

Ionen- und elektronenoptische Zylinderlinsen und Prismen. I.

Von **Richard Herzog** in Wien.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 11. April 1934.)

Es wird gezeigt, daß eine beliebige Kombination eines elektrischen Radialfeldes und eines dazu senkrechten Magnetfeldes eine elektronenoptische Abbildung liefert, die den gleichen Gesetzmäßigkeiten gehorcht wie die Abbildung durch eine optische Zylinderlinse kombiniert mit einem Prisma. Die Lage der Kardinalpunkte wird berechnet und die Ergebnisse der Theorie werden auf verschiedene Spezialfälle angewandt.

§ 1. Einleitung.

Die sprunghafte Entwicklung der Elektronenoptik in den letzten Jahren zeitigte eine große Anzahl theoretischer und experimenteller Arbeiten. Diese enthalten entweder die allgemeinsten Grundgleichungen der Elektronenoptik oder deren Spezialisierung auf rotationssymmetrische Felder. Die Ergebnisse dieser Arbeiten sind Analoga zu den aus der Optik bekannten gewöhnlichen Linsen und den damit zusammengesetzten Apparaten. Die Analoga zu den Zylinderlinsen blieben bisher unbeachtet. Lediglich eine kurze Arbeit von C. I. Davisson und C. I. Calbick¹⁾ befaßt sich, wie sich jedoch erst später herausstellte²⁾, mit Zylinderlinsen, die aus zwei langgestreckten, rechteckigen und parallelen Blenden bestehen, die sich auf verschiedenem Potential befinden.

Es existieren jedoch eine Anzahl älterer Arbeiten über Apparaturen zur e/m -Bestimmung von Kathodenstrahlen und über Massenspektrometer, bei denen eine Richtungsfokussierung der Strahlen erreicht wird. Es ist dies die von J. Classen³⁾ und A. J. Dempster⁴⁾ benutzte Fokussierung im homogenen Magnetfeld nach 180° und die von A. Hughes und V. Rojansky⁵⁾ abgeleitete Fokussierung im radialen elektrischen Felde nach

$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 127^\circ$. Schließlich wurde von W. Bartky und A. J. Dempster⁶⁾

eine Kombination eines homogenen magnetischen und radialen elektrischen Feldes untersucht, bei der die Feldstärken von vornherein so gewählt wurden, daß die Geschwindigkeitsauflösung verschwindet. Sie finden,

¹⁾ C. J. Davisson u. C. I. Calbick, Phys. Rev. **38**, 585, 1931. — ²⁾ C. J. Davisson u. C. I. Calbick, ebenda **42**, 580, 1932. — ³⁾ J. Classen, Phys. ZS. **9**, 762, 1908. — ⁴⁾ A. J. Dempster, Phys. Rev. **11**, 316, 1918. — ⁵⁾ A. Hughes u. V. Rojansky, ebenda **34**, 284, 1929. — ⁶⁾ W. Bartky u. A. J. Dempster, ebenda **33**, 1019, 1929.

daß wieder nach $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 127^\circ$ Richtungsfokussierung auftritt. Zunächst war es klar, daß sich alle diese Ergebnisse als Spezialfälle einer allgemeinen Kombination eines homogenen magnetischen und radialen elektrischen Feldes ergeben müssen, wenn hierbei der gegenseitige Wert der Feldstärken offen gelassen wird; dies wird in der folgenden Arbeit gezeigt¹⁾.

Allen bisher genannten Arbeiten gemeinsam ist die Voraussetzung, daß sich Quell- und Konvergenzpunkt der Strahlen innerhalb oder am Rande des Feldes befinden. In einer früheren Arbeit²⁾ wurde gezeigt, daß auch dann eine Fokussierung erreicht werden kann, wenn sich nur einer der Punkte innerhalb oder am Rande des Feldes, der andere jedoch außerhalb, und zwar in der Entfernung l nach dem Ende des elektrischen Radialfeldes befindet. Es ist dann die Winkelöffnung des Feldes gegeben durch

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(-\frac{l\sqrt{2}}{r_0} \right),$$

wobei r_0 den Radius der mittleren Kreisbahn bedeutet. In der folgenden Arbeit wird ganz allgemein ein Strahlenbüschel untersucht, das von einem beliebigen Punkte — dem Objektpunkte — divergiert und nach Durchlaufen des Feldes wieder in einem Punkte vereinigt wird. Diesen wollen wir das Bild des Objektpunktes nennen³⁾. Es wird sich ergeben, daß diese Abbildung den gleichen Gesetzmäßigkeiten gehorcht wie die Abbildung durch optische Zylinderlinsen.

