# Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die Weilsche Integraldarstellung.

Von

HANS HEFER † [1]) in Münster (Westf.).

ANDRÉ WEIL hat für analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen eine verallgemeinerte Cauchysche Integralformel angegeben, durch welche eine reguläre Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Innern eines analytischen Polyeders $\mathfrak{P}$ mittels ihrer Werte auf den $n$-dimensionalen Kanten von $\mathfrak{P}$ dargestellt werden kann [2]). Dabei wird unter einem analytischen Polyeder $\mathfrak{P}$ eine wie folgt zu beschreibende Punktmenge des $R^{2n}$ verstanden: In den Ebenen der Variablen $z_i$ seien beschränkte Gebiete $\mathfrak{D}_i$ mit stückweise glatten Rändern $\mathfrak{R}_i$ gegeben; es sei gesetzt $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{D}_i + \mathfrak{R}_i$. Ferner seien $\chi_i((z))$, $i = 1, 2, \ldots, m$, Funktionen, die sämtlich in einem schlichten Gebiet $\mathfrak{D}$ des $R^{2n}$ regulär und eindeutig sind. Es wird sodann die Gesamtheit der Punkte $((z))$ betrachtet, die den Bedingungen

$$((z)) \in \mathfrak{D}, \; \chi_i((z)) \in \mathfrak{p}_i$$

genügt; eine zusammenhängende Komponente dieser Punktmenge oder die Vereinigung mehrerer solcher Komponenten, *falls diese ganz in $\mathfrak{D}$ liegen*, heißt ein analytisches Polyeder $\mathfrak{P}$. Zur Anwendung der WEILschen Integraldarstellung muß nun wesentlich vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $\chi_i((z))$ eine Zerlegung der folgenden Art gestatten:

$$\chi_i((z)) - \chi_i((\zeta)) = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot P_{i\nu}((z); (\zeta)), \tag{1}$$

hierbei bedeuten die $P_{i\nu}((z); (\zeta))$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ reguläre eindeutige Funktionen von $z_1, \ldots, z_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$; sie gehen explizit in die Integralformel ein. A. WEIL bemerkt, daß Zerlegungen der Gestalt (1) jedenfalls dann existieren, wenn die $\chi_i((z))$ Polynome oder rationale Funktionen oder Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen solcher Funktionen sind. Es ist aber bekannt, daß im Raume mehrerer komplexer Veränderlichen keineswegs in jedem vorgegebenen schlichten Regularitätsgebiete [3]) eine dort eindeutige reguläre

---

[1]) Der Verfasser ist 1941 im Osten gefallen. Die vorliegende Arbeit stellt einen Auszug aus seiner Dissertation dar, die 1940 in Münster vorgelegen hat. — Seit 1941 sind Arbeiten von K. OKA und H. CARTAN erschienen, die das Resultat von H. HEFER enthalten, jedoch andersartige Beweismittel benutzen: K. OKA: Jap. J. Math. **7**, 523 (1941); CARTAN, H.: Ann. Sci. Ecole norm. Sup. III, **61**, 149 (1944).

Die Unterzeichneten halten die Veröffentlichung des HEFERschen Beweises wegen seiner auffallenden Einfachheit auch im gegenwärtigen Zeitpunkt für gerechtfertigt.

H. BEHNKE, K. STEIN.

[2]) WEIL, ANDRÉ: C. R. **194**, 1304 (1932). — Math. Ann. **111**, 178 (1935).

[3]) Zur Theorie der Regularitätsgebiete sowie zu den weiteren, hier nicht näher erläuterten Begriffen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen siehe H. BEHNKE u. P. THULLEN: Erg. Math. **3**, 3 (1934).

