HOLMANN, H.
Math. Annalen 139, 383—402 (1960)

Quotientenräume komplexer Mannigfaltigkeiten nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen

Von
HARALD HOLMANN in Münster (Westf.)

Einleitung

Nennt man zwei Punkte x' und x'' eines komplexen Raumes X (siehe [7], [10], [12]) L-äquivalent, wenn x' durch eine Transformation aus einer fest gegebenen Lieschen Automorphismengruppe L von X in x'' überführbar ist, so liefert dies eine Zerlegung Z_L (siehe [12]) von X in paarweise disjunkte Teilmengen. Man möchte nun gerne wissen, unter welchen Bedingungen dem Zerlegungsraum X/Z_L (siehe [12]) eine komplexe Struktur aufgeprägt werden kann, und zwar so, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Q_1) Die kanonische Projektionsabbildung $\pi|X \to X/Z_L$ ist holomorph.

(Q_2) Der Ring $I(X/Z_L)$ der auf X/Z_L holomorphen Funktionen ist isomorph zum Ring $I(X, L) := \{f : f$ holomorph auf X, $f \circ v = f$ für alle $v \in L\}$ der L-invarianten holomorphen Funktionen auf X, und zwar vermöge des Umkehrisomorphismus $\pi^*|I(X/Z_L) \to I(X, L)$, der durch $\pi^* : f^* \to f := f^* \circ \pi$ definiert ist.

Für den Fall, daß die Liesche Automorphismengruppe L eigentlich diskontinuierlich auf dem komplexen Raum X operiert, konnte das Problem vollständig gelöst werden (siehe [4], [5]). Eine Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes X operiert eigentlich diskontinuierlich auf X, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

(I) Sind x und x' zwei nicht L-äquivalente Punkte aus X, so besitzen sie Umgebungen U bzw. U', so daß gilt: $\bigcup\limits_{v \in L} v(U) \cap U' = \emptyset$.

(II) Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist die Isotropiegruppe $G(x_0) := \{g : g \in L, g \circ x_0 = x_0\}$ endlich, und es gibt stets eine Umgebung U von x_0, so daß für alle $x \in U$ und $v \in L$ gilt: $v \circ x \in U \between v \in G(x_0)$.

Es gilt die folgende Aussage:

Ist X ein (normaler) komplexer Raum und operiert die Liesche Automorphismengruppe L von X eigentlich diskontinuierlich auf X, dann besitzt der Zerlegungsraum X/Z_L (versehen mit der Quotiententopologie) eine (normale) komplexe Struktur und die Bedingungen (Q_1) und (Q_2) sind erfüllt. Den Zerlegungsraum X/Z_L nennt man auch Quotientenraum von X nach L und schreibt dafür kürzer X/L.

In der vorliegenden Arbeit soll die Struktur der Quotientenräume von n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten X^n nach q-dimensionalen komplexen Lieschen Automorphismengruppen L^q, $q > 0$, untersucht werden.

Der Fall, daß L^q endlich bzw. abzählbar unendlich viele Komponenten besitzt, läßt sich wie folgt auf den Fall zurückführen, daß L^q zusammenhängend ist. Ist L_0^q die Komponente von L^q, die die identische Transformation enthält, und läßt sich dem Quotientenraum X^n/L_0^q eine komplexe Struktur so aufprägen, daß die Aussagen (Q_1) und (Q_2) gelten, dann stellt L^q/L_0^q eine Liesche Automorphismengruppe von X^n/L_0^q dar. Operiert L^q/L_0^q eigentlich diskontinuierlich auf X^n/L_0^q, so besitzt auch der Quotientenraum $(X^n/L_0^q)/(L^q/L_0^q)$ eine komplexe Struktur und es gelten die Bedingungen (Q_1) und (Q_2). Da $(X^n/L_0^q)/(L^q/L_0^q)$ zu X^n/L^q topologisch äquivalent ist, so läßt sich dann auch X^n/L^q auf kanonische Weise eine komplexe Struktur aufprägen, wobei wieder gilt, daß die Bedingungen (Q_1) und (Q_2) erfüllt sind.

Im folgenden sei also stets angenommen, daß die Lieschen Automorphismengruppen L^q zusammenhängend sind.

Wir haben uns zu überlegen, welche Bedingungen man an die Stelle von (I) und (II) setzen muß, damit der Quotientenraum X^n/L^q eine komplexe Struktur mit den gewünschten Eigenschaften besitzt. Analog zum ersten Teil von Bedingung (II) wollen wir fordern:

(IE): Die Isotropiegruppe $G(x) := \{g : g \in L^q, g \circ x = x\}$ ist für jedes $x \in X^n$ endlich.

Außerdem erweist es sich als zweckmäßig, folgendes zu verlangen:

(LE): Die Gruppe L^q operiert lokal eigentlich auf X^n (siehe § 1, Definition 2).

Man kommt jedoch schon zu wichtigen Aussagen über die Struktur des Quotientenraumes X^n/L^q, wenn man statt (LE) nur fordert, daß gilt:

(SLE): Die Gruppe L^q operiert schwach lokal eigentlich auf X^n (siehe § 1, Definition 1).

Es gelten die folgenden Aussagen:

1. Ist X^n eine komplexe Mannigfaltigkeit und genügt die komplexe Liesche Automorphismengruppe L^q von X^n den Bedingungen (IE) und (SLE), dann ist der Quotientenraum X^n/L^q ein T_1-Raum (im allgemeinen kein T_2-Raum), dem man eine pseudo-komplexe Struktur (siehe § 3, Definition 5) *so aufprägen kann, daß die Bedingungen (Q_1) und (Q_2) erfüllt sind.*

2. Ersetzt man die Bedingung (SLE) durch die schärfere Annahme (LE), dann ist der Quotientenraum X^n/L^q ein T_2-Raum und besitzt eine normale komplexe Struktur. Es gelten wieder die Aussagen (Q_1) und (Q_2).

3. Verschärft man die Bedingung (LE) noch weiter und fordert:

(E)*: L^q operiert eigentlich auf X^n* (siehe § 1, Definition 3),

dann gilt außerdem noch: Die Zerlegung Z_{L^q} von X^n ist eigentlich (siehe [12]) *und die kanonische Projektion $\pi|X^n \to X^n/L^q$ stellt eine eigentliche Abbildung dar.*

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit werden topologische Räume X mit fest gegebenen topologischen Gruppen G von Homöomorphismen von X auf sich betrachtet. Diese geben Anlaß zu Zerlegungen Z_G von X und zur Bildung von Zerlegungs- oder Quotientenräumen X/Z_G oder einfacher X/G. Die topologische Struktur dieser Zerlegungsräume ist Gegenstand der Untersuchungen dieses einführenden Paragraphen.

Im zweiten Abschnitt werden für komplexe Mannigfaltigkeiten, die komplexe Liesche Automorphismengruppen besitzen, die den Bedingungen (IE) und (SLE) genügen, einige lokale und globale Abbildungssätze bewiesen.

Diese werden dann im dritten Abschnitt zum Beweis der oben angeführten Aussagen 1 – 3 benutzt, mit deren Hilfe sich wiederum Abbildungssätze beweisen lassen, die in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Cartanschen Abbildungssatzes darstellen (siehe [1] und [3]).

§ 1. Durch Homöomorphismengruppen erzeugte Zerlegungen topologischer Räume

X sei ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe von Homöomorphismen von X auf sich (siehe [6]). Die Topologie von G sei so beschaffen, daß die Abbildung $\Phi | G \times X \to X$, gegeben durch $\Phi : (g, x) \to g \circ x$, stetig ist (siehe unter [9] den Begriff der "jointly continous topology"). $G \times X$ ist dabei mit der Produkttopologie ausgestattet. Unter der saturierten Hülle einer Teilmenge A von X bezüglich G verstehen wir die Menge $\mathscr{H}(A) := \Phi(G \times A)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt saturiert bezüglich G, wenn $\mathscr{H}(A) = A$ ist. Es gilt die folgende Aussage: Die saturierte Hülle $\mathscr{H}(A)$ einer offenen Menge $A \subset X$ ist wieder offen. Dies folgt sofort daraus, daß $\mathscr{H}(A) = \Phi(G \times A) = \bigcup_{g \in G} g(A)$ ist und die g-Bilder von A für alle $g \in G$ wieder offen sind.

Für die Punkte aus X können wir die folgende Äquivalenzrelation einführen. Wir nennen zwei Punkte x' und x'' genau dann G-äquivalent, wenn $\mathscr{H}(x') = \mathscr{H}(x'')$ ist. Die G-Äquivalenz von Punkten aus X liefert eine Zerlegung Z_G von X in punktfremde Klassen. Die Klasse, in der der Punkt $x \in X$ liegt, besteht genau dann aus den Punkten der saturierten Hülle $\mathscr{H}(x)$ von x. Unter dem Zerlegungsraum X/Z_G (wir gebrauchen synonym die Bezeichnung Quotientenraum X/G) verstehen wir die Menge aller G-Äquivalenzklassen mit der gewöhnlichen Quotiententopologie. Bezeichnen wir die kanonische Projektionsabbildung von X auf X/G mit π, so können wir die offenen Mengen der Quotiententopologie auf X/G als π-Bilder von offenen saturierten Teilmengen von X beschreiben. Da für jede Teilmenge A von X gilt: $\pi(A) = \pi(\mathscr{H}(A))$ und da mit jeder offenen Teilmenge A von X auch die saturierte Hülle $\mathscr{H}(A)$ offen ist, so sind die π-Bilder offener Mengen von X stets wieder offen. π ist also eine offene Abbildung.

Was kann man über die topologische Struktur des Quotientenraumes X/G aussagen? Wie das folgende Beispiel zeigt, ist X/G im allgemeinen nicht einmal ein T_1-Raum.