§ 2. Über die Form der erforderlichen elektromagnetischen Felder.

Bei der Berechnung der Bahn der Teilchen werden wir drei Räume (siehe Fig. 1) zu betrachten haben. Als Raum I mit den Koordinaten x', y' bezeichnen wir den Raum vor dem elektromagnetischen Felde und als Raum II mit den Koordinaten x'', y'' den Raum nach dem elektromagnetischen Felde. Da sowohl Raum I als auch Raum II feldfrei sind, werden die Teilchen in beiden Räumen gerade Bahnen durchlaufen. Als Raum III mit den Polarkoordinaten r, φ bezeichnen wir jenes Gebiet, in dem das elektromagnetische Feld vorhanden ist. Dieses setze sich zusammen:

¹⁾ Knapp vor Absendung des Manuskriptes erhielt der Verfasser Kenntnis von einer Arbeit von W. Henneberg, Ann. d. Phys. **19**, 335, 1934, in der dieser unter anderem den gleichen Gedanken ausführte. — ²⁾ R. Herzog u. J. Mattauch, Ann. d. Phys. **19**, 345, 1934; siehe auch W. R. Smythe, Phys. Rev. **45**, 299, 1934. — ³⁾ Diese Abbildungseigenschaften sind in der Arbeit von W. Henneberg nicht enthalten.

1. Aus dem radialen elektrischen Felde, dessen Kraftlinien durch den Ursprung P gehen und dessen Feldstärke

$$E = \frac{1}{r} \frac{X}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

erzeugt wird durch zwei metallene koaxiale Zylinder mit den Radien R_1 und R_2 , zwischen denen die Spannungsdifferenz X (in abs. elst. Einh.) besteht. X bezeichnen wir als positiv, wenn die betrachteten Teilchen im elektrischen Felde *allein* gegen den Ursprung P konkave Bahnen beschreiben würden.

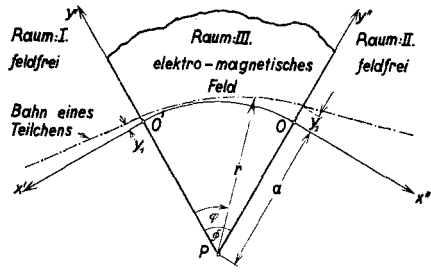


Fig. 1.

2. Aus dem homogenen magnetischen Felde, dessen Kraftlinien senkrecht auf der (r, φ) -Ebene stehen. Die Feldstärke H (in Gauß) sei dann positiv, wenn die betrachteten Teilchen im Magnetfeld *allein* eine gegen den Ursprung P konkave Bahn beschreiben würden.

Wir wollen vorderhand der Einfachheit halber annehmen, daß die Grenzfläche zwischen den Räumen III und I die Ebene $x' = 0$ und zwischen den Räumen III und II die Ebene $x'' = 0$ sei. Es sind zwar derartige abrupt aufhörende Felder experimentell nicht streng herstellbar, doch kann man diesem fiktiven Idealfall durch geeignete Abschirmung nahe kommen. Wir setzen das konstante Potential im Raum I und II gleich Null und verlangen, daß die Potentiale an den Zylinderkondensatorplatten so gewählt seien, daß auch im Raum III auf dem Kreis $r = a$ das Potential gleich Null ist. An der Stelle r wird das Potential:

$$V = X \cdot \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \doteq (r - a) \frac{X}{a \ln \frac{R_1}{R_2}} \tag{1}$$

vorhanden sein.

An den Grenzflächen zwischen den Räumen III und I sowie III und II werden daher für $r \neq a$ Potentialsprünge auftreten, die eine Geschwindigkeitsänderung der Teilchen bewirken. Da wir nur Bahnen betrachten wollen, die nahe der Kreisbahn sind, wird auch die Geschwindigkeitsänderung nur klein sein. In den experimentell realisierbaren Fällen wird

zwar kein Potentialsprung, sondern ein kurzes Längsfeld vorhanden sein, dessen Wirkung sich jedoch durch den Potentialsprung rechnerisch gut und einfach approximieren läßt.

