ein beliebiger lokalkonvexer Raum, K ein echter Kegel in E , so ist jede auf K positive Linearform stetig, sobald K einen inneren Punkt besitzt (BOURBAKI [7], p. 75). Wir bemerken, daß jeder innere Punkt von K eine Ordnungseinheit für die durch K erzeugte Halbordnung ist. Wir geben folgendes, in manchen Fällen weiterreichende Kriterium für die Stetigkeit positiver Linearformen:

(2.8) Es sei E ein folgenvollständiger bornologischer Raum, K ein abgeschlossener strikter BZ-Kegel in E . Jede auf K positive Linearform ist stetig.

Beweis. Wäre $f \geq 0$ auf K und f nicht stetig, so gäbe es wegen der strikten BZ-Eigenschaft von K eine beschränkte Teilmenge von K , auf der f nicht beschränkt wäre. Es gäbe also auch eine beschränkte Folge $\{x_n\} \subset K$, für die $f(x_n) > n$ gälte. Wir setzen $z_n = \sum_{\nu=1}^n 1/\nu^2 x_\nu$. $\{z_n\}$ ist Cauchyfolge in E , daher konvergent und wegen der Abgeschlossenheit von K ist $x = \lim z_n \in K$. Nun hätte man $0 \leq z_n \leq x$ für alle n , daher $f(z_n) \leq f(x)$, andererseits aber $f(z_n) = \sum_{\nu=1}^n 1/\nu^2 f(x_\nu) > \sum_{\nu=1}^n 1/\nu$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt.

Corollar. Sei $E = \varinjlim E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ induktiver Limes von B -Räumen, K ein Kegel in E , so daß $K_\alpha = K \cap E_\alpha$ abgeschlossener strikter BZ-Kegel in jedem $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ ist. Dann ist jede auf K positive Linearform stetig auf E .

Dies ergibt sich sofort daraus, daß die Einschränkung jeder positiven Linearform auf E_α nach (2.8) für \mathfrak{T}_α stetig ist.

Wir betrachten einige Beispiele.

1. Die aus gewissen Klassen von Abbildungen des \mathbb{R}^n (bzw. der Menge N natürlicher Zahlen) in die Menge der reellen Zahlen gebildeten klassischen Banachräume

a) L^p (bzw. l^p) aller zur p -ten Potenz, $1 < p < \infty$, absolut summierbaren Funktionen (Folgen),

b) L^1 (bzw. l^1) aller zur ersten Potenz absolut summierbaren Funktionen (Folgen),

c) C (bzw. c) aller beschränkten, stetigen Funktionen (konvergenten Folgen),

d) C_0 (bzw. c_0) aller auf einer festen Menge verschwindenden, stetigen beschränkten Funktionen (gegen 0 konvergenten Folgen),

e) M (bzw. m) aller meßbaren beschränkten Funktionen (beschränkten Folgen)

besitzen sämtlich einen positiven Kegel K (nämlich die Abbildungen mit nichtnegativen Werten), der eine natürliche Halbordnung erzeugt. Wir bemerken: In jedem der Räume a) bis e) ist K ein abgeschlossener, normaler, strikter BZ-Kegel. Die Normalität von K folgt sofort aus der Monotonie der Norm auf K . Die starke BZ-Eigenschaft verifiziert man unmittelbar. Nur in den Räumen c) und e) besitzt K innere Punkte. Aus (2.8) folgt:

Jede auf einem der Räume a) bis e) positive Linearform ist stetig.

Hieraus folgt insbesondere, daß für den algebraisch dualen Raum E^* nicht $E^* = K^* - K^*$ gilt. Aus (1.3) ergibt sich $E' = K' - K'$ für jeden der obigen Räume; nach (2.6) ist also K' jedesmal BZ-Kegel in E' . Daher hat man nach (2.4):

Auf jedem der Räume a) bis e) ist die Normtopologie gleich der Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von K' .

Bildet man in E'' die $\sigma(E'', E')$ -abgeschlossene Hülle K'' von K , so folgt aus (2.2) und (1.3) wieder $E'' = K'' - K''$. In ähnlicher Weise erschließt man

für den n -fach dualen Raum $E^{(n)} = K^{(n)} - K^{(n)}$, falls E einer der Räume b) bis e) ist. Bekanntlich sind für diese Räume die $E^{(n)}$ alle voneinander verschieden.

2. Wir haben im Beispiel 2, Abschnitt 1 gesehen, daß im Schwartzschen Raum \mathcal{D} der positive Kegel K nicht normal ist. Mit der Methode der Regularisierten zeigt man ohne Mühe, daß K ein abgeschlossener strikter BZ-Kegel ist in \mathcal{D} . Also nach (2.8):

Jede auf $K \subset \mathcal{D}$ positive Linearform ist ein Maß.

Da $K \subset \mathcal{D}$ BZ-Kegel ist, folgt aus (2.2) oder wegen der Reflexivität von \mathcal{D} aus (2.7):

Der Kegel K' der positiven Masse ist normal in \mathcal{D}' .

3. Normale und BZ-Kegel in Rieszschen Räumen

Es sei E ein halbgeordneter linearer Raum. E heißt Rieszscher Raum (BOURBAKI [9], p. 17), wenn zu je zwei Elementen $x, y \in E$ eine obere, $\sup(x, y)$, und eine untere, $\inf(x, y)$, Grenze existiert. Man überzeugt sich leicht, daß es genügt, $E = K - K$ und die Existenz der oberen (oder unteren) Grenze in K vorauszusetzen. Für beliebiges $x \in E$ setzt man $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$ und $|x| = x^+ + x^-$. Man findet auch leicht $x = x^+ - x^-$.

Ein Rieszscher Raum heißt beschränkt (ordnungs-)vollständig, wenn zu jeder majorisierten Menge, d. h. jeder Menge H mit $x \leq a$ für ein a und alle $x \in H$, die obere Grenze $\sup H$ existiert.

Die Klasse der Rieszschen Räume (oder Vektorverbände) ist wesentlich enger als die der halbgeordneten Räume. So ist ein linearer Teilraum eines Rieszschen Raumes, selbst wenn er noch nichttrivial halbgeordnet ist, im allgemeinen kein Rieszscher Raum mehr. Wir studieren in diesem Abschnitt den Zusammenhang der bisher aufgestellten Begriffe und Resultate mit Rieszschen Räumen. Dazu führen wir zunächst eine Definition ein, die auch im nächsten Abschnitt eine Rolle spielen wird.