Beispiel: Der n-dimensionale komplexe Zahlenraum C^n (mit der gewöhnlichen Topologie versehen) läßt die folgenden Homöomorphismen $T_y : z \in C^n \to y \cdot z$ zu, wobei y eine beliebige komplexe Zahl ungleich Null ist. Diese bilden eine zur multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen isomorphe topologische Gruppe G. Die Abbildung $\Phi | G \times C^n \to C^n$, gegeben durch $\Phi : (T_y, z) \to y \cdot z$, ist stetig. Der Zerlegungsraum $(C^n - \{O\})/Z_G$ von $C^n - \{O\}$ bezüglich der Gruppe G ist topologisch äquivalent zum $(n-1)$-dimensionalen komplexen projektiven Raum

P^{n-1}. Der Nullpunkt O des C^n stimmt mit seiner bezüglich G saturierten Hülle überein, während die bezüglich G saturierte Hülle jeder Umgebung des Nullpunktes gleich dem ganzen C^n ist. Die durch den Nullpunkt repräsentierte Klasse im Zerlegungsraum C^n/Z_G besitzt also bezüglich der Quotiententopologie nur den ganzen Zerlegungsraum als offene Umgebung. C^n/Z_G ist also bezüglich der Quotiententopologie kein T_1-Raum. Man kann diesen Fall ausschließen, wenn man fordert, daß die topologische Gruppe G auf dem topologischen Raum X schwach lokal eigentlich operiert.

Definition 1: (SLE): Eine topologische Gruppe G (versehen mit der jointly continuous topology) von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X auf sich operiert *schwach lokal eigentlich* auf X, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x gibt, so daß die Abbildung $\Phi|G \times U_x \to \mathscr{H}(U_x)$, gegeben durch $\Phi: (g, x^*) \to g \circ x^*$, eigentlich ist. Die Topologie auf $\mathscr{H}(U_x)$ sei dabei durch die auf X gegebene Topologie induziert.

Unter Umgebungen verstehen wir hier dasselbe wie «voisinage» (siehe [2], § 1, Definition 4), das in der deutschen Literatur häufig mit Nachbarschaft übersetzt wird. Die in den Definitionen 1, 2 und 3 auftretenden Umgebungen U_x sind im allgemeinen kompakt.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 1: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Operiert die topologische Gruppe G von Homöomorphismen von X auf sich schwach lokal eigentlich auf X, so ist der Zerlegungsraum X/Z_G ein T_1-Raum.*

Beweis: x und x' seien zwei nicht G-äquivalente Punkte aus X; d. h. $\mathscr{H}(x) \cap \mathscr{H}(x') = \emptyset$. Wir haben zu zeigen, daß es eine offene saturierte Umgebung von x gibt, die x' und damit auch $\mathscr{H}(x')$ nicht enthält. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung U_x von x, so daß die Abbildung $\Phi|G \times U_x \to \mathscr{H}(U_x)$ eigentlich ist. Ist $x' \notin \mathscr{H}(U_x)$, so sind wir fertig; denn die saturierte Hülle $\mathscr{H}(\mathring{U}_x)$ des offenen Kerns $\mathring{U}_x$ von U_x stellt eine offene saturierte Umgebung von x dar, die x' ausschließt. Ist $x' \in \mathscr{H}(U_x)$, so liegt $\mathscr{H}(x') = \Phi(G \times x')$ als Φ-Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von $G \times U_x$ abgeschlossen in $\mathscr{H}(U_x)$, da die Abbildung $\Phi|G \times U_x \to \mathscr{H}(U_x)$ eigentlich ist (siehe [2], I, § 10, Prop. 16). $S_x := \mathscr{H}(U_x) - \mathscr{H}(x')$ ist also offen in $\mathscr{H}(U_x)$. Da die Topologie auf $\mathscr{H}(U_x)$ durch die auf X gegebene Topologie induziert ist, so muß sich die in $\mathscr{H}(U_x)$ offene Menge S_x als $S_x = W \cap \mathscr{H}(U_x)$ schreiben lassen, wobei W eine offene Teilmenge von X ist. $S_x^* := W \cap \mathscr{H}(\mathring{U}_x)$ stellt dann eine in X offene saturierte Umgebung von x dar, und x' gehört nicht zu S_x^*, da $S_x^* \subset S_x$ und $x' \notin S_x$.

Als Beispiel kann man den C^2 ohne Nullpunkt (versehen mit der üblichen Topologie) betrachten, der die folgenden homöomorphen Selbstabbildungen H_y: $(z_1, z_2) \to (z_1 y, z_2 y^{-1})$ zuläßt, wobei y eine beliebige komplexe Zahl ungleich Null ist. Die Abbildungen H_y bilden eine topologische Gruppe G, die auf $C^2 - \{O\}$ schwach lokal eigentlich operiert, wie man leicht sieht. Da $C^2 - \{O\}$ lokal kompakt ist, so ist der Zerlegungsraum $(C^2 - \{O\})/Z_G$ also ein T_1-Raum. Da eine offene Zerlegung Z eines topologischen Raumes X genau dann einen hausdorffschen Zerlegungsraum X/Z liefert, wenn die Zerlegung Z kontinuierlich ist (siehe [11], [12]), so kann in unserem Beispiel $(C^2 - \{O\})/Z_G$ nicht hausdorffsch sein, da die Zerlegung Z_G nicht kontinuierlich ist. Es gibt nämlich einen gegen $(z_1, z_2) = (1, 0)$ konvergenten Filter $\mathfrak{F}$ auf $C^2 - \{O\}$, so daß die Filterbasis $\mathscr{H}(\mathfrak{F}) := \{\mathscr{H}(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ nicht nur $\mathscr{H}(1, 0) = \{(z_1, z_2) : (z_1, z_2) \in C^2 - \{O\}, z_2 = 0\}$ als Berührungspunkte hat, sondern auch die Punktmenge $\mathscr{H}(0, 1) = \{(z_1, z_2) : (z_1, z_2) \in C^2 - \{O\}, z_1 = 0\}$. Faßt man die Bedingungen von Definition 1 etwas schärfer, so läßt sich auch dieser Fall ausschließen.

Definition 2 (LE): Eine topologische Gruppe G (versehen mit der jointly continuous topology) von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X auf sich operiert *lokal eigentlich* auf X, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x gibt, so daß die Abbildung $\Phi | G \times U_x \to X$, gegeben durch $\Phi : (g, x^*) \to g \circ x^*$, eigentlich ist.

Es gilt die folgende Aussage:

Satz 2: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Operiert die topologische Gruppe G von Homöomorphismen von X auf sich lokal eigentlich auf X, so ist der Quotientenraum X/G ein regulärer (und damit auch hausdorffscher) topologischer Raum.*

Beweis: Wie beim Beweis von Satz 1 ergibt sich, daß der Zerlegungsraum X/Z_G ein T_1-Raum ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß jede offene Umgebung eines Punktes aus X/Z_G eine abgeschlossene Umgebung des Punktes enthält. Hieraus und aus der Gültigkeit des ersten Trennungsaxioms folgt nämlich, daß die Topologie auf X/Z_G auch dem hausdorffschen Trennungsaxiom genügt (siehe [9], S. 113). Es genügt also zu beweisen, daß jede offene saturierte Umgebung S_x eines Punktes $x \in X$ eine abgeschlossene saturierte Umgebung S_x^* von x enthält, die wiederum eine offene saturierte Umgebung S_x^{**} von x umfaßt. Nach Voraussetzung besitzt x eine Umgebung U_x, so daß die Abbildung $\Phi | G \times U_x \to X$ eigentlich ist. $\mathring{U}_x$ sei der offene Kern von U_x. $D_x := \mathring{U}_x \cap S_x$ stellt dann eine offene Umgebung von x dar, die nach Voraussetzung eine abgeschlossene Umgebung U_x^* von x enthält. $S_x^* := \mathscr{H}(U_x^*) = \Phi(G \times U_x^*)$ ist eine in S_x enthaltene saturierte abgeschlossene Umgebung von x, da die eigentliche Abbildung $\Phi | G \times U_x \to X$ die in $G \times U_x$ abgeschlossene Punktmenge $G \times U_x^*$ in eine abgeschlossene Teilmenge von X überführt. U_x^* enthält per definitionem eine offene Umgebung U_x^{**} von x. $S^{**} := \mathscr{H}(U_x^{**})$ stellt somit eine in S_x^* enthaltene offene saturierte Umgebung von x dar, q. e. d.

Wir wollen jetzt die Bedingungen von Definition 2 noch weiter verschärfen und fordern, daß die Gruppe G auf dem topologischen Raum X eigentlich operiert.

Definition 3 (E): Eine topologische Gruppe G (versehen mit der jointly continuous topology) von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X auf sich operiert *eigentlich* auf X, wenn die kanonische Abbildung $\Phi | G \times X \to X$ eigentlich ist.

Es gelten die folgenden Aussagen:

Satz 3: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Operiert die topologische Gruppe G von Homöomorphismen von X auf sich eigentlich auf X, dann* *ist* Z_G *eine eigentliche Zerlegung* (siehe [12]), *der Quotientenraum* X/G *stellt einen regulären topologischen Raum dar, und die kanonische Projektionsabbildung* $\pi/X \to X/G$ *ist eigentlich.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß G kompakt ist. Da die kanonische Abbildung $\Phi|G \times X \to X$ eigentlich ist, so liegt für jeden Punkt $x \in X$ $\Phi^{-1}(x)$ kompakt in $G \times X$. Die kanonische Projektion $\Theta|G \times X \to G$, gegeben durch $\Theta : (g, x) \to g$, bildet $\Phi^{-1}(x)$ auf ganz G ab, da $\Phi^{-1}(x)$ die Punktmenge $\{(g, g^{-1} \circ x) : g \in G\}$ umfaßt. Somit ist auch G als stetiges Bild von $\Phi^{-1}(x)$ kompakt. Liegt nun X^* kompakt in X, so ist $\mathscr{H}(X^*) = \Phi(G \times X^*)$ als Φ-Bild einer kompakten Menge wieder kompakt; d. h. die Zerlegung Z_G ist eigentlich. Wie beim Beweis von Satz 2 ergibt sich, daß X/Z_G ein regulärer topologischer Raum ist. Aus der Tatsache, daß die Zerlegung Z_G eigentlich ist, folgt sofort, daß die kanonische Projektion $\pi|X \to X/G$ eine eigentliche Abbildung darstellt (siehe [12]).

Als Beispiel kann man $C^n - \{O\}$ mit der folgenden topologischen Gruppe G von Homöomorphismen von $C^n - \{O\}$ auf sich betrachten. G bestehe aus den Abbildungen $z \to yz$, wobei $z \in C^n - \{O\}$ und y die von Null verschiedenen komplexen Zahlen durchläuft. Der Quotientenraum $(C^n - \{O\})/G$ ist homöomorph zum $(n-1)$-dimensionalen komplexen projektiven Raum P^{n-1}. Man sieht sofort, daß G auf $C^n - \{O\}$ lokal eigentlich operiert. Da G jedoch nicht kompakt ist, kann G nicht eigentlich auf $C^n - \{O\}$ operieren.