Funktion durch Polynome oder rationale Funktionen im Großen gleichmäßig approximiert werden kann[4]). So war die Frage offen geblieben, ob die WEILsche Integralformel auch in den Fällen anwendbar bleibt, wo die das analytische Polyeder charakterisierenden $\chi_i((z))$ nicht zu den angegebenen Funktionenklassen gehören. Wenn aber in einem analytischen Polyeder $\mathfrak{P}$ eine WEILsche Integraldarstellung möglich ist, so kann für $\mathfrak{P}$ ein Analogon des RUNGEschen Satzes abgeleitet werden. Aus diesem Grunde ist die Frage nach der Möglichkeit einer Zerlegung (1) analytischer Funktionen in vorgegebenen Gebieten von besonderer Wichtigkeit für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.

Es soll nun gezeigt werden, daß in allen schlichten endlichen Regularitätsgebieten $\mathfrak{G}$ in der Tat die in $\mathfrak{G}$ regulären eindeutigen Funktionen solche Zerlegungen (1) zulassen. Da die offenen Komponenten von analytischen Polyedern insbesondere Regularitätsgebiete sind und jedes analytische Polyeder sich durch ganz umfassende analytische Polyeder approximieren läßt, so wird damit bewiesen sein: *Die WEILsche Integraldarstellung analytischer Funktionen ist in allen analytischen Polyedern des $R^{2n}$ möglich.*

Wir benötigen einen Hilfssatz:

*Sei $\mathfrak{G}$ ein schlichtes endliches Regularitätsgebiet und $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ eine $\mathfrak{G}$ treffende $(2n-2)$-dimensionale analytische Ebene. In den Punkten des Durchschnittes $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ sei als Funktion auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ eine reguläre eindeutige Funktion $\varphi$ vorgegeben. (Besteht $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ aus mehreren Komponenten $\mathfrak{D}_j$, so soll in jedem $\mathfrak{D}_j$ eine reguläre eindeutige Funktion $\varphi_j$ vorgegeben sein.) Dann gibt es eine in $\mathfrak{G}$ reguläre eindeutige Funktion $\Phi$, die auf $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ mit $\varphi$ übereinstimmt.*

Zum Beweise darf angenommen werden, daß $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ die Ebene $z_1 = 0$ ist; die Funktion $\varphi$ ist dann als Funktion der Variablen $z_2, \ldots, z_n$ allein zu schreiben: $\varphi(z_2, \ldots, z_n)$. In $\mathfrak{G}$ wird nun eine COUSINsche Verteilung meromorpher Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Subtraktion[5]) wie folgt vorgegeben: Liegt der Punkt $P$ innerhalb $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$, so werde $P$ eine Hyperkugelumgebung $\mathfrak{U}(P)$ so zugeordnet, daß $\mathfrak{U}(P)$ nur Punkte von $\mathfrak{G}$ enthält; in $\mathfrak{U}(P)$ werde

$$f_P = \frac{\varphi(z_2, \ldots, z_n)}{z_1}$$

als Lokalfunktion vorgeschrieben. Liegt $P$ nicht auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$, aber innerhalb $\mathfrak{G}$, so sei als $P$ zuzuordnende Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ eine $P$ enthaltende Hyperkugel gewählt, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, aber $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ nicht trifft; in diesem Falle sei $f_P \equiv 0$. Nach K. OKA ist in $\mathfrak{G}$ das erste COUSINsche Problem[6]) lösbar. Es gibt also eine in $\mathfrak{G}$ meromorphe eindeutige Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, so daß jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ die Differenz $R_P = f_P - F$ regulär ist. Die Funktion

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) \equiv z_1 \cdot F(z_1, \ldots, z_n)$$

ist dann eine gesuchte Funktion: Es gilt jeweils in $\mathfrak{U}(P)$

$$z_1 \cdot F = z_1 \cdot f_P - z_1 \cdot R_P;$$

dies ist für alle $P \in \mathfrak{G}$ regulär und stimmt für $z_1 = 0$ mit $\varphi(z_2, \ldots, z_n)$ überein.

---

[4]) BEHNKE, H. u. K. STEIN: Göttinger Nachr., N. F. I (1939). STEIN, K.: Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. **1939**, 139; Math. Ann. **117**, 727 (1941).

[5]) Zum COUSINschen Problemkreis, vgl. H. BEHNKE u. K. STEIN: Jber. dtsch. Math.-Ver. **47**, 177 (1937).