Definition 4. *Eine Linearform f auf einem halbgeordneten linearen Raum E mit positivem Kegel K heiße ordnungsbeschränkt, wenn f auf jeder Menge der Gestalt*

$$M_x = \{y \in E : -x \leq y \leq x, x \in K\}$$

beschränkt ist.

Nach BOURBAKI [9], p. 34 heißt eine Linearform f auf einem Rieszschen Raum E relativ beschränkt, wenn f auf jeder Menge der Gestalt

$$N_x = \{y \in E : 0 \leq |y| \leq x\}$$

beschränkt ist.

(3.1) *Ist E ein Rieszscher Raum, so ist jede ordnungsbeschränkte Linearform auf E relativ beschränkt und umgekehrt.*

Beweis. Ist $|y| = y^+ + y^- \leq x$, so ist $-x \leq y^+ - y^- \leq x$, d. h. $-x \leq y \leq x$, daher $N_x \subset M_x$, also jede ordnungsbeschränkte Menge relativ beschränkt. Andererseits folgt aus $-x \leq y \leq x$ wegen $x \in K$ $y^+ \leq x, y^- \leq x$, also $|y| = y^+ + y^- \leq 2x$, d. h. $M_x \subset N_{2x}$. Daher ist jede relativ beschränkte Menge auch ordnungsbeschränkt, w. z. b. w.

(3.2) Sei $E[\mathfrak{E}]$ Rieszscher Raum mit positivem Kegel K und K normal in $E[\mathfrak{E}]$. Jede stetige Linearform auf E ist relativ beschränkt.

Beweis. Nach (3.1) genügt es zu zeigen, daß jede stetige Linearform ordnungsbeschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein stetiges f mit $|f(y_n)| \rightarrow +\infty$ bei $-x \leq y_n \leq x$. Dann müßte aber etwa $|f(y_n^+)| \rightarrow \infty$ gelten und wegen der Stetigkeit von f könnte $\{y_n^+\}$ nicht topologisch beschränkt sein. Dies widerspricht aber wegen $y_n^+ \leq x \in K$ nach dem zweiten Corollar von (1.1) der vorausgesetzten Normalität von K .

Umgekehrt gilt

(3.3) Sei $E[\mathfrak{E}]$ ein Rieszscher und folgenvollständiger bornologischer Raum, K ein abgeschlossener strikter BZ-Kegel in E . Dann ist jede auf E relativ beschränkte Linearform stetig.

Aus (2.8) folgt die Stetigkeit jeder positiven Linearform auf E . Nach BOURBAKI [9], p. 35, th. 1 ist aber jede relativ beschränkte Linearform Differenz zweier positiver Linearformen.

Wie (3.2) und (3.3) vermuten lassen, ist die Klasse der relativ beschränkten (oder nach (3.1) ordnungsbeschränkten) Linearformen auf einem Rieszschen topologischen Raum im allgemeinen wesentlich umfassender als die der stetigen. Dies rührt daher, daß die Ordnungsbeschränktheit mit der Stetigkeit nur für eine genügend feine Topologie zusammenfällt. Diese „Ordnungstopologie“, die wir im nächsten Abschnitt betrachten, ist übrigens feiner als jede lokal-konvexe Topologie, für die der Ordnungskegel K normal ist [vgl. (4.4) bis (4.6)]. Für Banachräume erhalten wir

(3.4) Sei $E[\mathfrak{E}]$ ein Rieszscher und Banachscher Raum, K ein abgeschlossener strikter BZ-Kegel in E . Dann sind die Klassen der stetigen und relativ beschränkten Linearformen identisch; insbesondere ist E' beschränkt ordnungsvollständig.

Beweis. Aus (3.3) folgt, daß jede relativ beschränkte Linearform auf E stetig ist. Wenn wir zeigen, daß K normal ist, so folgt aus (3.2) auch die Umkehrung; die letzte Behauptung ergibt sich dann aus BOURBAKI [9], p. 35, th. 1.

Da jede relativ beschränkte Linearform stetig ist, gilt $E' = K' - K'$. Nach (2.6) ist K' BZ-Kegel in E' . Also ist $K'' \subset E''$ nach (2.2) normal, woraus sich die Normalität von K mit Hilfe von (1.2) sofort ergibt.

Corollar. Ist E ein Rieszscher und reflexiver Banachscher Raum mit abgeschlossenem Kegel K , so gilt die Aussage von (3.4).

Denn es ist $E = K - K$, also K nach (2.6) BZ-Kegel und nach (2.5), Corollar strikter BZ-Kegel.

Beispiele sind: Zu (3.2) der Raum \mathcal{D}' der Distributionen, der Raum $\mathcal{K}(T)$ stetiger Funktionen mit kompaktem Träger (Abschnitt 1); zu (3.3) der Raum $\mathcal{K}(T)$; zu (3.4) die Räume a) bis e) der Beispiele in Abschnitt 2.

4. Erzeugung lokalkonvexer Topologien durch Ordnungsstrukturen

Wir haben bisher den Zusammenhang zwischen Ordnungsstrukturen, oder den durch sie eineindeutig bestimmten positiven Kegeln, und gegebenen lokal-konvexen Topologien auf einem linearen Raum E untersucht. Man kann

umgekehrt fragen, ob eine gegebene Ordnungsstruktur stets in natürlicher Weise eine lokalkonvexe Topologie erzeugt. Diese Frage läßt sich positiv beantworten. Die Antwort kann man leicht finden, wenn der halbgeordnete lineare Raum E eine Ordnungseinheit besitzt. Das Beispiel des Raumes \mathbf{R} der reellen Zahlen, oder allgemeiner des \mathbf{R}^n , in natürlicher Ordnung gehört zu diesem Fall; hier wird die Topologie offenbar durch die Mengen

$$\{x \in \mathbf{R}^n : -\lambda a \leq x \leq \lambda a\}$$

erzeugt, die eine Nullumgebungsbasis bilden, wenn λ alle positiven Zahlen (oder auch nur eine Nullfolge) durchläuft. a kann dabei eine beliebige Ordnungseinheit, d. h. ein Vektor mit durchweg positiven Koordinaten, sein. Die zugehörige uniforme Struktur ist durch die Forderung der Translationsinvarianz eindeutig bestimmt. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit dem Fall, daß E eine Ordnungseinheit besitzt.

(4.1) Sei E ein fastarchimedisch halbgeordneter linearer Raum mit Ordnungseinheit a . Die durch

$$p(x) = \inf\{\lambda : -\lambda a \leq x \leq \lambda a\}$$

definierte Normtopologie ist die feinste auf E erklärare lokalkonvexe Topologie, für die der positive Kegel K normal ist.