§ 2. Abbildungssätze für komplexe Mannigfaltigkeiten mit komplexen Lieschen Automorphismengruppen

In diesem Abschnitt sollen für n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten X^n, die komplexe Liesche Automorphismengruppen besitzen, die den Bedingungen (IE) und (SLE) genügen (siehe Einleitung), Abbildungssätze bewiesen werden, die in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung des Cartanschen Abbildungssatzes darstellen. Im nächsten Abschnitt werden diese Sätze dann zum Beweis der in der Einleitung angeführten Aussagen benutzt.

Zunächst noch eine Vorbemerkung. Unter einer q-dimensionalen komplexen Lieschen Automorphismengruppe sei eine topologische Gruppe L^q von Homöomorphismen eines komplexen Raumes X auf sich verstanden, die eine komplexe Struktur besitzt, die sie zu einer q-dimensionalen komplexen Lieschen Gruppe macht. Außerdem verlangen wir noch, daß die Abbildung $\Phi|L^q \times X \to X$, gegeben durch $\Phi : (v, x) \to v \circ x$, holomorph ist.

Jeder komplexen Lieschen Automorphismengruppe L kann man eine Klasse von sog. L-Mannigfaltigkeiten zuordnen: Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, G eine endliche Untergruppe von L und $h|G \to B(X)$ eine homomorphe Abbildung von G in die Gruppe $B(X)$ aller holomorphen Automorphismen von X, dann können wir jedem $g \in G$ einen holomorphen Automorphismus $\tau(g) : (v, x) \to$ $\to (v \circ g, (h(g))^{-1} \circ x)$ von $L \times X$ zuordnen. Die Abbildung $\tau|G \to B(L \times X)$ von G in die Gruppe $B(L \times X)$ aller holomorphen Automorphismen von $L \times X$ ist ein Antiisomorphismus. Der Quotientenraum $(L \times X)/\tau(G)$ ist wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit, die wir eine L-Mannigfaltigkeit nennen wollen.

Einfache Beispiele von L-Mannigfaltigkeiten sind L selbst und Produktmannigfaltigkeiten $L \times X$, wobei X eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Die L-Mannigfaltigkeiten $(L \times X)/\tau(G)$ besitzen Liesche Automorphismengruppen $\eta(L)$, die auf kanonische Weise durch L induziert werden. Zunächst kann man jedem $v' \in L$ einen holomorphen Automorphismus $\eta^*(v') : (v, x) \to (v' \circ v, x)$ von $L \times X$ zuordnen. Die Abbildung $\eta^* | L \to B(L \times X)$ stellt dabei einen Isomorphismus dar. Die holomorphen Automorphismen $\eta^*(v')$ und $\tau(g)$, $v' \in L$ und $g \in G$, von $L \times X$ sind kommutierbar, d. h. es gilt:

$$\tau(g) \circ \eta^*(v') = \eta^*(v') \circ \tau(g) . \tag{1}$$

Bezeichnet man die zu $(v, x) \in L \times X$ gehörige Äquivalenzklasse aus $(L \times X)/\tau(G)$ mit $[v, x]$, so ist die durch $\eta^*(v')$ induzierte Abbildung $\eta(v') : [v, x] \to [v' \circ v, x]$ wegen (1) unabhängig vom Repräsentanten und stellt somit einen holomorphen Automorphismus von $(L \times X)\tau(G)$ dar. Die Abbildung $\eta | L \to B((L \times X)/\tau(G))$ von L in die Gruppe aller holomorphen Automorphismen von $(L \times X)/\tau(G)$ ist ein Homomorphismus. Ist $\hat{\tau} | L \times X \to (L \times X)/\tau(G)$ die kanonische Projektion, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} L \times X \arrow[r, "\eta^*(v')"] \arrow[d, "\hat{\tau}"'] & L \times X \arrow[d, "\hat{\tau}"] \\ (L \times X)/\tau(G) \arrow[r, "\eta(v')"] & (L \times X)/\tau(G) \end{tikzcd} \tag{2}$$

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen über L-Mannigfaltigkeiten können wir als Hauptresultat dieses Paragraphen den folgenden lokalen Abbildungssatz formulieren:

Satz 4: *X^n sei eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, die eine zusammenhängende q-dimensionale komplexe Liesche Automorphismengruppe L^q, $q > 0$, zuläßt. L^q genüge den Bedingungen* (IE) *und* (SLE). *Dann besitzt jeder Punkt $x_0 \in X^n$ eine (in bezug auf die Gruppe L^q saturierte) offene zusammenhängende Umgebung S_{x_0} und es gibt eine durch x_0 laufende $(n-q)$-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit s_{x_0} von S_{x_0}, so daß gilt:*

1. s_{x_0} ist invariant gegenüber der Isotropiegruppe $G(x_0) := \{g : g \in L, g \circ x_0 = x_0\}$ und die saturierte Hülle $\mathscr{H}(s_{x_0})$ von s_{x_0} bezüglich L^q ist gleich S_{x_0}.

2. Es gibt eine biholomorphe Abbildung ψ_{x_0} von S_{x_0} auf die L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0))$. Die holomorphen Automorphismen $\tau(g)$, $g \in G(x_0)$, von $L^q \times s_{x_0}$ sind dabei durch $\tau(g) : (v, x) \to (v \circ g, g^{-1} \circ x)$ gegeben.

3. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S_{x_0} \arrow[r, "v' \in L^q"] \arrow[d, "\psi_{x_0}"'] & S_{x_0} \arrow[d, "\psi_{x_0}"] \\ (L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0)) \arrow[r, "\eta(v')"] & (L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0)) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dabei ist $\eta(v')$ der durch $v' \in L^q$ kanonisch induzierte Automorphismus der L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0))$.

Aus 3. ergibt sich sofort[1]*), daß die Automorphismengruppe L^q von S_{x_0} zu der durch L^q kanonisch induzierten Automorphismengruppe $\eta(L^q)$ der L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0))$ isomorph ist, und zwar vermöge der Zuordnung $\eta: v' \in L^q \to \psi_{x_0} \cdot v' \cdot \psi_{x_0}^{-1}$.*

Beweis: (U_{x_0}, φ_{x_0}) sei eine mit der komplexen Struktur von X^n verträgliche komplexe Karte einer offenen Umgebung U_{x_0} von $x_0 \in X^n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß U_{x_0} invariant gegenüber der Isotropiegruppe $G(x_0)$ ist und $\varphi_{x_0}(x_0) = O$ gilt.

Da die Ordnung der Gruppe $G(x_0)$ als endlich vorausgesetzt ist, können wir ihre Elemente mit g_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, bezeichnen, wobei $r = \mathrm{Ord}\,(G(x_0))$ ist. Die Abbildungen $g_\varrho^* := \varphi_{x_0} \circ g_\varrho \circ \varphi_{x_0}^{-1}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, stellen dann holomorphe Automorphismen von $\varphi_{x_0}(U_{x_0})$ dar, die den Nullpunkt festlassen. Sie lassen sich durch Systeme von n-holomorphen Funktionen beschreiben, die folgende Entwicklungen um den Nullpunkt besitzen, wenn wir die Koordinaten von $\varphi_{x_0}(U_{x_0})$ mit $z = (z_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, bezeichnen:

$$(4) \quad g_\varrho^* : z_\nu \to z_\nu^{(\varrho)} := f_\nu^{(\varrho)}(z) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{(\varrho)} \circ z + \cdots \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \varrho = 1, \ldots, r.$$

Setzen wir $A_\varrho = (a_{\nu\mu}^{(\varrho)})$, $\nu, \mu = 1, \ldots, n$, so läßt sich Abbildung (4) auch folgendermaßen darstellen:

$$g_\varrho^* : z \to z^{(\varrho)} = A_\varrho \circ z + \cdots,$$

wobei die Determinante von A_ϱ ungleich Null ist.

Durch die Abbildung

$$\chi : z \to w := \frac{1}{r} \sum_{\varrho=1}^{r} A_\varrho^{-1} \circ g_\varrho^*(z) = z + \cdots$$

wird eine Umgebung des Nullpunktes biholomorph auf eine Umgebung des Nullpunktes abgebildet. Wir können annehmen, daß U_{x_0} von vornherein so klein gewählt war, daß die Abbildung $\chi | \varphi_{x_0}(U_{x_0}) \to C^n$ selbst schon biholomorph ist. $(U_{x_0}, \tilde{\varphi}_{x_0})$ mit $\tilde{\varphi}_{x_0} := \chi \circ \varphi_{x_0}$ ist wieder eine mit der komplexen Struktur von X^n verträgliche Karte von U_{x_0}. Die Abbildungen $\tilde{g}_\varrho := \tilde{\varphi}_{x_0} \circ g_\varrho \circ \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}$ stellen holomorphe Automorphismen von $\tilde{\varphi}_{x_0}(U_{x_0})$ dar, wobei gilt: $\tilde{g}_\varrho : w \to w^{(\varrho)} = A_\varrho \circ w$, wie man leicht nachrechnet. Die Matrizen A_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, bilden eine zu $G(x_0)$ isomorphe Gruppe. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Matrizen A_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, unitär sind. Dies läßt sich stets durch eine nicht-singuläre Koordinatentransformation erreichen.

Es gibt eine offene Umgebung V_i der Identität i von L^q und eine Umgebung $\tilde{U}_{x_0} \subset U_{x_0}$ von x_0, so daß $\Phi(V_i \times \tilde{U}_{x_0}) \subset U_{x_0}$. Die Umgebung V_i von i sei klein genug gewählt, so daß sie eine mit der komplexen Struktur von L^q verträgliche komplexe Karte (V_i, σ_i) zuläßt. Die Koordinaten von $\sigma_i(V_i)$ seien mit $v = (v_\lambda)$, $\lambda = 1, \ldots, q$, bezeichnet und es sei $\sigma_i(i) = O$.

[1]) Es sei angenommen, daß L^q auf jeder Zusammenhangskomponente von X^n effektiv operiert.