Die Feldstärken seien so gewählt, daß jene Teilchen der Masse m_0 und der Geschwindigkeit v_0 , die in I längs der x' -Achse in negativer Richtung laufen, in III die Kreisbahn $r = a$ beschreiben; in II werden sie dann längs der x'' -Achse in positiver Richtung weiterlaufen. Die Bedingung für das Kräftegleichgewicht dieser Teilchen in III lautet:

$$\frac{m_0 v_0^3}{a} = \frac{eX}{a \ln \frac{R_1}{R_2}} + \frac{e v_0 H}{c}. \quad (2)$$

Wäre von *diesem* elektromagnetischen Felde nur das elektrische (magnetische) Feld allein vorhanden, so würden die gleichen Teilchen Bahnen beschreiben, deren Krümmungsradius a_e , (a_m) in III an der Stelle O' (siehe Fig. 1) gegeben ist durch:

$$a_e = \frac{m_0 v_0^3}{e} \cdot \frac{a \cdot \ln \frac{R_1}{R_2}}{X}; \quad (3)$$

$$a_m = \frac{m_0 v_0 c}{e H}. \quad (4)$$

Diese anschaulichen Konstanten werden an Stelle der Feldstärken in den folgenden Rechnungen verwendet. Setzt man (3) und (4) in (2) ein, so erhält man:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_e} + \frac{1}{a_m}. \quad (2a)$$

§ 3. Berechnung der Bahn der Teilchen.

Im Raum I sei die Gleichung der Bahngeraden

$$y' = y_1 + \alpha' \cdot x' \quad (5)$$

gegeben. In ihr seien α und y_1/a gegen 1 kleine Größen, deren Quadrate vernachlässigt werden können.

Die Geschwindigkeit der Teilchen in I sei gegeben durch

$$v_I = v_0 (1 + \beta_I); \quad (6)$$

um später auch die Massenauflösung berechnen zu können, wollen wir auch die Masse der Teilchen in der Form

$$m = m_0 (1 + \gamma) \quad (7)$$

ansetzen. Auch in (6) und (7) bedeuten β_1 und γ kleine Größen, deren Quadrate vernachlässigt werden können.

Das Gebiet III werden die Teilchen an der Stelle

$$r_1 = a + y_1 \tag{8}$$

betreten. Ihre Geschwindigkeit v_{III} , die durch den Potentialsprung verändert wurde, ergibt sich aus dem Energiesatz:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{III}}^2 + eV.$$

Das Potential V wird, wie aus (1), (3) und (8) folgt, gegeben sein durch:

$$V = y_1 \cdot \frac{m_0 v_0^2}{e} \cdot \frac{1}{a_e}.$$

Setzt man dies sowie (6) und (7) in den Energiesatz ein und vernachlässigt die Quadrate der kleinen Größen, so erhält man:

$$v_{\text{III}} = v_0 \cdot (1 + \beta_1 - y_1/a_e). \tag{9}$$

Schließlich erhalten wir unter den gleichen Vernachlässigungen die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit:

$$\dot{r}_0 = -\alpha' v_{\text{III}} \doteq -\alpha' v_0; \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_{\text{III}}}{a + y_1} \doteq \frac{v_0}{a} \cdot \left(1 + \beta_1 - \frac{y_1}{a_e} - \frac{y_1}{a}\right). \tag{11}$$

Die Bewegungsgleichungen im Polarkoordinaten lauten:

$$\frac{d}{dt}(r \cdot m r \dot{\varphi}) = r \cdot e \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{H}{c}; \tag{12}$$

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{e \cdot X}{r \cdot \ln \frac{R_1}{R_2}} - e \frac{r \dot{\varphi}}{c} \cdot H. \tag{13}$$

Gleichung (12) läßt sich sofort einmal integrieren, wobei man erhält:

$$\dot{\varphi} = \frac{r_1^2}{r^2} \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \frac{eH}{m c} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right). \tag{12a}$$