Beweis. Zunächst ist $p(x) \geq 0$ und aus $p(x) = 0$ folgt $x = 0$, da E fastarchimedisch ist. Man bestätigt unmittelbar $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, ebenso $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$; daher ist p eine Norm auf E . Weiter ist für $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$p(x + y) = \inf\{\lambda : x + y \leq \lambda a\} \geq \inf\{\lambda : x \leq \lambda a\} = p(x),$$

also nach (1.1) K normal. Es sei \mathfrak{T} eine Topologie auf E , für welche K normal ist. Dann folgt aus $p(x_n) \rightarrow 0$ aber $x_n \rightarrow 0$ für \mathfrak{T} , denn es gilt $x_n = \frac{1}{2}(\lambda_n a + x_n) - \frac{1}{2}(\lambda_n a_n - x_n) = x_n^1 - x_n^2$ und x_n^1, x_n^2 sind $\in K$. Da $p(x_n) \rightarrow 0$ $\lambda_n \rightarrow 0$ bedeutet, folgt $p(x_n^i) \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$). Wäre nun $\{x_n\}$ nicht Nullfolge für \mathfrak{T} , so gälte das gleiche von x_n^i für wenigstens ein i . Ist nun q eine beliebige \mathfrak{T} -stetige Halbnorm mit $q(x + y) \geq q(x)$ für $x, y \in K$, so würde aus $q(x_n^i) > \varepsilon$ folgen $q(\lambda_n a) > \varepsilon$ für $\lambda_n \rightarrow 0$. Aber es ist offenbar $\lambda_n a \rightarrow 0$ für \mathfrak{T} . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist a' eine weitere Ordnungseinheit von E , so sind die von a bzw. a' erzeugten Topologien \mathfrak{T}_a bzw. $\mathfrak{T}_{a'}$ identisch. Denn es gibt dann zwei Zahlen $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$, so daß $a' \leq \lambda a$ und $a \leq \lambda' a'$ gilt. Daraus folgt unmittelbar für die zugehörigen Normen p bzw. p' :

$$p'(x) \leq \lambda' p(x) \leq \lambda \lambda' p'(x),$$

d. h. die beiden Normen auf E sind äquivalent. Wir bemerken noch: Jede Ordnungseinheit von E ist innerer Punkt von K für die Topologie \mathfrak{T}_a .

Für die Übereinstimmung der Ordnungstopologie \mathfrak{T}_a mit einer gegebenen \mathfrak{T} ist jedenfalls notwendig, daß E für \mathfrak{T} normierbar ist. Für Banachräume gilt

(4.2) Sei $E[\mathfrak{T}]$ ein halbgeordneter B -Raum mit Ordnungseinheit. Damit \mathfrak{T} gleich der Ordnungstopologie sei, ist die Normalität des positiven Kegels notwendig und hinreichend.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort aus (4.1). Ist umgekehrt K normal für \mathfrak{Q} , so ist \mathfrak{Q} gröber als die Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_a nach (4.1). Die identische Abbildung I von $E[\mathfrak{Q}_a]$ in $E[\mathfrak{Q}]$ ist offenbar stetig. Ihre Erweiterung \tilde{I} auf die vollständige Hülle $\tilde{E}[\tilde{\mathfrak{Q}}_a]$ ist nach einem Satz von BANACH ein Homomorphismus. Daher besitzt der Nullraum $N(\tilde{I})$ ein topologisches Komplement F , $\tilde{E}[\tilde{\mathfrak{Q}}_a] = N(\tilde{I}) \oplus F$ und es ist $F = E$; da aber E dicht ist in \tilde{E} , folgt $E = \tilde{E}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_a$, w.z.b.w.

Um den allgemeinen Fall, in dem keine Ordnungseinheit existiert, behandeln zu können, stellen wir zunächst einen Hilfsbegriff auf. Wir bezeichnen mit K wieder den positiven Kegel eines halbgeordneten linearen Raumes E .

Definition 5. Sei $a \in E$, $b \in K$. Wir sagen, b umfaßt a , wenn ein $\lambda > 0$ existiert mit $a \leq \lambda b$. $H \subset K$ erschöpft eine Menge $M \subset E$, wenn jedes Element aus M von wenigstens einem Element aus H umfaßt wird. H heißt minimal wohlgeordnet, wenn kein Element aus H ein späteres umfaßt.

Hiernach ist a eine Ordnungseinheit, wenn a alle Elemente von E umfaßt. Zwei Ordnungseinheiten umfassen sich stets gegenseitig. Darüber hinaus gilt:

(4.3) *Besitzt der halbgeordnete lineare Raum E keine Ordnungseinheit, so ist der Ordnungstypus jeder minimal wohlgeordneten, E erschöpfenden Menge H eine Limeszahl.*

Beweis. H sei minimal wohlgeordnet und erschöpfe E . Sei b letztes Element von H . Streicht man aus H noch alle Elemente $a \neq b$, die von b umfaßt werden, so erschöpft die entstehende Menge H_0 offenbar wieder E . Wir behaupten, daß $H_0 = \{b\}$, also b Ordnungseinheit in E ist. Andernfalls gäbe es ein $a \in H_0$, das von b nicht umfaßt wird. Nun wird aber $a + b \in K$ von einem $c \in H_0$ umfaßt, das verschieden von b ist und daher in H_0 vor b steht, was der minimalen Wohlordnung von H widerspricht.

Es ist klar, daß jede Menge $H \subset K$ ihrerseits eine minimal wohlgeordnete Teilmenge H' enthält. Wir erhalten nun für beliebige regulär halbgeordnete Räume in Verallgemeinerung von (4.1) den Satz:

(4.4) *Sei E ein linearer regulär halbgeordneter Raum. Jede den positiven Kegel K in E erschöpfende Menge $H \subset K$ erzeugt auf E eine (von der Wahl von H unabhängige) Topologie \mathfrak{Q}_0 , bezüglich deren E induktiver Limes normierter Räume, also bornologisch ist. Diese Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_0 ist feiner als jede lokalkonvexe Topologie, für welche K normal ist¹⁰⁾.*

Vor dem Beweis notieren wir noch das

Corollar. *Besitzt E eine Ordnungseinheit, so fällt \mathfrak{Q}_0 mit der in (4.1) definierten Normtopologie zusammen.*

Beweis. Wir denken uns die Menge H indiziert, etwa $H = \{\alpha_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Die Indexmenge A ist durch die Relation „ a_β umfaßt a_α “ gerichtet, wir schreiben $\alpha < \beta$. Denn sind α, β gegeben, so gibt es nach Definition von H ein $a_\gamma \in H$, das $a_\alpha + a_\beta \in K$, speziell also a_α und a_β umfaßt: $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$.