Wir betrachten dann die holomorphe Abbildung $\tilde{\Phi}|\sigma_i(V_i) \times \tilde{\varphi}_{x_0}(\tilde{U}_{x_0}) \to \tilde{\varphi}_{x_0}(U_{x_0})$, die durch $\tilde{\Phi}: (v, w) \to \tilde{w} := \tilde{\varphi}_{x_0} \circ \Phi(\sigma_i^{-1}(v), \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(w))$ gegeben ist. Wir werden zeigen, daß der Rang der Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, w)}{\partial v_\mu}\right)_{v=0, w=0} := \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, w)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\Phi}(v, w)}{\partial v_q}\right)_{v=0, w=0}$$

gleich q ist.

$\tilde{V}_i \subset V_i$ sei eine Umgebung der Identität i mit der Eigenschaft, daß $\tilde{V}_i \circ \tilde{V}_i \subset V_i$. Für v und v^* aus $\sigma_i(\tilde{V}_i)$ ist dann durch die Zuordnung $(v, v^*) \to h(v, v^*) := \sigma_i(\sigma_i^{-1}(v) \circ \sigma_i^{-1}(v^*))$ eine holomorphe Abbildung von $\sigma_i(\tilde{V}_i) \times \sigma_i(\tilde{V}_i)$ in $\sigma_i(V_i)$ definiert ($h(v, v^*)$ habe die Komponenten $h_\lambda(v, v^*)$, $\lambda = 1, \ldots, q$), wobei die Funktionalmatrizen $\left(\frac{\partial h_\lambda(v, v^*)}{\partial v_\mu}\right)$ und $\left(\frac{\partial h_\lambda(v, v^*)}{\partial v_\mu^*}\right)$, $\lambda, \mu = 1, \ldots, q$, den Rang q besitzen.

Es gilt:

$$\tilde{\Phi}(h(v, v^*), w) = F_v \circ \tilde{\Phi}(v^*, w)\,, \tag{7}$$

wobei $F_v := \tilde{\varphi}_{x_0} \circ \sigma_i^{-1}(v) \circ \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}$ für festes v eine biholomorphe Abbildung von $\tilde{\varphi}_{x_0}(\tilde{U}_{x_0})$ in $\tilde{\varphi}_{x_0}(U_{x_0})$ ist. Aus (7) folgt:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(h(v, v^*), O)}{\partial v_\mu^*}\right)_{v^*=O} = \left(\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\lambda} \cdot \frac{\partial h_\lambda(v, v^*)}{\partial v_\mu^*}\right)_{v^*=O}$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\lambda}\right) \circ \left(\frac{\partial h_\lambda(v, v^*)}{\partial v_\mu^*}\right)_{v^*=O} = \left(\frac{\partial F_v(w^*)}{\partial w_\nu^*}\right)_{w^*=O} \circ \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v^*, O)}{\partial v_\mu^*}\right)_{v^*=O}.$$

Somit ist:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\lambda}\right) = C \circ \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v^*, O)}{\partial v_\lambda^*}\right)_{v^*=O} \circ D^{-1}\,, \tag{8}$$

wobei $C := \left(\frac{\partial F_v(w^*)}{\partial w_\nu^*}\right)_{w^*=O}$ den Rang n und $D := \left(\frac{\partial h_\lambda(v, v^*)}{\partial v_\mu^*}\right)_{v^*=O}$ den Rang q besitzt. Folglich ist der Rang von $\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\lambda}$ konstant. Definiert man den Rang einer holomorphen Abbildung φ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y im Punkte $x \in X$ durch $r_\varphi(x) :=$ Codimension von $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ (siehe [10]), dann hat die Abbildung $\tilde{\Phi}|\sigma_i(\tilde{V}_i) \times O \to \tilde{\varphi}_{x_0}(U_{x_0})$ in jedem Punkte $(v, O) \in \sigma_i(\tilde{V}_i) \times O$ den Rang q, da L^q der Bedingung (IE) genügt. Nach einem Hilfssatz von R. Remmert (siehe [10], S. 348) gilt dann, da $\varrho_{\tilde{\Phi}}(v, O) :=$ Rang $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)$ in allen Punkten (v, O) aus $\sigma_i(\tilde{V}_i) \times O$ denselben Wert annimmt, $\varrho_{\tilde{\Phi}}(v, O) = r_{\tilde{\Phi}}(v, O) = q$, speziell also $\varrho_{\tilde{\Phi}}(O, O) =$ Rang $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}$ $= q$. Da die Matrix $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}$ n Reihen und q Spalten hat, so muß notwendig $q \leq n$ sein.

Die Vektoren $\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_q}$ spannen für $v = O$ einen q-dimensionalen komplexen linearen Teilraum V^q des C^n auf. Es gibt eine unitäre Transformation

$w \to u = T \circ w$ des C^n auf sich, die V^q auf den Teilraum $\{u : u \in C^n, u_{q+1} = \cdots = u_n = 0\}$ abbildet. $(U_{x_0}, \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0})$ mit $\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} := T \circ \tilde{\varphi}_{x_0}$ stellt wieder eine mit der komplexen Struktur von X^n verträgliche Karte von U_{x_0} dar. Wir betrachten die holomorphe Abbildung $\tilde{\tilde{\Phi}} | \sigma_i(V_i) \times \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(\tilde{U}_{x_0}) \to \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(U_{x_0})$, die durch $\tilde{\tilde{\Phi}} : (v, u) \to \tilde{\tilde{u}} := \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ \Phi(\sigma_i^{-1}(v), \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}(u))$ gegeben ist. Es gilt: $\tilde{\tilde{\Phi}}(v,u) = T \circ \tilde{\Phi}(v, T^{-1} u)$.
Daraus folgt:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=o} = T \circ \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=o}.$$

Die Zeilenvektoren $Z^{(\nu)}$ der Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=o}$ sind damit für $\nu > q$ identisch Null.

Die Automorphismen $\tilde{\tilde{g}}_\varrho := \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ g_\varrho \circ \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1} = T \circ \tilde{g}_\varrho \circ T^{-1}, \varrho = 1, \ldots, r$, von $\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(U_{x_0})$ haben die Form $\tilde{\tilde{g}}_\varrho : u \to u^{(\varrho)} := B_\varrho \circ u$, wobei $B_\varrho := T \circ A_\varrho \circ T^{-1}$ wieder unitäre Matrizen sind. Wir behaupten nun, daß die B_ϱ alle die Form $B_\varrho = \begin{pmatrix} M_\varrho & O \\ O & N_\varrho \end{pmatrix}$ besitzen, wobei M_ϱ und N_ϱ quadratische q- bzw. $(n-q)$-reihige nicht-singuläre Matrizen darstellen. Hierzu wählen wir eine Umgebung $\tilde{\tilde{V}}_i$ der Identität von L^q mit der Eigenschaft, $g_\varrho \circ \tilde{\tilde{V}}_i \circ g_\varrho^{-1} \subset V_i$ für $\varrho = 1, \ldots, r$. Es gilt dann: $v^{(\varrho)} := K^{(\varrho)}(v) := \sigma_i(g_\varrho \circ \sigma_i^{-1}(v) \circ g_\varrho^{-1}) \in \sigma_i(V_i)$ für alle $v \in \sigma_i(\tilde{\tilde{V}}_i)$ und $\varrho = 1, \ldots, r$. Die Komponenten von $K^{(\varrho)}(v)$ seien mit $K_\lambda^{(\varrho)}(v)$, $\lambda = 1, \ldots, q$, bezeichnet. Man findet durch eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\Phi}}(v^{(\varrho)}, O) &= \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ \Phi(\sigma_i^{-1}(v^{(\varrho)}), \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}(O)) = \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ \Phi(g_\varrho \circ \sigma_i^{-1}(v) \circ g_\varrho^{-1}, x_0) \\
&= \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ (g_\varrho \circ \sigma_i^{-1}(v) \circ g_\varrho^{-1}) \circ x_0 = (\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ g_\varrho) \circ \sigma_i^{-1}(v) \circ x_0 \\
&= (\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ g_\varrho \circ \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}) \circ \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ (\sigma_i^{-1}(v) \circ \tilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(O)) \\
&= \tilde{\tilde{g}}_\varrho \circ \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0} \circ \Phi(\sigma_i^{-1}(v), \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}(O)) = \tilde{\tilde{g}}_\varrho \circ \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v^{(\varrho)}, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O} &= \left(\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v^{(\varrho)}, O)}{\partial v_\lambda^{(\varrho)}} \cdot \frac{\partial K_\lambda^{(\varrho)}(v)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O} \\
&= \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\lambda}\right)_{v=O} \circ \left(\frac{\partial K^{(\varrho)}(v)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O} = B_\varrho \circ \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}
\end{aligned}$$

oder

$$\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\lambda}\right)_{v=O} \circ K_\varrho = B_\varrho \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}, \tag{9}$$

wobei $K_\varrho := \left(\frac{\partial K^{(\varrho)}(v)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}$ eine quadratische q-reihige nicht-singuläre Matrix ist $\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}(v, O)}{\partial v_\mu}\right)_{v=O}$ können wir in der Form $\begin{pmatrix} F \\ O \end{pmatrix}$ schreiben, wobei F eine q-reihige quadratische nicht-singuläre Matrix ist. Zerlegen wir B_ϱ auf folgende Weise in

Teilmatrizen:
$$B_\varrho = \begin{pmatrix} M_\varrho & H_\varrho^{(1)} \\ H_\varrho^{(2)} & N_\varrho \end{pmatrix},$$
wobei M_ϱ und N_ϱ quadratische q- bzw. $(n-q)$-reihige Matrizen sind, dann können wir Gleichung (9) auch folgendermaßen schreiben:

(10) $$\begin{pmatrix} F \\ O \end{pmatrix} \circ K_\varrho = \begin{pmatrix} M_\varrho & H_\varrho^{(1)} \\ H_\varrho^{(2)} & N_\varrho \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} F \\ O \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt: $O = H_\varrho^{(2)} \circ F$ oder $H_\varrho^{(2)} = O$, da F nicht singulär ist. Da aber B_ϱ unitär ist, muß auch $H_\varrho^{(1)} = O$ sein, q. e. d.

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns jetzt dem eigentlichen Beweis von Satz 4 zuwenden.