Da wir nur Bahnen betrachten wollen, die wenig von der Kreisbahn $r = a$ abweichen, machen wir den Lösungsansatz:

$$r = a(1 + z). \tag{14}$$

z^2 sowie Produkte von z mit den anderen kleinen Größen wollen wir vernachlässigen. Aus (14) und (8) folgt:

$$\frac{r_1^2}{r^2} = 1 + 2 \frac{y_1}{a} - 2z. \tag{15}$$

Setzt man (4), (7) und (15) in (12a) ein, so erhält man:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \left(1 + 2 \frac{y_1}{a} \right) - \frac{v_0}{a_m} \frac{y_1}{a} + \left(\frac{v_0}{a_m} - 2 \dot{\varphi}_0 \right) z.$$

Setzt man hierin noch (11) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (2a):

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{a} \left[1 + \beta_1 + \left(\frac{a}{a_m} - 2 \right) z \right]. \quad (16)$$

Aus Gleichung (13) folgt unter Berücksichtigung von (3), (4) und (14):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{v_0^2}{a^2} & \left\{ \left(\frac{a}{v_0} \dot{\varphi} \right)^2 - \left(\frac{a}{v_0} \dot{\varphi} \right) \cdot \frac{m_0 a}{m a_m} - \frac{m_0 a}{m a_e} \right. \\ & \left. + z \left[\left(\frac{a}{v_0} \dot{\varphi} \right)^2 - \left(\frac{a}{v_0} \dot{\varphi} \right) \frac{m_0 a}{m a_m} + \frac{m_0 a}{m a_e} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Im eckigen Klammersausdruck kann man alle kleinen Glieder vernachlässigen (wegen der Multiplikation mit z) und man erhält nach Einsetzung von (16) und unter Berücksichtigung von (2a) und (7):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{v_0^2}{a^2} \cdot \left\{ \left[\gamma + \beta_1 \left(2 - \frac{a}{a_m} \right) \right] - \left[2 \frac{a}{a_e} + \frac{a^2}{a_m^2} \right] z \right\}.$$

Führen wir noch zur Abkürzung

$$\kappa^2 = 2 \frac{a}{a_e} + \frac{a^2}{a_m^2} = 1 + \left(1 - \frac{a}{a_m} \right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{a_e} \right)^2 \quad (17)$$

sowie

$$\kappa^2 \cdot \delta = \gamma + \beta_1 \left(2 - \frac{a}{a_m} \right) \quad (18)$$

ein, so erhalten wir schließlich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{v_0^2}{a^2} \kappa^2 (\delta - z). \quad (19)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich aus (14), (8) und (10):

$$\text{Für } t = 0 \dots z_0 = y_1/a \dots (dz/dt)_0 = -\alpha' \cdot v_0/a.$$

Das Integral von (19) lautet:

$$z = -\frac{\alpha'}{\kappa} \sin \kappa \frac{v_0}{a} \cdot t + \delta \left(1 - \cos \kappa \frac{v_0}{a} t \right) + \frac{y_1}{a} \cos \kappa \frac{v_0}{a} \cdot t. \quad (20)$$

Um die Bahngleichung zu erhalten, müssen wir t mit Hilfe von (16) in (20) eliminieren. Da alle Sinus- und Cosinusglieder kleine Größen als Faktor enthalten, brauchen wir im Argument kleine Größen überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen. Wir erhalten daher aus (16) und aus den Anfangsbedingungen $t = 0 \dots \varphi = 0$:

$$\varphi = t \cdot v_0/a. \quad (21)$$

Setzt man in (14) Gleichung (20) und (21) ein, so erhält man die Bahngleichung im Gebiet III:

$$r = a \left[1 - \frac{\alpha'}{\kappa} \sin \kappa \varphi + \delta (1 - \cos \kappa \varphi) + \frac{y_1}{a} \cos \kappa \varphi \right] \quad (22)$$

Die Teilchen verlassen das elektromagnetische Feld an der Stelle $\varphi = \Phi$ und $r = a + y_2$, worin

$$y_2 = a \cdot \left[-\frac{\alpha'}{\kappa} \sin \kappa \Phi + \delta (1 - \cos \kappa \Phi) + \frac{y_1}{a} \cos \kappa \Phi \right] \quad (22 a)$$

ist und unter dem Winkel

$$\alpha'' = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)_{\varphi = \Phi},$$

$$\alpha'' = -\alpha' \cos \kappa \Phi + \delta \kappa \sin \kappa \Phi - \frac{y_1}{a} \kappa \sin \kappa \Phi. \quad (22 b)$$