¹⁰⁾ Die Sätze (4.4) bis (4.6) bleiben für beliebige halbgeordnete Räume gültig, wenn man auf die Separiertheit der Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_0 verzichtet.

Wir nennen M_α die Menge $\{x \in E : -a_\alpha \leq x \leq a_\alpha\}$, L_α den von M_α aufgespannten linearen Teilraum von E . M_α ist absolutkonvex, es gilt $L_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_\alpha$.

Ferner versehen wir L_α mit der Normtopologie \mathfrak{T}_α aus (4.1)¹¹⁾. Man hat dann für die L_α : Es gilt $L_\alpha \subset L_\beta$ genau wenn $\alpha < \beta$, denn es ist dann wegen $a_\alpha \leq \lambda a_\beta$ ($\lambda > 0$) $M_\alpha \subset \lambda M_\beta$; daher ist auch \mathfrak{T}_α feiner als die von L_β auf L_α induzierte Topologie. Mit anderen Worten: Die Einbettungen I_α^β von L_α in L_β (für $\alpha < \beta$) sind sämtlich stetig. Ferner gilt, da $H \cap K$ erschöpft, $K - K = \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha$.

Bezeichnen wir mit \mathfrak{T}_0 die feinste lokalkonvexe Topologie, für welche die Einbettungen I_α von L_α in E sämtlich stetig sind, so ist E in dieser Hülltopologie nach dem eben Gezeigten induktiver Limes der $L_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$: $E[\mathfrak{T}_0] = \varinjlim L_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$. Wir haben noch zu zeigen, daß \mathfrak{T}_0 feiner ist als jede (lokalkonvexe) Topologie, für die K normal ist. Ist \mathfrak{T} eine solche Topologie, so ist nach (1.2) $K_\alpha = K \cap L_\alpha$ auch für die von \mathfrak{T} auf L_α induzierte Topologie normal, also nach (4.1) gröber als \mathfrak{T}_α . Daher sind die Einbettungen I_α stetig für \mathfrak{T} , folglich \mathfrak{T}_0 feiner als \mathfrak{T} .

Um die Separiertheit von \mathfrak{T}_0 zu beweisen, genügt es nach der vorangehenden Bemerkung, eine separierte lokalkonvexe Topologie auf E anzugeben, für die K normal ist. Aber da E regulär halbgeordnet ist, existiert nach (1.7) eine solche Topologie, z. B. $\sigma(E, K^* - K^*)$.

Wir haben noch zu zeigen, daß \mathfrak{T}_0 von der speziellen Wahl der Menge H unabhängig ist. Dazu genügt es zu wissen, daß zwei K erschöpfende Mengen H bezüglich der (auf der Vereinigung beider Indexmengen erklärten) Relation $\alpha < \beta$ stets konfinal sind. Denn der induktive Limes der L_α ist unempfindlich gegen den Übergang zu konfinalen Teilsystemen $L_{\alpha'}$.

Beweis des Corollars. Besitzt E eine Ordnungseinheit a , so enthält auch H eine Ordnungseinheit a_α . Es ist dann $E = L_\alpha$, und die Topologie \mathfrak{T}_α ist offenbar gleich \mathfrak{T}_0 . Da dies für jedes H gilt und die Topologie auf E nicht von der Wahl der Ordnungseinheit abhängt, ist die Behauptung bewiesen.

(4.5) Jeder halbgeordnete lineare Raum E ist für die Ordnungstopologie \mathfrak{T}_0 tonneliert.

Da $E = \varinjlim L_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ ist, genügt es zu beweisen, daß L_α für \mathfrak{T}_α tonneliert ist. Wir haben zu zeigen, daß B^0 eine \mathfrak{T}_α -Nullumgebung in L_α ist, B eine beliebige schwachbeschränkte Menge in L'_α . Wir haben also $|\langle x, x' \rangle| \leq M_x$ für alle $x' \in B$. Da L'_α folgenvollständig ist, ist B auch stark beschränkt, d. h. es gilt $\sup_{x' \in B} \|x'\| < C$. Nun ist (K_α ist normal in L_α) nach (1.3) $L'_\alpha = K'_\alpha - K'_\alpha$,

also nach (2.6) K'_α BZ-Kegel in L'_α . Daher gibt es für alle $x' \in B$ eine Zerlegung $x' = x'_1 - x'_2$ mit $x'_1, x'_2 \in K'_\alpha$ und $\|x'_1\|, \|x'_2\| < C_1$. Ist $a_\alpha \in K_\alpha$ eine Ordnungseinheit in L_α , so gilt für die Elemente der \mathfrak{T}_α -Nullumgebung M_α und $x' \in B$

$$|\langle x, x' \rangle| = |\langle x, x'_1 \rangle - \langle x, x'_2 \rangle| \leq \langle a_\alpha, x'_1 \rangle + \langle a_\alpha, x'_2 \rangle \leq 2 C_1 \|a_\alpha\| = \mu^{-1}.$$

Hieraus folgt $\mu M_\alpha \subset B^0$, d. h. B^0 ist \mathfrak{T}_α -Nullumgebung, w. z. b. w.

Für den zu $E[\mathfrak{T}_0]$ dualen Raum gilt

¹¹⁾ Da E regulär halbgeordnet ist, ist nach (1.8) ¹¹⁾ die Ordnungsstruktur fastarchimedisch.

(4.6) Jede \mathfrak{Q}_0 -stetige Linearform ist ordnungsbeschränkt und umgekehrt.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß eine Linearform auf E dann und nur dann \mathfrak{Q}_0 -stetig ist, wenn ihre Einschränkung auf $L_\alpha \mathfrak{Q}_\alpha$ -stetig ist; die auf allen $L_\alpha \mathfrak{Q}_\alpha$ -stetigen Linearformen sind aber genau die ordnungsbeschränkten.

Damit ergibt sich folgende duale Charakterisierung der Ordnungstopologie:

(4.7) Die Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_0 auf einem regulär halbgeordneten linearen Raum E ist die feinste lokalkonvexe Topologie, für die der duale Raum E' aus allen ordnungsbeschränkten Linearformen besteht.