E_ε sei ein in $\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(\tilde{U}_{x_0})$ gelegenes $(n-q)$-dimensionales Ebenenstück:
$$E_\varepsilon := \{u : u \in \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(\tilde{U}_{x_0}),\ u_1 = \cdots = u_q = 0,\ |u_{q+1}| < \varepsilon, \ldots, |u_n| < \varepsilon\}.$$
Dann betrachten wir die Abbildung $\Phi^* | \sigma_i(V_i) \times E_\varepsilon \to \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(U_{x_0})$, die aus $\tilde{\tilde{\Phi}}$ durch Beschränkung auf $\sigma_i(V_i) \times E_\varepsilon$ entsteht. Wir interessieren uns für den Rang der Funktionalmatrix von Φ^* im Punkte $(v, u^*) = O$, wobei $u^* := (u_{q+1}, \ldots, u_n)$ ist. Es gilt:

(11) $$\left(\frac{\partial \Phi^*(v,u^*)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi^*(v,u^*)}{\partial v_q}, \frac{\partial \Phi^*(v,u^*)}{\partial u_{q+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi^*(v,u^*)}{\partial u_n}\right)_{(v,u^*)=O} = \begin{pmatrix} F & O \\ O & E_{n-q} \end{pmatrix}$$

Dabei ist E_{n-q} die $(n-q)$-reihige Einheitsmatrix. Da F den Rang q besitzt, hat die Funktionalmatrix von Φ^* im Nullpunkt den Rang n. Somit stellt Φ^*, falls wir V_i und E_ε klein genug gewählt haben, eine biholomorphe Abbildung von $\sigma_i(V_i) \times E_\varepsilon$ auf eine in $\tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}(U_{x_0})$ gelegene offene Umgebung des Nullpunktes dar, während Φ selbst $V_i \times \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}(E_\varepsilon)$ biholomorph auf eine offene Umgebung $S_{x_0}^*$ des Punktes x_0 abbildet. Bezeichnen wir die bezüglich L^q saturierte Hülle $\mathscr{H}(S_{x_0}^*)$ von $S_{x_0}^*$ mit S_{x_0} und setzen wir $s_{x_0} := \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_0}^{-1}(E_\varepsilon)$, so ist S_{x_0} offen und zusammenhängend (wegen des Zusammenhangs von L^q), und es gilt: $\mathscr{H}(s_{x_0}) = S_{x_0}$. Da E_ε gegenüber den unitären Transformationen $\tilde{\tilde{g}}_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, r$, invariant ist, so bleibt s_{x_0} invariant gegenüber der Isotropiegruppe $G(x_0)$. Teil 1 von Satz 4 ist damit bewiesen.

Wir wissen, daß die Abbildung $\Phi | V_i \times s_{x_0} \to S_{x_0}$ injektiv ist. Definiert man $\hat{V}_i := \bigcup_{\varrho=1}^{r} V_i \circ g_\varrho$, so bleibt jedoch die Abbildung $\Phi | \hat{V}_i \times s_{x_0} \to S_{x_0}$ im allgemeinen nicht mehr injektiv. Es gilt: Zwei Punkte (v, x) und (v', x') aus $\hat{V}_i \times s_{x_0}$ haben genau dann dasselbe Φ-Bild, wenn es ein Element $g_\varrho \in G(x_0)$ gibt, so daß $(v', x') = (v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x)$ ist. Man sieht sofort, daß stets $\Phi(v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x) = \Phi(v, x)$ ist. Gilt andererseits: $(v, x) = \Phi(v', x')$, (v, x) und $v', x') \in \hat{V}_i \times s_{x_0}$, dann gibt es Elemente g_ϱ und $g_{\varrho'}$ aus $G(x_0)$, so daß $(v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x)$ und $(v' \circ g_{\varrho'}, g_{\varrho'}^{-1} \circ x')$ $\in V_i \times s_{x_0}$ und $\Phi(v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x) = \Phi(v' \circ g_{\varrho'}, g_{\varrho'}^{-1} \circ x')$ ist. Da aber $\Phi | V_i \times s_{x_0} \to S_{x_0}$ injektiv ist, so muß $(v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x) = (v' \circ g_{\varrho'}, g_{\varrho'}^{-1} \circ x')$ sein. Dies bedeutet aber nichts anderes als $(v', x') = (v \circ g_{\varrho^*}, g_{\varrho^*}^{-1} \circ x)$ mit $g_{\varrho^*} = g_\varrho \circ g_{\varrho'}^{-1} \in G(x_0)$.

Wir wollen nun zeigen, daß man ε und damit auch s_{x_0} so klein wählen kann, daß ganz allgemein gilt: (v, x) und $(v', x') \in L^q \times s_{x_0}$ haben genau dann dasselbe Φ-Bild, wenn es ein $g_\varrho \in G(x_0)$ gibt, so daß $(v', x') = (v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x)$ ist. Angenommen, diese Aussage sei falsch, dann gibt es gegen x_0 konvergente Folgen $\{x_\nu : x_\nu \in s_{x_0}, \nu = 1, 2, \ldots\}$ und $\{x'_\nu : x'_\nu \in s_{x_0}, \nu = 1, 2, \ldots\}$, so wie Folgen $\{v_\nu : v_\nu \in L^q\}$ und $\{v^*_\nu : v^*_\nu \in L^q\}$, so daß $\Phi(v^*_\nu, x'_\nu) = \Phi(v_\nu, x_\nu)$, während $(v^*, x') \neq (v_\nu g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x_\nu)$ für $\varrho = 1, \ldots, r$. Setzen wir $v'_\nu := v_\nu^{-1} \circ v^*_\nu$, so gilt ebenfalls $\Phi(v'_\nu, x'_\nu) = \Phi(i, x_\nu) = x_\nu$, während $(v'_\nu, x'_\nu) \neq (g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x_\nu)$ für $\varrho = 1, \ldots, r$. Da $(i, x_\nu) \in \hat{V}_i \times s_{x_0}$, so kann nach unseren Vorüberlegungen (v'_ν, x'_ν) nicht in $\hat{V}_i \times s_{x_0}$ liegen, also gilt: $v'_\nu \notin \hat{V}_i$ für $\nu = 1, 2, \ldots$

Wir wollen jetzt von der Voraussetzung Gebrauch machen, daß die Gruppe L^q schwach lokal eigentlich auf X^n operiert. Es gibt also eine Umgebung $\hat{U}_{x_0}$ (s_{x_0} sei so klein gewählt, daß $s_{x_0} \subset \hat{U}_{x_0}$), so daß die Abbildung $\Phi | L^q \times \hat{U}_{x_0} \to \mathscr{H}(\hat{U}_{x_0})$ eigentlich ist. Da $\{x_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\} \cup \{x_0\}$ kompakt in $s_{x_0} \subset \mathscr{H}(\hat{U}_{x_0})$ liegt, so muß $\Phi^{-1}(\{x_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\} \cup \{x_0\})$ kompakt in $L^q \times \hat{U}_{x_0}$ sein. Dann liegt aber auch $\Theta \circ \Phi^{-1}(\{x_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\} \cup \{x_0\})$ kompakt in L^q. Dabei ist $\Theta | L^q \times \hat{U}_{x_0} \to L^q$ die kanonische Projektion. Da $\{(v'_\nu, x'_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\} \subset \Phi^{-1}(\{x_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\} \cup \{x_0\})$, so liegt $\{v'_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ in einer kompakten Teilmenge von L^q und besitzt folglich eine konvergente unendliche Teilfolge $\{v'_{\nu_\mu} : \mu = 1, 2, \ldots\}$.

Es sei $\lim\limits_{\mu \to \infty} v'_{\nu_\mu} = v_0$. Da V_i und damit auch $\hat{V}_i$ offene Teilmengen von L^q darstellen, so liegt v_0 nicht in $\hat{V}_i$, da kein Glied der Folge $\{v'_{\nu_\mu} : \mu = 1, 2, \ldots\}$ zu $\hat{V}_i$ gehört. Da nun die Isotropiegruppe $G(x_0)$ in $\hat{V}_i$ enthalten ist, so gehört v_0 nicht zu $G(x_0)$. Andererseits ergibt sich im Widerspruch hierzu: $x_0 = \lim\limits_{\mu \to \infty} x_{\nu_\mu} = \lim\limits_{\mu \to \infty} \Phi(v'_{\nu_\mu}, x'_{\nu_\mu}) = \Phi(v_0, x_0) = v_0 \circ x_0$, was nämlich bedeutet, daß v_0 zur Isotropiegruppe $G(x_0)$ gehört. Wir können also annehmen (falls nur s_{x_0} klein genug gewählt ist), daß (v, x) und $(v', x') \in L^q \times s_{x_0}$ genau dann dasselbe Φ-Bild haben, wenn es ein $g_\varrho \in G(x_0)$ gibt, so daß $(v', x') = v \circ g_\varrho, g_\varrho^{-1} \circ x)$ ist.

Ordnen wir dem Automorphismus $g \in G(x_0)$ den Automorphismus $\tau(g) : (v, x) \to (v \circ g, g^{-1} \circ x)$ von $L^q \times s_{x_0}$ zu, so bestehen die $\tau(G)$-Äquivalenzklassen von $L^q \times s_{x_0}$ genau aus solchen Punkten, die bei der Abbildung $\Phi | L^q \times s_{x_0} \to S_{x_0}$ denselben Bildpunkt in S_{x_0} haben.

$\psi_{x_0} := \hat{\tau} \circ \Phi^{-1} | S_{x_0} \to (L^q \times s_{x_0}) / \tau(G(x_0))$ stellt somit eine bijektive Abbildung dar. Dabei ist $\hat{\tau} | L^q \times s_{x_0} \to (L^q \times s_{x_0}) / \tau(G(x_0))$ die kanonische Projektion von $L^q \times s_{x_0}$ auf den Quotientenraum von $L^q \times s_{x_0}$ nach $\tau(G(x_0))$. Da in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & L^q \times s_{x_0} \arrow[dl, "\hat{\tau}"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0)) & & S_{x_0} \arrow[ll, "\psi_{x_0}"'] \end{tikzcd}$$

Φ und $\hat{\tau}$ surjektive eigentliche holomorphe Abbildungen darstellen und ψ_{x_0} eindeutig erklärt ist, so ist auch die Abbildung ψ_{x_0} holomorph (siehe [10], S. 363).

Insgesamt erweist sich also ψ_{x_0} als eine biholomorphe Abbildung von S_{x_0} auf die L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0))$. Damit ist auch Punkt 2 von Satz 4 bewiesen.