Im feldfreien Raum II lautet die Gleichung der Bahngeraden:

$$y'' = y_2 + \alpha'' x'' = a \cdot \left[-\frac{\alpha'}{\kappa} \sin \kappa \Phi + \delta (1 - \cos \kappa \Phi) + \frac{y_1}{a} \cos \kappa \Phi \right]$$

$$+ x'' \cdot \left[-\alpha' \cos \kappa \Phi + \delta \kappa \sin \kappa \Phi - \frac{y_1}{a} \kappa \sin \kappa \Phi \right]. \quad (23)$$

§ 4. Diskussion der Bahngleichung.

Wir betrachten im Raum I ein Strahlenbündel, das von der Stelle $x' = l'$ und $y' = b'$ ausgeht; seine Gleichung lautet:

$$y' = \alpha' (x' - l') + b',$$

wobei α' in einem kleinen Intervall alle Werte annimmt. Die Eintrittsstelle y_1 des Bündels in das Feld findet man für $x' = 0$ zu

$$y_1 = b' - \alpha' l'.$$

Dies in (23) eingesetzt und alle α' enthaltenden Glieder zusammengefaßt, ergibt:

$$y'' = \alpha' \cdot \left\{ -\frac{a}{\kappa} \sin \kappa \Phi - l' \cos \kappa \Phi + x'' \cdot \left[-\cos \kappa \Phi + \frac{l'}{a} \kappa \sin \kappa \Phi \right] \right\}$$

$$+ \delta a \left[\frac{x''}{a} \kappa \sin \kappa \Phi + 1 - \cos \kappa \Phi \right]$$

$$- b' \cdot \left[\frac{x''}{a} \kappa \sin \kappa \Phi - \cos \kappa \Phi \right]. \quad (24)$$

Aus (24) sehen wir, daß dem Strahlenbündel im Raum I auch im Raum II ein Strahlenbündel entspricht. Der Vereinigungspunkt aller Strahlen hat die Eigenschaft, daß y'' von α' unabhängig ist; seine Abszisse $x'' = l''$ in (24) eingesetzt, muß den geschlungenen Klammerausdruck zum Verschwinden bringen:

$$-\frac{a}{\varkappa} \sin \varkappa \Phi - (l' + l'') \cos \varkappa \Phi + \frac{l' l''}{a} \varkappa \sin \varkappa \Phi = 0.$$

Bringt man das Cosinuglied auf die andere Seite, und dividiert durch $\frac{\varkappa}{a} \sin \varkappa \Phi \cdot (l' + l'')$, so erhält man:

$$\frac{l' l'' - \frac{a^2}{\varkappa^2}}{l' + l''} = \frac{a}{\varkappa} \cotg \varkappa \Phi. \quad (25)$$

Wir untersuchen nun die durch (25) dargestellte Abbildung und lassen uns hierbei vom optischen Vorbilde, den Zylinderlinsen, leiten. Zu diesem Zwecke führen wir nun die neue Konstante g ein durch die Gleichung:

$$g = \frac{a}{\varkappa} \cotg \varkappa \Phi. \quad (26)$$

Rückt der Objektpunkt ins Unendliche $l' = \infty$, dann findet man aus (25) die Lage des hinteren Brennpunktes an der Stelle $l'' = g$. Ist $l' = g$, so wird $l'' = \infty$; $l' = g$ ist daher der vordere Brennpunkt.

Zur Berechnung der Lage der Hauptebenen benutzen wir deren Eigenschaft, daß sie sich aufeinander ohne Lateralvergrößerung abbilden. Aus (24) folgt die Ordinate des Bildes:

$$b'' = \delta a \left[(1 - \cos \varkappa \Phi) + \frac{l''}{a} \varkappa \sin \varkappa \Phi \right] - b' \left[\frac{l''}{a} \varkappa \sin \varkappa \Phi - \cos \varkappa \Phi \right]. \quad (27)$$

Für die Hauptebenen setzen wir $b'' = b'$ und $l'' = h$; aus (27) folgt dann:

$$h = -\frac{a}{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varkappa \Phi}{2}. \quad (28)$$