Beweis. Nach (4.6) ist der zu $E[\mathfrak{Q}_0]$ duale Raum E' der Raum aller ordnungsbeschränkten Linearformen. Da $E[\mathfrak{Q}_0]$ nach (4.4) separiert und nach (4.5) tonneliert ist, stimmt \mathfrak{Q}_0 mit der Mackeyschen Topologie $\tau(E, E')$ überein.

Wir nennen eine Halbnorm p auf einem halbgeordneten linearen Raum E monoton, wenn sie auf dem positiven Kegel K in E monoton ist.

(4.8) Damit auf dem halbgeordneten linearen Raum E eine feinste (separierte) lokalkonvexe Topologie \mathfrak{Q}_N existiert, für die K normal ist, ist notwendig und hinreichend, daß E regulär halbgeordnet ist. \mathfrak{Q}_N wird dann von der Gesamtheit aller auf E monotonen Halbnormen erzeugt.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist nach (1.7) unmittelbar klar. Ist umgekehrt E regulär halbgeordnet, so ist nach (1.1) und (1.7) die Menge aller monotonen Halbnormen nicht leer (denn es existiert eine separierte Topologie \mathfrak{Q} auf E , für die K normal ist), und die von diesen Halbnormen erzeugte Topologie \mathfrak{Q}_N ist separiert, da sie feiner als \mathfrak{Q} ist, und offenbar die feinste lokalkonvexe Topologie, für die K normal ist.

Nach (4.4) ist auf einem regulär halbgeordneten linearen Raum \mathfrak{Q}_N gröber als die Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_0 . Für die Übereinstimmung beider Topologien ist offenbar notwendig und hinreichend, daß der positive Kegel K normal ist für \mathfrak{Q}_0 . Es ist eine offene Frage, ob dies in jedem regulär halbgeordneten Raum zutrifft. Wir geben ein hinreichendes Kriterium mit Hilfe der Eigenschaft

(Z) Aus $0 \leq y \leq x_1 + x_2$; $x_1, x_2 \in K$ folgt $y = y_1 + y_2$ mit $y_1, y_2 \in K$, $y_1 \leq x_1$, $y_2 \leq x_2$.

(4.9) Besitzt der regulär halbgeordnete lineare Raum E die Eigenschaft (Z), so ist der positive Kegel K normal für die Ordnungstopologie \mathfrak{Q}_0 , folglich $\mathfrak{Q}_N = \mathfrak{Q}_0$.

Beweis¹²). Wegen $E[\mathfrak{Q}_0] = \varinjlim L_\alpha[\mathfrak{Q}_\alpha]$ wird eine \mathfrak{Q}_0 -Nullumgebungsbasis durch diejenigen absolutkonvexen und absorbanten Mengen U gegeben, deren Durchschnitt $V = U \cap (K - K)$ mit dem linearen Teilraum $K - K$ die Form $V = \Gamma_\alpha \varrho_\alpha M_\alpha$ hat, wobei $\{\varrho_\alpha\}$ alle Abbildungen der Indexmenge A in die Menge der positiven reellen Zahlen zu durchlaufen hat. Wenn wir zeigen, daß für jedes solche U gilt: Aus $0 \leq y \leq x \in U$ folgt $y \in U$, dann sind die zu den U gehörigen Halbnormen monoton auf K , daher K \mathfrak{Q}_0 -normal nach (1.1). Sei nun $0 \leq y \leq x \in U$, dann ist $x \in V$, also $x = \sum \xi_\alpha z_\alpha$ mit $\sum |\xi_\alpha| \leq 1$ und $z_\alpha \in \varrho_\alpha M_\alpha$, d. h. $z_\alpha \leq \varrho_\alpha a_\alpha$. Folglich ist auch $0 \leq y \leq \sum |\xi_\alpha| \varrho_\alpha a_\alpha \in \Gamma_\alpha \varrho_\alpha M_\alpha$.

¹²) Man vergleiche hierzu den ersten Teil des Beweises von (4.4).

Nach (Z) ist nun $y = \sum |\xi_\alpha| y_\alpha$ mit $0 \leq y_\alpha \leq \varrho_\alpha a_\alpha$, daher $y \in \Gamma_\alpha \varrho_\alpha M_\alpha = V \subset U$, w.z.b.w.

Wir geben schließlich eine Bedingung dafür, daß auf einem (notwendig regulär halbgeordneten) lokalkonvexen Raum $E[\mathfrak{T}]$ \mathfrak{T} mit der Topologie \mathfrak{T}_N übereinstimmt.

(4.10) *Es sei $E[\mathfrak{T}]$ ein halbgeordneter tonnelierter Raum mit \mathfrak{T} -normalem Kegel K . Ist jede auf K positive Linearform \mathfrak{T} -stetig, so ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_N$.*

Beweis. Da K \mathfrak{T} -normal ist, ist nach (1.7) E regulär halbgeordnet und nach (4.8) \mathfrak{T}_N feiner als \mathfrak{T} . Daher ist jede \mathfrak{T} -stetige Linearform \mathfrak{T}_N -stetig. Nach (1.3) ist jede \mathfrak{T}_N -stetige Linearform Differenz zweier auf K positiver Linearformen, daher nach Voraussetzung \mathfrak{T} -stetig; $E[\mathfrak{T}]$ und $E[\mathfrak{T}_N]$ haben denselben dualen Raum. Da E für \mathfrak{T} tonneliert ist, ist \mathfrak{T} feiner als \mathfrak{T}_N , d. h. es ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_N$.

Aus (4.10) ergeben sich speziellere Kriterien mit Hilfe von (2.8). Auch wenn K einen inneren Punkt für \mathfrak{T} besitzt, ist jede auf K positive Linearform \mathfrak{T} -stetig.

Corollar. *Ist $E[\mathfrak{T}]$ ein die Voraussetzungen von (4.10) erfüllender Rieszscher Raum, so ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_0$.*

Denn E besitzt in diesem Fall (BOURBAKI [9], p. 19, lemme de décomposition) die Eigenschaft (Z), daher ist nach (4.9) K normal für \mathfrak{T}_0 und folglich $\mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_0$.

Wir betrachten wieder einige Beispiele.

1. *Auf den Räumen der Klassen a) bis e) im Beispiel 1, 2. Abschnitt fallen die Normtopologie \mathfrak{T} , die Topologie \mathfrak{T}_N und die Ordnungstopologie \mathfrak{T}_0 zusammen.* Das folgt aus dem Corollar zu (4.10), da es sich in allen Fällen um Rieszsche Räume handelt, auf denen nach der zweiten in dem Beispiel kursiv gedruckten Aussage (die eine Folge von (2.8) ist) jede positive Linearform \mathfrak{T} -stetig ist.