Wie in den Vorbemerkungen dieses Paragraphen über L-Mannigfaltigkeiten können wir jedem $v' \in L^q$ auf kanonische Weise Automorphismen $\eta^*(v')$ und $\eta(v')$ von $L^q \times s_{x_0}$ bzw. $(L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0))$ zuordnen, so daß (siehe Diagramm (2)) das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} S_{x_0} & \xrightarrow{v'} & S_{x_0} \\ \uparrow{\scriptstyle \Phi} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi} \\ L^q \times s_{x_0} & \xrightarrow{\eta^*(v')} & L^q \times s_{x_0} \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\tau}} \\ (L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0)) & \xrightarrow{\eta(v')} & (L^q \times s_{x_0})/\tau(G(x_0)) \end{array} \tag{12}$$

Die Kommutativität für den oberen Teil von Diagramm (12) ergibt sich sofort aus der Gleichung:

$$v' \circ \Phi(v, x) = (v' \circ v) \circ x = \Phi(v' \circ v, x) = \Phi \circ \eta^*(v') \circ (v, x)\,.$$

Die Kommutativität von Diagramm (3) ergibt sich jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi_{x_0} \circ v' &= \psi_{x_0} \circ (v' \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} = (\hat{\tau} \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \eta^*(v')) \circ \Phi^{-1} \\ &= (\hat{\tau} \circ \eta^*(v')) \circ \Phi^{-1} = \eta(v') \circ \hat{\tau} \circ \Phi^{-1} = \eta(v') \circ \psi_{x_0}\,. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Mit Hilfe dieses lokalen Abbildungssatzes kann man sofort den folgenden globalen Abbildungssatz gewinnen.

Satz 5: *X^n sei eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, die eine zusammenhängende q-dimensionale komplexe Liesche Automorphismengruppe L^q, $q > 0$, zuläßt. L^q genüge den Bedingungen (IE) und (SLE). Dann besitzt X^n einen Atlas $\{(S_i, \psi_i) : i \in I\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. S_i stellt für jedes $i \in I$ eine bezüglich L^q saturierte zusammenhängende offene Menge in X^n dar. Es gilt: $\bigcup_{i \in I} S_i = X^n$.

2. ψ_i bildet S_i biholomorph auf eine L^q-Mannigfaltigkeit ab. Die durch L^q kanonisch induzierte Liesche Automorphismengruppe $\eta_i(L^q)$ von $\psi_i(S_i)$ ist zu L^q auf kanonische Weise isomorph. $\psi_i(S_i \cap S_j)$ ist ebenfalls eine L^q-Mannigfaltigkeit, wobei $\eta_i(L^q)$ (beschränkt auf $\psi_i(S_i \cap S_j)$) gleich der durch L^q kanonisch induzierten Lieschen Automorphismengruppe von $\psi_i(S_i \cap S_j)$ ist.

3. Die Automorphismen $\eta_i(v')$ und $\eta_j(v')$ $(v' \in L^q)$ von $\psi_i(S_i)$ bzw. $\psi_j(S_j)$, $i, j \in I$, sind mit den Kartentransformationen $\psi_{ij} := \psi_i \circ \psi_j^{-1} | \psi_j(S_i \cap S_j) \to \psi_i(S_i \cap S_j)$ verträglich, d. h. es gilt:

$$\psi_{ij} \circ \eta_j(v') = \eta_i(v') \circ \psi_{ij}\,. \tag{13}$$

Beweis: Nach Satz 4 können wir jedem Punkt $x \in X^n$ eine saturierte zusammenhängende offene Umgebung S_x und eine Karte (S_x, ψ_x) zuordnen, so daß

$\psi_x(S_x)$ eine L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_x)/\tau_x(G(x))$ darstellt, wobei s_x eine durch x laufende, gegenüber der Isotropiegruppe $G(x)$ invariante komplexe Untermannigfaltigkeit von S_x ist mit der Eigenschaft, daß $\mathscr{H}(s_x) = S_x$ ist. Die kanonisch induzierte Liesche Automorphismengruppe $\eta_x(L^q)$ von $(L^q \times s_x)/\tau_x(G(x))$ ist dabei zu L^q isomorph.

Es bleibt zu zeigen, daß $\psi_x(S_x \cap S_{x'})$, $x, x' \in X^n$, wieder eine L^q-Mannigfaltigkeit ist. $s_x^{x'} := s_x \cap S_{x'}$ stellt eine gegenüber $G(x)$ invariante komplexe Untermannigfaltigkeit von $S_x \cap S_{x'}$ dar, so daß gilt: $\mathscr{H}(s_x^{x'}) = S_x \cap S_{x'}$. Nach der Definition von ψ_x ist dann $\psi_x(S_x \cap S_{x'}) = (L^q \times s_x^{x'})/\tau_x(G(x))$. $\psi_x(S_x \cap S_{x'})$ stellt somit wieder eine L^q-Mannigfaltigkeit dar. Beschränkt man die Automorphismen $\eta_x(v')$ aus $\eta_x(L^q)$ auf $\psi_x(S_x \cap S_{x'})$, so erhält man gerade die durch $v' \in L^q$ kanonisch induzierten holomorphen Automorphismen von $\psi_x(S_x \cap S_{x'})$.

Nach Satz 4 gilt:

$$\psi_x \circ v' = \eta_x(v') \circ \psi_x .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \eta_x(v') \circ \psi_{xx'} &= \eta_x(v') \circ \psi_x \circ \psi_{x'}^{-1} = \psi_x \circ v' \circ \psi_{x'}^{-1} \\ &= (\psi_x \circ \psi_{x'}^{-1}) \circ (\psi_{x'} \circ v') \circ \psi_{x'}^{-1} = \psi_{xx'} \circ (\eta_{x'}(v') \circ \psi_{x'}) \circ \psi_{x'}^{-1} \\ &= \psi_{xx'} \circ \eta_{x'}(v') . \end{aligned}$$

Damit stellt $\{(S_{x'}\, \psi_x) : x \in X^n\}$ einen Atlas von X^n mit den gewünschten Eigenschaften 1)–3) dar.

Bevor wir weitere Abbildungssätze aussprechen können, müssen wir uns den durch Liesche Automorphismengruppen gegebenen Zerlegungsräumen zuwenden.

§ 3. Durch komplexe Liesche Automorphismengruppen erzeugte analytische Zerlegungen von komplexen Mannigfaltigkeiten

Wir wollen uns zunächst auf die Untersuchung von L-Mannigfaltigkeiten beschränken. Eine L-Mannigfaltigkeit ist bekanntlich durch eine komplexe Mannigfaltigkeit X, eine endliche Untergruppe G von L und einen Homomorphismus $h|G \to B(X)$ eindeutig festgelegt; dabei verstehen wir unter $B(X)$ die Gruppe aller holomorphen Automorphismen von X. Die L-Mannigfaltigkeit selbst ist dann als der Quotientenraum $(L \times X)/\tau(G)$ definiert (siehe § 2). Die durch L kanonisch induzierte Liesche Automorphismengruppe $\eta(L)$ von $(L \times X)/\tau(G)$ gibt Anlaß zu einer Zerlegung der L-Mannigfaltigkeit $(L \times X)/\tau(G)$. Es gilt die folgende Aussage:

Satz 6: *In einer L-Mannigfaltigkeit $(L \times X)/\tau(G)$ mit der durch L kanonisch induzierten Lieschen Automorphismengruppe $\eta(L)$ ist die durch $\eta(L)$ gegebene Zerlegung $Z_{\mu(L)}$ analytisch, und zwar läßt sich dem Quotientenraum $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ selbst eine (normale) komplexe Struktur aufprägen. Außerdem sind die Forderungen (Q_1) und (Q_2) erfüllt.*

Beweis: Die kanonische Projektion $\hat{\tau}|L \times X \to (L \times X)/\tau(G)$ stellt eine offene eigentliche holomorphe Abbildung dar. Da $h(G)$ als endliche Automorphismengruppe von X eigentlich diskontinuierlich auf X operiert, besitzt der

Quotientenraum $X/h(G)$ eine normale komplexe Struktur und die kanonische Projektion $\pi|X \to X/h(G)$ ist ebenfalls eine offene eigentliche holomorphe Abbildung. $\tilde{p}|L \times X \to X$ sei die durch $\tilde{p}: (v, x) \to x$ gegebene kanonische Projektion. Bezeichnet man die Klasse aus $(L \times X)/\tau(G)$, in der das Element (v, x) liegt, mit $[v, x]$, so ist die Zuordnung $p: [v, x] \to [x] \in X/h(G)$ unabhängig vom Repräsentanten und stellt somit eine eindeutige Abbildung von $(L \times X)/\tau(G)$ auf $X/h(G)$ dar. Wie man sieht, ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$(*)\qquad \begin{array}{ccc} L \times X & \xrightarrow{\hat{\tau}} & (L \times X)/\tau(G) \\ {\scriptstyle\tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & X/h(G) \end{array}$$

Aus der Kommutativität von Diagramm (*) ergibt sich sofort, daß die Abbildung $p \circ \hat{\tau}|L \times X \to X/h(G)$ holomorph ist. Da $\hat{\tau}$ eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung darstellt und p eindeutig definiert ist, so muß die Abbildung p holomorph sein (siehe [10], S. 363). Da die Abbildungen $\hat{\tau}$, $\tilde{\pi}$ und $\tilde{p}$ offen sind, so muß dasselbe für p gelten.

Wir behaupten nun, daß der Quotientenraum $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ zum Quotientenraum $X/h(G)$ topologisch äquivalent ist. Bezeichnet man die Äquivalenzklasse aus $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$, die durch $(v, x) \in L \times X$ erzeugt wird, mit $[[v, x]]$, so ist die Zuordnung $t: [[v, x]] \to [x] \in X/h(G)$ vom Repräsentanten unabhängig, wie man leicht nachweist, und stellt somit eine eindeutig definierte Abbildung von $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ auf $X/h(G)$ dar. Die Eindeutigkeit der Abbildung t ergibt sich wie folgt: Ist $[[v_1, x_1]] \neq [[v_2, x_2]]$, dann haben die Teilmengen $\{(v \circ v_\nu \circ g, (h(g))^{-1} \circ x_\nu) : v \in L, g \in G\}$, $\nu = 1, 2$, von $L \times X$ keinen Punkt gemeinsam. Daraus folgt speziell, daß stets $(h(g'))^{-1} \circ x_1 \neq (h(g''))^{-1} \circ x_2$ ist, wobei g' und g'' beliebig aus G genommen sind. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß stets gilt: $x_1 \neq h(g) \circ x_2$, $g \in G$. Folglich ist $[x_1] \neq [x_2]$.