Um die Lage der zweiten Hauptebene zu finden, setzen wir in (25) $l'' = h$ ein und finden, daß auch $l' = h$ ist. Aus (27) sieht man auch, daß für $l'' = h$ der Koeffizient von δ verschwindet. Das heißt, alle Strahlen mit verschiedenem δ , aber gleichem α' , schneiden sich in der zweiten Haupt-

ebene. Die Brennweite f ist der Abstand zwischen Brennpunkt und Hauptebene, also gegeben durch:

$$f = g - h. \quad (29)$$

Setzt man aus (28) und (26) die Werte von g und h ein, so erhält man:

$$f = \frac{a}{\kappa} \cdot \frac{1}{\sin \kappa \Phi}. \quad (30)$$

Da die vordere und hintere Brennweite einander gleich sind, fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen. Mit Hilfe der Größen g , h und f läßt sich Gleichung (25) auf die in der Optik bekannten Gestalten bringen. Nach einer kurzen Zwischenrechnung ergibt sich:

$$(l' - g) \cdot (l'' - g) = f^2; \quad (31)$$

$$1/(l' - h) + 1/(l'' - h) = 1/f. \quad (32)$$

Wir haben bisher nur die Abszisse des Brennpunktes berechnet. Seine Ordinate y_F bekommen wir aus der Bedingung

$$b'' = y_F + f \frac{y_F - b'}{l' - g}, \quad (33)$$

die aus der elementaren Bildkonstruktion folgt. Gleichung (27) vereinfachen wir mit Hilfe von (26), (30) und (31), wobei wir erhalten:

$$b'' = \delta a + (\delta a - b') \cdot \frac{f}{l' - g}. \quad (34)$$

Durch Vergleich von (33) und (34) finden wir:

$$y_F = a \cdot \delta. \quad (35)$$

Es soll noch gezeigt werden, daß Strahlen, die mit $\alpha' = 0$ durch den vorderen Brennpunkt gehen, im Felde eine Kreisbahn mit dem Radius

$$a^* = a + y_F = a(1 + \delta) \quad (36)$$

beschreiben. Dies ergibt sich sofort aus der Bahngleichung (22) für $\alpha' = 0$ und $y_1 = a\delta$.

Würde man von Haus aus a so gewählt haben, daß $\delta = 0$ wird, so würden die Kardinalpunkte auf der x' - und x'' -Achse liegen. Für Strahlen anderer Masse und Geschwindigkeit wird sich im allgemeinen auch ein anderer Kreisbahnradius a ergeben und somit eine andere Lage der Kardinalpunkte. Der geometrische Ort aller dieser Punkte sind Geraden,

die durch P (Fig. 2) gehen. Führt man noch die dort eingezeichneten Winkel ψ und χ ein, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{g}{a} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{cotg} \kappa \Phi; \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{h}{a} = -\frac{1}{\kappa} \operatorname{tg} \frac{\kappa \Phi}{2}. \quad (38)$$

Wenn Φ klein ist, gehen diese Gleichungen über in:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \kappa^2 \Phi; \quad (37a)$$

$$\chi = -\frac{1}{2} \Phi. \quad (38a)$$

Aus (38a) folgt, daß die Hauptpunkte auf der Winkelsymmetrale des Feldes liegen. Aus der oben angegebenen Eigenschaft der zweiten Hauptebene ergibt sich daher als Spezialfall die bekannte Eigenschaft magnetischer sowie ebener elektrischer Felder, einen Strahl, der hinsichtlich seines Impulses bzw. seiner Energie heterogen ist, derartig in ein Bündel von Strahlen aufzulösen, daß ihr Schnittpunkt auf dem Mittelquerschnitt des durchlaufenen Feldes liegt.

Wir wollen noch den Spezialfall betrachten, bei dem der Anfangspunkt O' (Fig. 1) des Feldes, in den Endpunkt O'' abgebildet wird. Dann folgt aus (31) $g = \pm f$; für $\Phi = \Phi_\alpha$ erhalten wir daher die Bedingung $\cos \kappa \Phi_\alpha = \pm 1$. Der Richtungsfokussierungswinkel besitzt also den Wert:

$$\Phi_\alpha = \frac{n \cdot \pi}{\kappa}. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

Für $\Phi = \Phi_\alpha$ rücken alle Kardinalpunkte ins Unendliche. Es ist dies das Analogon zur teleskopischen Abbildung.