Wir bemerken noch, daß $E[\mathfrak{T}_0]$ im allgemeinen nicht strikter induktiver Limes der $L_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ ist. Dazu sei im Raum $L^1[0, 1]$ a_α die Funktion $a_\alpha(t) = 1$ für $0 \leq t \leq 1$, $a_\beta(t) \geq 1$ eine in $[0, 1]$ wesentlich nicht beschränkte, summierbare Funktion. Es gilt dann $L_\alpha \subset L_\beta$ und $L_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ ist der Raum aller auf $[0, 1]$ beschränkten meßbaren Funktionen mit der Topologie gleichmäßiger Konvergenz. Offenbar ist die von $L_\beta[\mathfrak{T}_\beta]$ auf L_α induzierte Topologie gröber: $f_n \rightarrow 0$ (für \mathfrak{T}_β) einer Folge $\{f_n\} \subset L_\alpha$ bedeutet nur $|f_n(t)| \leq c_n a_\beta(t)$ mit $c_n \rightarrow 0$.

2. Die Schwartzsche Topologie auf \mathcal{D} ist von der Ordnungstopologie verschieden. Beispiel eines nicht metrisierbaren Raumes, auf dem \mathfrak{T} mit der Ordnungstopologie übereinstimmt, ist der im Beispiel 1 des 1. Abschnittes betrachtete Raum der auf einem lokalkompakten Raum stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

5. Anwendungen auf die Darstellbarkeit halbgeordneter lokalkonvexer Räume als Funktionenräume und auf das Basisproblem in B-Räumen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt zunächst mit der Darstellung (reeller) lokalkonvexer halbgeordneter Räume als Räume reeller Funktionen, wobei den für die Halbordnung positiven Elementen natürlich Funktionen

mit nichtnegativen Werten entsprechen sollen. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß im folgenden lediglich von einer Halbordnung in E die Rede ist (für die Darstellung von Vektorverbänden vgl. THOMA [23]). Es zeigt sich in den beiden folgenden Theoremen, daß auch hier der Begriff des normalen Kegels eine fundamentale Rolle spielt. — Als weitere Anwendung der bisherigen Untersuchungen beweisen wir einige Sätze über den Zusammenhang von normalen und BZ-Kegeln mit dem klassischen Basisproblem in separablen Räumen, die Banachräume oder wenigstens tonneliert sind.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(T)$ den Raum stetiger (reeller) Funktionen auf einem geeignet gewählten lokalkompakten Raum T mit der Topologie der kompakten Konvergenz. $\mathcal{C}(0,1)$ sei dieser Raum für $T = [0,1]$.

(5.1) *Es sei $E[\mathfrak{Z}]$ ein halbgeordneter lokalkonvexer Raum. Damit $E[\mathfrak{Z}]$ algebraisch, topologisch und ordnungsisomorph sei einem linearen Teilraum von $\mathcal{C}(T)$, ist notwendig und hinreichend, daß der positive Kegel K in E normal sei.*

Beweis. Wir erinnern zunächst an den Beweis des entsprechenden bekannten Satzes, der auf Ordnungsstrukturen keinen Bezug nimmt. Man betrachtet für ein System $\{p_\alpha\}$ von \mathfrak{Z} erzeugenden Halbnormen die Quotientenräume $E'_\alpha = E/N_\alpha$ nach den Nullräumen $N_\alpha = \bar{p}_\alpha^{-1}(0)$. Die E'_α sind normiert durch $\|\hat{x}_\alpha\| = p_\alpha(x)$ für $x \rightarrow \hat{x}_\alpha \in E'_\alpha$. Sodann ist $E[\mathfrak{Z}]$ topologisch und algebraisch isomorph einem Teilraum $\hat{E} \subset \prod_\alpha E'_\alpha$. Setzt man nun $T = \bigcup_\alpha S'_\alpha, S'_\alpha$

die Einheitskugel im B-Raum E'_α , so läßt sich jedes $x \in \hat{E}$ als reelle (für eine geeignete lokalkompakte Topologie) stetige Funktion auf T auffassen. Die Topologie der kompakten Konvergenz auf T ist alsdann durch die Halbnormen

$$q(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} \|\hat{x}_{\alpha_i}\|,$$

wo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alle endlichen Teilmengen der Indexmenge $\{\alpha\}$ durchläuft, gegeben. Sie stimmt mit der auf \hat{E} von der Produkttopologie induzierten Topologie überein. $x \rightarrow (\hat{x}_\alpha)$ ist eine eindeutige lineare Beziehung.

Sei nun der positive Kegel K in E normal. Es gibt dann nach (1.1) ein \mathfrak{Z} erzeugendes System von Halbnormen $\{p_\alpha\}$ mit $p_\alpha(x + y) \geq p_\alpha(x)$ für $x, y \in K$. Wenden wir auf diese p_α das obige Verfahren an, so ist das Bild K_α von K beim kanonischen Homomorphismus $E \rightarrow E'_\alpha$ offenbar ein normaler Kegel in E'_α . Daher ist nach (2.2) K'_α BZ-Kegel in E'_α , und nach (2.4) ist die Topologie von E'_α durch die Norm

$$\|\hat{x}_\alpha\| = \sup_{z \in S'_\alpha \cap K'_\alpha} |\langle \hat{x}_\alpha, z \rangle|$$

gegeben. Wir können für T also auch $\bigcup_\alpha (S'_\alpha \cap K'_\alpha)$ wählen; T ist in naheliegender Definition ein lokalkompakter Raum, und bei der Abbildung $x \rightarrow (\hat{x}_\alpha)$ entsprechen den $x \in K$ genau die auf T nichtnegativen Funktionen $f = (\hat{x}_\alpha) \in \hat{E}$. Damit ist die Hinlänglichkeit der Bedingung bewiesen.

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort daraus, daß die Menge der positiven Funktionen in $\mathcal{C}(T)$ offensichtlich einen normalen Kegel K bildet.

Für separable normierte Räume erhalten wir entsprechend einem klassischen Resultat von BANACH [1], p. 185 das schärfere Ergebnis:

(5.2) Sei E ein halbgeordneter normierter separabler Raum. Damit E algebraisch, topologisch und ordnungsisomorph sei einem Teilraum von $\mathcal{C}(0,1)$ ist notwendig und hinreichend, daß der positive Kegel K in E normal sei.