$k|(L \times X)/\tau(G) \to [(L \times X)/\tau(G)/\eta(L)$ sei die kanonische Projektionsabbildung. Sie ist stetig und offen. Das folgende Diagramm ist, wie man sofort sieht, kommutativ:

$$(14)\qquad \begin{tikzcd} & (L \times X)/\tau(G) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "p"] & \\ {[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)} \arrow[rr, "t"] & & X/h(G) \end{tikzcd}$$

Da die Abbildungen k und p beide stetig und offen sind und t eineindeutig abbildet, so stellt t eine topologische Abbildung dar.

Damit läßt sich die normale komplexe Struktur von $X/h(G)$ auf den Quotientenraum $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ von $(L \times X)/\tau(G)$ nach $\eta(L)$ übertragen. Da p eine holomorphe Abbildung darstellt, ist die Projektionsabbildung $k = t^{-1} \circ p|(L \times X)/\tau(G) \to [(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ per definitionem holomorph.

$f|(L \times X)/\tau(G) \to Y$ sei eine holomorphe Abbildung von $(L \times X)/\tau(G)$ in einem komplexen Raum Y, die auf den $\eta(L)$-äquivalenten Punkten von $(L \times X)/\tau(G)$ gleiche Werte annimmt. f ist auf den Fasern der Abbildung k konstant, definiert also in eindeutiger Weise eine Abbildung f^* : $= f \circ k^{-1}|[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L) \to Y$. Da k eine surjektive offene holomorphe Abbildung darstellt und $f = f^* \circ k$ gilt, so ist f^* ebenfalls eine holomorphe Abbildung (siehe [12], S. 76). Hieraus ergibt sich speziell, daß jeder $\eta(L)$-invarianten holomorphen Funktion f auf $(L \times X)/\tau(G)$ eine holomorphe Funktion f^* auf $[(L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)$ zugeordnet werden kann, so daß gilt $f = f^* \circ k$. Die durch k induzierte Abbildung $k^*|I([L \times X)/\tau(G)]/\eta(L)) \to I((L \times X)/\tau(G), \eta(L))$ gegeben durch $k^*: f^* \to f := f^* \circ k$, ist also ein surjektiver Isomorphismus (siehe [10], S. 369). Damit ist Satz 6 bewiesen.

Bevor wir die in der Einleitung angeführten Aussagen 1.—3. beweisen, müssen wir den Begriff des komplexen Raumes etwas verallgemeinern, und zwar werden wir auf das hausdorffsche Trennungsaxiom verzichten und dafür nur das Trennungsaxiom T_1 fordern.

Definition 4: Unter einer n-dimensionalen komplexen Karte auf einem T_1-Raum verstehen wir ein Paar (U, φ), wobei U eine offene zusammenhängende Menge in X ist und φ eine topologische Abbildung von U auf einen n-dimensionalen komplexen Raum darstellt. Ein pseudo-komplexer Atlas eines T_1-Raumes X ist dann eine Kollektion $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ von komplexen Karten auf X, wobei gilt: 1. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. 2. Ist $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|\varphi_j(U_{ij}) \to \varphi_i(U_{ij})$ eine biholomorphe Abbildung des komplexen Raumes $\varphi_j(U_{ij})$ auf den komplexen Raum $\varphi_i(U_{ij})$.

Erfüllen zwei Karten (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j) Bedingung 2. von Definition 4, so sollen sie holomorph verträglich genannt werden. Enthält ein Atlas $\mathfrak{A}$ eines T_1-Raumes jede komplexe Karte (U, φ), die mit allen komplexen Karten aus $\mathfrak{A}$ holomorph verträglich ist, dann heißt $\mathfrak{A}$ ein kompletter pseudokomplexer Atlas von X oder eine pseudo-komplexe Struktur auf X.

Definition 5: Ein T_1-Raum mit einer pseudo-komplexen Struktur heißt ein pseudo-komplexer Raum.

Wie auf komplexen Räumen, so lassen sich auch auf pseudo-komplexen Räumen holomorphe Funktionen einführen.

Satz 7: *Ist X^n eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und L^q eine zusammenhängende q-dimensionale $(q > 0)$ komplexe Liesche Automorphismengruppe von X^n, die den Bedingungen (IE) und (SLE) genügt, dann läßt sich dem Quotientenraum X^n/L^q eine (normale) pseudo-komplexe Struktur aufprägen. Dabei gelten die Aussagen (Q_1) und (Q_2).*

Beweis: X^n besitzt einen komplexen Atlas $\{(S_i, \psi_i) : i \in I\}$, der den Bedingungen 1.—3. von Satz 5 genügt. Dabei können wir annehmen, daß die L^q-Mannigfaltigkeit $\psi_i(S_i)$ die Form $(L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))$ besitzt, wobei s_{x_0} eine zusammenhängende durch einen Punkt $x_i \in S_i$ laufende komplexe Untermannigfaltigkeit von S_i ist. Es gilt $\mathscr{H}(s_{x_i}) = S_i$ (siehe Satz 4).

Der Quotientenraum X^n/L^q ist nach Satz 1 von § 1 ein T_1-Raum. Die kanonische Projektionsabbildung $\pi|X^n \to X^n/L^q$ ist stetig und offen. $U_i := \pi(S_i)$ stellt daher eine zusammenhängende offene Teilmenge von X^n/L^q dar, und zwar ist U_i gerade gleich dem Quotienten S_i/L^q.

Da der durch $v' \in L^q$ kanonisch induzierte holomorphe Automorphismus $\eta_i(v')$ von $\psi_i(S_i) = (L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))$ der Gleichung $\eta_i(v') \circ \psi_i = \psi_i \circ v'$ genügt (siehe Satz 4, Diagramm (3)), so bildet ψ_i die L^q-Äquivalenzklassen von S_i eineindeutig auf die $\eta_i(L^q)$-Äquivalenzklassen von $(L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))$ ab. ψ_i induziert also auf natürliche Weise eine eineindeutige Abbildung $\tilde{t}_i|U_i \to [(L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))]/\eta_i(L^q)$, so daß das folgende Diagramm kommutativ wird:

(15)

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\pi"] & (L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i)) \arrow[d, "k_i"] \arrow[dr, "p_i"] & \\
U_i \arrow[r, "\tilde{t}_i"] & {[(L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))]/\eta_i(L^q)} \arrow[r, "t_i"] & s_{x_i}/G(x_i)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind k_i, t_i, p_i wie in Diagramm (14) definiert.

Da ψ_i eine topologische Abbildung ist und π und k_i stetige offene Abbildungen darstellen, so ist $\tilde{t}_i$ ebenfalls topologisch. Wir behaupten nun, daß $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ mit $\varphi_i := t_i \circ \tilde{t}_i$ ein pseudo-komplexer Atlas von X^n/L^q ist. φ_i bildet die zusammenhängende offene Teilmenge U_i von X^n/L^q per definitionem topologisch auf den $(n-q)$-dimensionalen (normalen) komplexen Raum $s_{x_i}/G(x_i)$ ab. (U_i, φ_i) stellt somit eine komplexe Karte auf dem T_1-Raum X^n/L^q dar. Wir haben zu zeigen, daß $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ den Bedingungen 1. und 2. von Definition 4 genügt. Ad 1. sieht man sofort, daß $\bigcup_{i \in I} U_i = X^n/L^q$ ist. Ad 2. überlegt man sich, daß die Abbildung $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|\varphi_j(U_{ij}) \to \varphi_i(U_{ij})$, falls $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = (\varphi_i \circ \pi) \circ (\pi^{-1} \circ \varphi_j^{-1}) = (\varphi_i \circ \pi)\,(\varphi_j \circ \pi)^{-1} = \chi_i \circ \chi_j^{-1}$$

mit $\chi_i := p_i \circ \psi_i$. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$\chi_i = \varphi_{ij} \circ \chi_j\,. \tag{16}$$

Da χ_i und χ_j holomorphe Abbildungen von $S_i \cap S_j$ auf $\varphi_i(U_{ij})$ bzw. $\varphi_j(U_{ij})$ darstellen und die Abbildung φ_{ij} von $\varphi_j(U_{ij})$ auf $\varphi_i(U_{ij})$ topologisch ist, so ist φ_{ij} sogar holomorph (siehe [12], S. 74).

Der pseudo-komplexe Atlas $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ von X^n/L^q läßt sich komplettieren zu einer pseudo-komplexen Struktur auf X^n/L^q. Die Gültigkeit der Aussagen (Q_1) und (Q_2) ergibt sich sofort aus den entsprechenden Aussagen über L^q-Mannigfaltigkeiten (siehe Satz 6).

Verschärfen wir die Voraussetzungen von Satz 7 und fordern, daß die Gruppe L^q den Bedingungen (IE) und (LE) genügt, so können wir zunächst wie beim Beweis von Satz 7 schließen, daß der Quotientenraum X^n/L^q eine (normale) pseudo-komplexe Struktur besitzt. Nach Satz 2, § 1, wissen wir aber, daß X^n/L^q

hausdorffsch ist; somit ist X^n/L^q ein (normaler) komplexer Raum. Es gilt der folgende Satz:

Satz 8: *Ist X^n eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und L^q eine q-dimensionale ($q > 0$) zusammenhängende komplexe Liesche Automorphismengruppe von X^n, die den Bedingungen (IE) und (LE) genügt, dann besitzt der Quotientenraum X^n/L^q eine (normale) komplexe Struktur, so daß die Aussagen (Q_1) und (Q_2) gelten.*

Genügt L^q sogar der stärkeren Bedingung (E) statt (LE), so gilt zusätzlich, daß die kanonische Projektionsabbildung $\pi|X^n \to X^n/L^q$ eigentlich ist.

Der zweite Teil von Satz 8 ergibt sich sofort aus Satz 3, § 1.

Die Sätze 7 und 8 können nun benutzt werden, um weitere Abbildungssätze zu gewinnen, die in gewisser Hinsicht Verallgemeinerungen des Cartanschen Abbildungssatzes darstellen (siehe [1] und [3]). Dabei wollen wir unsere Untersuchungen auf solche komplexe Mannigfaltigkeiten beschränken, die komplexe Liesche Automorphismengruppen besitzen, die auf den Mannigfaltigkeiten echt operieren.