[6]) OKA, K.: J. Sci. Hiroshima Univ. A, **7**, Nr. 2, 115 (1937).

Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

*Das schlichte endliche Regularitätsgebiet $\mathfrak{G}$ im $R^{2n}$ habe mit der analytischen $2(n-k)$-dimensionalen Ebene $\mathfrak{E}^{2(n-k)}: \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ einen nicht leeren Durchschnitt $(n \geqq 1, 1 \leqq k \leqq n)$. In $\mathfrak{G}$ sei eine reguläre eindeutige Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ vorgegeben, die auf $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{2(n-k)}$ verschwinde. Dann existiert in $\mathfrak{G}$ eine Darstellung*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu=1}^{k} z_\nu \cdot Q_\nu(z_1, \ldots, z_n), \tag{2}$$

*wo die $Q_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktionen darstellen.*

Wir wenden vollständige Induktion an: 1. Die Behauptung ist sicher richtig für $k = 1$ und beliebiges $n$. — 2. Die Behauptung gelte für $k-1$ und beliebiges $n \geqq k$. Wir schneiden $\mathfrak{G}$ mit der analytischen Ebene $\mathfrak{E}_k^{(2n-2)}$: $\{z_k = 0\}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_k^{(2n-2)}$ besteht aus einem oder mehreren $(2n-2)$-dimensionalen Regularitätsgebieten im Raume der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$; denn mit $\mathfrak{G}$ sind auch alle Komponenten $\mathfrak{D}_j$ von $\mathfrak{D}$ regulär-konvex. Die in $\mathfrak{G}$ vorgegebene Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ ist laut Voraussetzung insbesondere in $\mathfrak{D}$ regulär und eindeutig, sie verschwindet dort auf den Punkten der Ebene $\{z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0\}$. Also existiert in $\mathfrak{D}$ (bzw. in jedem $\mathfrak{D}_j$) nach Induktionsvoraussetzung eine Darstellung

$$f = \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu \cdot Q_\nu^*(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n); \tag{3}$$

dabei sind die $Q_\nu^*$ in $\mathfrak{D}$ regulär (bzw. sie bestehen aus jeweils in $\mathfrak{D}_j$ regulären und eindeutigen Funktionen). Auf Grund des Hilfssatzes gibt es in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktionen $Q_\nu(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n)$, $\nu = 1, \ldots, k-1$, die auf $\mathfrak{D}$ mit den dort gegebenen $Q_\nu^*$ übereinstimmen. Wir bilden die in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n) - \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu \cdot Q_\nu(z_1, \ldots, z_n). \tag{4}$$

$\Psi$ verschwindet wegen (3) auf $z_k = 0$ innerhalb $\mathfrak{G}$. Nach Induktionsschritt 1. existiert eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktion $Q_k(z_1, \ldots, z_n)$, so daß in $\mathfrak{G}$

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = z_k \cdot Q_k(z_1, \ldots, z_n) \tag{5}$$

gilt. (4) und (5) ergeben aber eine gesuchte Darstellung (2), w. z. b. w.

Sei nun im schlichten endlichen Regularitätsgebiet $\mathfrak{G}$ des $R^{2N}$ eine dort reguläre eindeutige Funktion $\chi(z_1, \ldots, z_N)$ gegeben. Beachtet man, daß mit $\mathfrak{G}$ stets auch das direkte Produkt $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{G}}$ ein Regularitätsgebiet ist, so ergibt sich die Existenz einer Zerlegung

$$\chi(z_1, \ldots z_N) - \chi(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) = \sum_{\nu=1}^{N} (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot P_\nu(z_1, \ldots, z_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$$

in $\mathfrak{G}$ wie folgt: Man setze

$$z_\varkappa^* = z_\varkappa - \zeta_\varkappa, \quad z_{N+\varkappa}^* = z_\varkappa, \quad \varkappa = 1, \ldots, N,$$

und wende den soeben bewiesenen Satz mit $k = N$, $n = 2N$ an.

*(Eingegangen am 23. Dezember 1949.)*