Während die Notwendigkeit der Bedingung evident ist, genügt es zum Beweis der Hinlänglichkeit, im Banachschen Gedankengang (l. c. p. 185/186) die Einheitskugel S' in E' durch $S' \cap K'$ zu ersetzen. Hierdurch erreicht man wieder, daß Elemente $x \in K$ in Funktionen $f \geq 0$ übergehen, während die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf $S' \cap K'$ wegen der BZ-Eigenschaft von K' , die eine Folge der Normalität von K ist, mit der Normtopologie auf E übereinstimmt.

Es sei $E[\mathfrak{T}]$ ein tonnelierter Raum, der separabel ist. Eine Menge $\{x_n\}$ heißt Basis von E (vgl. BANACH [1], DIEUDONNÉ [12]), wenn sich jedes $x \in E$ in eindeutiger Weise als

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} x_{\nu}$$

im Sinne der \mathfrak{T} -Konvergenz darstellen läßt. $\{x_n\}$ ist notwendigerweise ein maximales topologisches freies System; es gilt $c_{\mu} = \langle x, y'_{\mu} \rangle$ und $[x_{\nu}, y'_{\mu}]$ ist ein (maximales) Biorthogonalsystem, d. h. es gilt $\langle x_{\nu}, y'_{\mu} \rangle = \delta_{\nu\mu}$ ($\delta_{\nu\mu}$ das Kroneckersymbol). Wir bezeichnen mit $K[x_n]$ den von $\{x_n\}$ aufgespannten abgeschlossenen Kegel, d. h. die abgeschlossene Hülle aller endlichen Linearkombinationen der x_n mit positiven Koeffizienten, mit K' (wie immer) den zu K konjugierten Kegel in E' .

(5.3) $E[\mathfrak{T}]$ sei tonneliert, $\{x_n\}$ ein maximales topologisch freies System in E . Wenn $K[x_n]$ für \mathfrak{T} und K' für $\sigma(E', E)$ normal sind, so ist $\{x_n\}$ eine Basis von E .

Beweis. Es sei $[x_n, y'_m]$ das zu $\{x_n\}$ gehörige Biorthogonalsystem. Da $\{x_n\}$ maximal ist, sind die endlichen Summen $\sum \alpha_{\nu} x_{\nu}$ dicht in $E[\mathfrak{T}]$. Sei $y' \in K'$. Für $x = \sum \alpha_{\nu} x_{\nu}$ gilt

$$\langle x, y' \rangle = \sum \alpha_{\nu} \langle x_{\nu}, y' \rangle = \sum \alpha_{\nu} \beta_{\nu} = \sum \beta_{\nu} \langle x, y'_{\nu} \rangle = \langle x, \sum \beta_{\nu} y'_{\nu} \rangle.$$

Wegen $\beta_{\nu} \geq 0$ folgt $\sum_{\lambda=1}^l \beta_{\lambda} y'_{\lambda}(x) \leq y'(x)$ für alle l und $x \in K$. Hieraus folgt $0 \leq \sum_1^l \beta_{\lambda} y'_{\lambda} \leq y'$ im Sinne der durch K' in E' induzierten Halbordnung. Da K' nach Voraussetzung normal ist, sind nach dem 2. Corollar von (1.1) die Partialsummen $\sum_{\lambda=1}^l \beta_{\lambda} y'_{\lambda}$ beschränkt in E' . Nach (1.3) ist aber $E' = K' - K'$, daher sind für jedes $z' \in E'$ die Partialsummen

$$\sum_{\lambda=1}^l \langle x_{\lambda}, z' \rangle y'_{\lambda}$$

beschränkt in E' , also nach DIEUDONNÉ [12], p. 9 prop. 5 $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle x, y'_{\nu} \rangle x_{\nu}$, w. z. b. w.

Wir nennen mit KARLIN [13] eine Basis $\{x_n\}$ von E absolut, wenn $\sum_m \langle x, y'_m \rangle x_m$ konvergent ist für jede Teilmenge $\{m\}$ der natürlichen Zahlen.

Es gilt

(5.4) Sei $E[\mathfrak{Z}]$ tonneliert, $\{x_n\}$ ein maximales topologisch freies System in E . Ist $K[x_n]$ ein normaler BZ-Kegel, so ist $\{x_n\}$ eine absolute Basis in E .

Beweis. Nach (2.2) ist K' normal¹³⁾, nach (5.3) also $\{x_n\}$ eine Basis in E . Wir haben zu zeigen, daß dies eine absolute Basis ist. Nun existieren wegen der BZ-Eigenschaft von K für jedes $x \in E$ zwei beschränkte Folgen

$$x_1^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{r_n} \varrho_{\nu}^{(n)} x_{\nu}, \quad x_2^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{r_n} \sigma_{\nu}^{(n)} x_{\nu}$$

mit $x_1^{(n)} - x_2^{(n)} \rightarrow x$. Hierbei können wir annehmen, daß stets $\inf(\varrho_{\nu}^{(n)}, \sigma_{\nu}^{(n)}) = 0$ ist. Setzen wir $c_{\nu} = \langle x, y'_{\nu} \rangle$ ($[x_{\nu}, y'_{\nu}]$ das zu $\{x_{\nu}\}$ gehörige Biorthogonalsystem) und $c_{\nu} = \lambda_{\nu} - \mu_{\nu}$ mit $\inf(\lambda_{\nu}, \mu_{\nu}) = 0$, so gilt offenbar für $n \rightarrow \infty$ $\varrho_{\nu}^{(n)} \rightarrow \lambda_{\nu}$, $\sigma_{\nu}^{(n)} \rightarrow \mu_{\nu}$. Es mögen nun $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$ der beschränkten Menge B angehören; dann gehören wegen der Normalität von K auch alle $z \in K$ mit $0 \leq z \leq x_i^{(n)}$ für alle n und $i = 1, 2$ einer beschränkten Menge B_1 an, die wir als abgeschlossen voraussetzen dürfen. Ist nun $k \leq r_n$ fest, so gilt also

$$\sum_{\nu=1}^k \varrho_{\nu}^{(n)} x_{\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^k \sigma_{\nu}^{(n)} x_{\nu} \in B_1.$$

Daher gilt auch

$$y_k = \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} x_{\nu}, \quad z_k = \sum_{\nu=1}^k \mu_{\nu} x_{\nu} \in B_1$$

für jedes k . Ist $\{m\}$ eine beliebige Teilmenge der natürlichen Zahlen, so sind also auch die Partialsummen von $\sum_{(m)} \lambda_m x_m$, $\sum_{(m)} \mu_m x_m$ in B_1 . Daher ist für jedes $x \in E$

$$\sum_{(m)} (\lambda_m - \mu_m) x_m = \sum_{(m)} \langle x, y'_m \rangle x_m$$

eine Reihe mit beschränkten Partialsummen, die für alle x einer in $E[\mathfrak{Z}]$ dichten Menge konvergiert. Folglich sind diese Partialsummen als Abbildungen von E in sich gleichstetig, also für alle $x \in E$ konvergent und die Basis $\{x_n\}$ ist absolut, w.z.b.w.