Definition 6: Eine Gruppe G von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X auf sich operiert *echt* auf X, wenn alle Isotropiegruppen $G(x)$, $x \in X$, aus der Identität allein bestehen.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 9: *Ist X^n eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und L^q eine zusammenhängende q-dimensionale komplexe Liesche Automorphismengruppe von X^n, die auf X^n echt operiert und der Bedingung (SLE) genügt, dann ist X^n holomorph äquivalent zu einem pseudo-komplex-analytischen Prinzipalfaserbündel über der Basis X^n/L^q mit L^q als typischer Faser und Strukturgruppe.*

Wir benutzen folgende Definition eines komplex- (bzw. pseudo-komplex-) analytischen Faserbündels (siehe [8], S. 43f.):

Definition 7: Ein komplexer Raum X mit einer holomorphen Projektionsabbildung π von X auf einen komplexen (bzw. pseudo-komplexen) Raum Y heißt ein komplex- (bzw. pseudo-komplex-) analytisches Faserbündel über Y mit F als typischer Faser und G als Strukturgruppe, wenn folgendes gilt:

1. F ist ein komplexer Raum und G eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von F, die auf F effektiv operiert (siehe [8], S. 43).

2. Y besitzt eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ von offenen Mengen und es gibt biholomorphe Abbildungen h_i von $\pi^{-1}(U_i)$ auf $F \times U_i$, die für jedes $u \in U_i$ die Faser $\pi^{-1}(u)$ (der Projektion π) auf $F \times u$ abbilden.

3. Zu jedem Paar $i, j \in I$ mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gibt es $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, G_\omega)$, so daß die Abbildung $h_{ij} := h_i \circ h_j^{-1}|F \times U_{ij} \to F \times U_{ij}$ die Form $(f, u) \to$ $\to (g_{ij}(u) \circ f, u)$ besitzt. Dabei ist $\Gamma(U_{ij}, G_\omega)$ gleich der Gruppe der holomorphen Abbildungen von U_{ij} in G.

Beweis von Satz 9: Für X^n mit der kanonischen holomorphen Projektionsabbildung π von X^n auf den pseudo-komplexen Raum X^n/L^q sind die Bedingungen 1—3 nachzuweisen.

Bedingung 1 ist per definitionem erfüllt, da L^q eine komplexe Liesche Autophorismengruppe darstellt, die durch Linkstranslation effektiv auf sich selbst operiert.

Ad 2 machen wir jetzt von den Sätzen 4, 5 und 7 Gebrauch. Danach besitzt X^n einen Atlas $\{(S_i, \psi_i) : i \in I\}$, wobei $\psi_i(S_i)$ eine L^q-Mannigfaltigkeit $(L^q \times s_{x_i})/\tau_i(G(x_i))$ darstellt und s_{x_i} eine durch einen Punkt $x_i \in s_i$ laufende komplexe Untermannigfaltigkeit von S_i ist. Da L^q echt auf X^n operiert, so besteht $G(x_i)$ und damit auch $\tau_i(G(x_i))$ stets aus der Identität allein; d. h. $\psi_i(S_i) = L_q \times s_{x_i}$.

Der Quotientenraum X^n/L^q besitzt einen pseudo-komplexen Atlas $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ (siehe Beweis zu Satz 7), wobei $\pi^{-1}(U_i) = S_i$ und $\varphi_i(U_i) = s_{x_i}$ ist. Die Abbildung $\varphi_i | U_i \rightarrow s_{x_i}$ induziert eine biholomorphe Abbildung $\hat{\varphi}_i | L^q \times s_{x_i} \rightarrow L^q \times U_i$, wenn wir $\hat{\varphi}_i : (v, x) \rightarrow (f, u) := (v^{-1}, \varphi_i^{-1}(x))$ definieren. $h_i := \hat{\varphi}_i \circ \psi_i$ stellt damit für jedes $i \in I$ eine biholomorphe Abbildung von $S_i = \pi^{-1}(U_i)$ auf $L^q \times U_i$ dar. $\mathfrak{U} := \{U_i : i \in I\}$ ist per definitionem eine offene Überdeckung von X^n/L^q. Zu Punkt 2. bleibt also nur noch zu zeigen, daß für jedes $u \in U_i$ die Faser $\pi^{-1}(u)$ der Projektion π durch h_i auf $L^q \times u$ abgebildet wird. $u \in U_i$ läßt sich schreiben als $u = \varphi_i^{-1}(x)$, $x \in s_{x_i}$. Da $\pi^{-1}(u)$ gleich der bezüglich L^q saturierten Hülle $\mathscr{H}(x)$ von x ist, so ist per definitionem $\psi_i(\pi^{-1}(u)) = L^q \times x$ und damit auch $h_i(\pi^{-1}(u)) = L^q \times u$.

Ad 3 haben wir die Abbildung $h_{ij} := h_i h_j^{-1}$ von $L^q \times U_{ij}$ auf sich zu untersuchen. Wir wollen zunächst zeigen, daß die Abbildung $\psi_{ij} := \psi_i \circ \psi_j^{-1}$ von $\psi_j(S_i \cap S_j) = L^q \times s_{x_i}^{(j)}$ auf $\psi_i(S_i \cap S_j) = L^q \times s_{x_j}^{(i)}$ sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$\psi_{ij}(v^{(j)}, x^{(j)}) \rightarrow (v^{(i)}, x^{(i)}) := (v^{(j)} \circ \hat{g}_{ij}(x^{(j)}), \varphi_{ij}(x^{(j)})) . \tag{17}$$

$\hat{g}_{ij}$ stellt hier eine holomorphe Abbildung von $s_{x_j}^{(i)} := s_{x_j} \cap S_i$ in L^q dar. Sie ist definiert durch die Zuordnung: $x^{(j)} \rightarrow \Theta \circ \psi_{ij}(\mathrm{id}, x^{(j)})$, wobei $\Theta : (v, x) \rightarrow v$ die kanonische Projektion von $L^q \times s_{x_i}$ auf L^q darstellt und id gleich der Identität von L^q ist. Zum Beweis von Gleichung (17) hat man sich zunächst zu überlegen, daß Gleichung (16) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$p_i \circ \psi_{ij} = \varphi_{ij} \circ p_j , \tag{18}$$

wobei $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist und p_i die kanonische Projektionsabbildung von $L^q \times s_{x_i}$ auf s_{x_i} darstellt. Außerdem besitzen jetzt die durch $v' \in L^q$ kanonisch induzierten holomorphen Automorphismen $\eta_i(v')$ von $L^q \times s_{x_i}$ die einfache Form: $\eta_i(v') : (v, x) \rightarrow (v' \circ v, x)$. Unter Benutzung der Gleichungen (13) und (18) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\psi_{ij}(v^{(j)}, x^{(j)}) &= \psi_{ij} \circ \eta_j(v^{(j)}) \circ (\mathrm{id}, x^{(j)}) = \eta_i(v^{(j)}) \circ \psi_{ij}(\mathrm{id}, x^{(j)})\\ &= (v^{(j)} \circ [\Theta \circ \psi_{ij}(\mathrm{id}, x^{(j)})], p_i \circ \psi_{ij}(\mathrm{id}, x^{(j)}))\\ &= (v^{(j)} \circ \hat{g}_{ij}(x^{(j)}), \varphi_{ij} \circ p_j \circ (\mathrm{id}, x^{(j)})) = (v^{(j)} \circ \hat{g}_{ij}(x^{(j)}), \varphi_{ij}(x^{(j)})) .\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung (17) erhält man jetzt:

$$\begin{aligned} h_{ij} \circ (f, u) &= (\hat{\varphi}_i \circ \psi_i) \circ (\psi_j^{-1} \circ \hat{\varphi}_j^{-1}) \circ (f, u) = \hat{\varphi}_i \circ \psi_{ij} \circ \hat{\varphi}_j^{-1}(f, u) \\ &= \hat{\varphi}_i \circ \psi_{ij}(f^{-1}, \varphi_j(u)) = \hat{\varphi}_i\big(f^{-1} \circ \hat{g}_{ij}(\varphi_j(u)), \varphi_{ij} \circ \varphi_j(u)\big) \\ &= \big([\hat{g}_{ij}(\varphi_j(u))]^{-1} \circ f, \varphi_i^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \varphi_j(u)\big) = (g_{ij}(u) \circ f, u)\,, \end{aligned}$$

wobei $g_{ij}\colon u \to [\hat{g}_{ij}(\varphi_j(u))]^{-1}$ eine holomorphe Abbildung von U_{ij} in L^q ist; d. h. $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, L^q_\omega)$, q. e. d.

Ersetzen wir in Satz 9 die Bedingung (SLE) für die Gruppe L^q durch die stärkere Forderung (LE), so gilt:

Satz 10: *Ist X^n eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und L^q eine zusammenhängende q-dimensionale komplexe Liesche Automorphismengruppe von X^n, die auf X^n echt operiert und der Bedingung (LE) genügt, dann ist X_n holomorph äquivalent zu einem komplex-analytischen Prinzipalfaserbündel über dem Quotientenraum X^n/L^q als Basis mit L^q als typischer Faser und Strukturgruppe.*

Der *Beweis* ergibt sich sofort aus Satz 8, wonach X^n/L^q unter den Voraussetzungen von Satz 10 nicht nur ein pseudo-komplexer, sondern sogar ein komplexer Raum ist.

Literatur

[1] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebn. Math. H. 3 (1934). — [2] Bourbaki, N.: Topologie Général. Chap. I, 1951. — [3] Cartan, H.: Les fonctions de deux variables complexes et la représentation analytique. J. Math. pures appl. IX, **10**, 1—114 (1931). — [4] Cartan, H.: Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes. Séminaire E. N. S. (1953/54), Exposé XII (hektographiert). — [5] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic Geometry and Topology. A symposium in honor of S. Lefschetz. S. 90—102. Princeton University Press 1957. — [6] Dieudonné, J.: On topological groups of homeomorphisms. Amer. J. of Math. **70**, 659—680 (1948). — [7] Grauert, H., u. R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958). — [8] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebn. Math. H. 9 (1956). — [9] Kelley, J. L.: General Topology. D. van Nostrand Comp. 1955. — [10] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957). — [11] Scheja, G.: Theorie der verzweigten Gebiete über komplexen Räumen und ihrer Holomorphiehüllen. Dissertation, Universität Münster, 1958 (hektographiert). — [12] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956).

(Eingegangen am 8. September 1959)