W. Bartky und A. J. Dempster¹⁾ untersuchen den Spezialfall, daß Teilchen verschiedener Geschwindigkeiten die gleiche Bahn beschreiben. Dies wird dann der Fall sein, wenn in (18) der Koeffizient von β_I verschwindet. Wir erhalten $a_m = \frac{1}{2} a$ und aus (2a) $a_e = -a$; d. h., das elektrische Feld zieht die Teilchen ebenso stark nach außen wie die Zentrifugalkraft und das magnetische Feld doppelt so stark nach innen. Aus (17) folgt $\kappa = \sqrt{2}$ und aus (39) der Richtungsfokussierungswinkel $\Phi_\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \doteq 127^\circ$. Während jedoch bei W. Bartky und A. J. Dempster nur der Spezialfall $l' = l'' = 0$ behandelt wird, ist hier l' und l'' beliebig. Im § 11 wird untersucht, bei welcher Anordnung von l' und l'' die reduzierte Auflösung ein Maximum ist.

¹⁾ Vgl. W. Bartky u. A. J. Dempster, Phys. Rev., a. a. O.

§ 5. Das radiale elektrische Feld als Spezialfall.

In diesem Falle wird $a_m = \infty$ und $a = a_e$. Man erhält:

$$\kappa_e = \sqrt{2}; \quad (17 e)$$

$$\delta_e = \beta + \frac{1}{2}\gamma; \quad (18 e)$$

(Der Index I wird nicht mehr gebraucht.)

$$g_e = \frac{a_e}{\sqrt{2}} \cdot \cotg \sqrt{2} \Phi_e; \quad (26 e)$$

$$\operatorname{tg} \psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \cotg \sqrt{2} \Phi_e; \quad (37 e)$$

$$h_e = -\frac{a_e}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\Phi_e}{\sqrt{2}}; \quad (28 e)$$

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\Phi_e}{\sqrt{2}}; \quad (38 e)$$

$$f_e = \frac{a_e}{\sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e}; \quad (30 e)$$

$$(l'_e - g_e)(l''_e - g_e) = f_e^2; \quad (31 e)$$

$$b''_e = a_e(\beta + \frac{1}{2}\gamma) \left(1 + \frac{f_e}{l'_e - g_e}\right) - b'_e \cdot \frac{f_e}{l'_e - g_e}; \quad (34 e)$$

$$\Phi_{e\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (39 e)$$

A. Hughes und V. Rojansky¹⁾ betrachten nur den Spezialfall, daß das Objekt am Beginn und das Bild am Ende des Feldes liegt. Für die erforderliche Winkellänge des Feldes erhielten sie Gleichung (39e).

Allgemeiner sind die Rechnungen von R. Herzog und J. Mattauch²⁾ bzw. W. R. Smythe³⁾, bei denen nur eines der feldfreien Stücke Null gesetzt wurde. Für $l'_e = 0$ erhält man aus (31e) ... $l''_e = g_e - f_e^2/g_e$; setzt man aus (26e) und (30e) die Werte ein, so erhält man die dort abgeleitete Formel:

$$l''_e = -\frac{a_e}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \sqrt{2} \Phi_e.$$

Schließlich sei noch an einem speziellen Beispiel die Bildkonstruktion durchgeführt. Gegeben ist der Winkel Φ des Feldes (in der Fig. 2, 75°), die Lage des Objektpunktes und schließlich Masse und Geschwindigkeit

¹⁾ A. Hughes u. V. Rojansky, Phys. Rev., a. a. O. — ²⁾ R. Herzog u. J. Mattauch, Ann. d. Phys., a. a. O. — ³⁾ W. R. Smythe, Phys. Rev., a. a. O.

der Teilchen, sowie die elektrische Feldstärke. Zunächst berechnen wir aus (37e) $\Psi = -13^{\circ} 20'$ und aus (38e) $\chi = -44^{\circ} 30'$ und zeichnen diese Geraden, auf denen die Kardinalpunkte liegen müssen, in das Feld ein. Sodann berechnen wir a_e aus (3) und zeichnen in diesen Abstand die