KARLIN [13] hat gezeigt, daß es separable B-Räume gibt, in denen keine absolute Basis existiert; er zeigt dies für den Raum $\mathcal{C}(0,1)$. Aus (5.4) folgt, daß in einem solchen Raum kein $K[x_n]$ zugleich normal und BZ-Kegel sein kann. Nun ist aber jeder Kegel $K[x_n]$, wo $\{x_n\}$ ein maximales topologisch freies System ist, notwendig total in E . Betrachten wir den von der Schauder'schen Basis in \mathcal{C} (SCHAUDER [21]) erzeugten Kegel K , so liefert dieser ein Beispiel für

(5.5) Im Raum $\mathcal{C}(0,1)$ gibt es einen normalen totalen Kegel K , der kein BZ-Kegel ist.

Damit ist eine von BONSALL [4], p. 146 aufgeworfene Frage negativ beantwortet¹⁴⁾.

Wir beschließen die Anwendungen auf Basen in tonnelierten Räumen mit dem folgenden Äquivalenztheorem für reflexive Banachräume:

¹³⁾ Für $\beta(E', E)$. Mit dieser Voraussetzung bleibt der Beweis von (5.3) in Kraft.
¹⁴⁾ Ein weiteres, einfacheres Beispiel wurde mir von Herrn BONSALL brieflich mitgeteilt.

(5.6) Es sei E ein reflexiver B -Raum; $\{x_n\}$ ein maximales topologisch freies System, $[x_n, y'_m]$ das zugehörige Biorthogonalsystem; $K = K[x_n]$. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1° K bzw. K' sind normal in E bzw. E' .

2° K bzw. K' sind BZ-Kegel in E bzw. E' .

3° $\{x_n\}$ bzw. $\{y'_m\}$ sind absolute Basen in E bzw. E' .

Ferner ist $K[x_n]' = K[y'_m]$, wenn eine der Bedingungen erfüllt ist.

Beweis. 1° \rightarrow 2°: Folgt aus (2.7). 2° \rightarrow 3°: Sind K und K' beide BZ-Kegel, so sind nach (2.7) beide normal (und sogar strikte BZ-Kegel). Aus (5.4) folgt dann, daß $\{x_n\}$ und wegen der Reflexivität von E auch $\{y'_m\}$ absolute Basen sind. 3° \rightarrow 1°: Ist $\{x_n\}$ absolute Basis in E , so ist offenbar $E = K - K$; hieraus folgt nach (2.6), daß K BZ-Kegel ist. Das gleiche gilt für $K' = K[y'_m]$; aus (2.7) ergibt sich dann, daß K bzw. K' normal sind in E bzw. E' . Die letzte Behauptung folgt so: Es sei $x' \in K'$. Da $\{y'_m\}$ Basis in E' ist, hat man $x' = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_{\mu} y'_{\mu}$ mit $\beta_{\mu} = \langle x_{\mu}, x' \rangle \geq 0$. Daher ist $x' \in K[y'_m]$.

Literatur

- [1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] BONSALL, F. F.: Sublinear functionals and ideals in partially ordered vector spaces. Proc. London math. Soc. (3) **4**, 402—418 (1954). — [3] BONSALL, F. F.: Endomorphismus of partially ordered vector spaces. J. London math. Soc. **30**, 133—144 (1955). — [4] BONSALL, F. F.: Endomorphisms of a partially ordered vector space without order unit. J. London math. Soc. **30**, 144—153 (1955). — [5] BONSALL, F. F.: Extreme maximal ideals in a partially ordered vector space. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 831—837 (1956). — [6] BONSALL, F. F.: Regular ideals of partially ordered vector spaces. Proc. London math. Soc. (3) **6**, 626—640 (1956). — [7] BOURBAKI, N.: Eléments de Math. Espaces vectoriels topologiques, chap. I, II. Act. sci. ind. 1189, Paris 1953. — [8] BOURBAKI, N.: Eléments de math. Espaces vectoriels topologiques, chap. III—V. Act. sci. ind. 1229, Paris 1955. — [9] BOURBAKI, N.: Eléments de math. Intégration. Act. sci. ind. 1175, Paris 1952. — [10] DIEUDONNÉ, J.: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. École sup. norm. **59**, 107—139 (1942). — [11] DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ: La dualité dans les espaces F et LF . Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [12] DIEUDONNÉ, J.: On biorthogonal systems. Mich. math. J. **2**, 7—20 (1954). — [13] KARLIN, S.: Bases in Banach spaces. Duke math. J. **15**, 971—985 (1948). — [14] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. (In Vorbereitung.) — [15] KREIN, M. G.: Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach. Doklady Acad. Sci. URSS (N.S.) **28**, 13—17 (1940). — [16] KREIN, M. G., et J. GROSBERG: Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives. Dokl. Acad. Sci. URSS (N.S.) **25**, 723—726 (1939). — [17] KREIN, M. G., u. M. A. RUTMAN: Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banachschen Raum invariant lassen. Uspechi Mat. Nauk (N.S.) **3**, Nr. 1 (23); 3—95 (1948); russ., engl. Übers.: Amer. Math. Soc. Transl. **26**. — [18] NACHBIN, L.: Topologia e ordem. Chicago 1950. — [19] NAMIOKA, I.: Partially ordered linear topological spaces. Mem. Amer. math. Soc. No. 24 (1957). — [20] SCHAEFER, H.: Positive Transformationen in halbgeordneten lokalkonvexen Vektorräumen. Math. Ann. **129**, 323—329 (1955). — [21] SCHAUDER, J.: Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Z. **26**, 47—65 (1927). — [22] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, t. I 2° éd. Act. sci. ind. 1245, Paris 1957. — [23] THOMA, E.: Darstellung von vollständigen Vektorverbänden durch vollständige Funktionenvektorverbände. Arch. Math. **7**, 11—22 (1956).

(Eingegangen am 11. Oktober 1957)