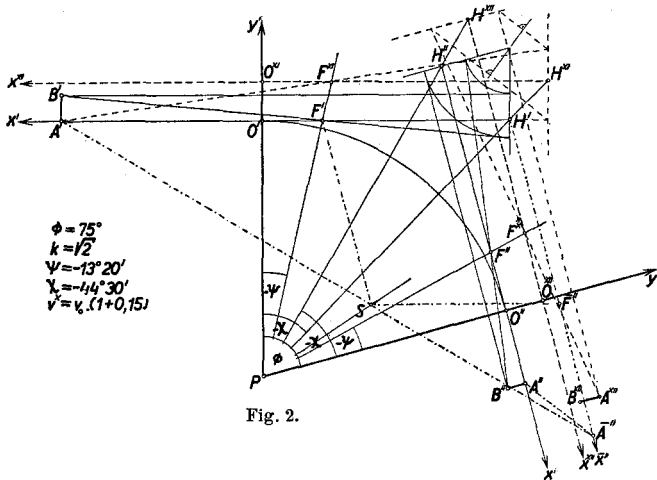


Fig. 2.

optischen Achsen, auf denen die Kardinalpunkte F, H und K liegen. Die übrige Bildkonstruktion ist aus der geometrischen Optik bekannt.

Vergrößern wir die Geschwindigkeit der Teilchen um 5% oder ihre Masse um 10%, so ist der Radius a_e^* der neuen Kreisbahn, wie aus (36) und (18 e) folgt, auch um 5% größer als a_e . Auf die gleiche Weise wie früher erhalten wir den Bildpunkt dieser Strahlen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich die Bilder des Strahles $A'O'$, also die Strahlen $F''A''$ und $F^{*''}A^{*''}$, in der zweiten Hauptebene schneiden. Es sei noch eine andere Bildkonstruktion (— · — ·) erwähnt, die namentlich für die Abbildung von Achsenpunkten geeignet ist. Man verschiebe x'' parallel, so daß H'' mit H' zusammenfällt; diese Achse nennen wir \bar{x}'' . Sodann zeichne man über x' und \bar{x}'' einen Rhombus mit den Seiten f , dessen Eckpunkt S ist. Man bringe $A'S$ mit \bar{x}'' zum Schnitt und zeichne durch diesen Punkt eine Parallele zu $H'H''$. Ihr Schnittpunkt mit x' ist das Bild A'' .

Beweis:

$$(A'F') : (F'S) = (S\bar{F}'') : (\bar{F}''\bar{A}'') = (SF'') : (F''A''),$$

oder

$$(l' - g') : f = f : (l'' - g'')$$

in Übereinstimmung mit (31). Der Vorteil dieser Konstruktion liegt in der Vermeidung der schleifenden Schnitte. Besonders zweckmäßig ist diese Konstruktion für magnetische Linsen, da hierbei, wie aus dem folgenden Paragraphen sofort klar wird, \bar{x}'' mit x'' und S mit P zusammenfällt. Die Verbindungsgerade von Objektpunkt und Bildpunkt läuft also durch den Sektormittelpunkt.

§ 6. Das homogene magnetische Feld als Spezialfall.

In diesem Falle wird $a_e = \infty$ und $a = a_m$. Man erhält:

$$x_m = 1; \tag{17 m}$$

$$\delta_m = \beta + \gamma; \tag{18 m}$$

$$g_m = a_m \cotg \Phi_m; \tag{26 m}$$

$$\psi_m = \frac{\pi}{2} - \Phi_m; \tag{37 m}$$

$$h_m = -a_m \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi_m; \tag{28 m}$$

$$\chi_m = -\frac{1}{2} \Phi_m; \tag{38 m}$$

$$f_m = \frac{a_m}{\sin \Phi_m}; \tag{30 m}$$

$$(l'_m - g_m)(l''_m - g_m) = f_m^2; \tag{31 m}$$

$$b''_m = a_m(\beta + \gamma) \left(1 + \frac{f_m}{l'_m - g_m} \right) - b'_m \frac{f_m}{l'_m - g_m}; \tag{34 m}$$

$$\Phi_{m\alpha} = \pi \cdot n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{39 m}$$

Aus (37m) sieht man, daß die Geraden, auf denen die Brennpunkte liegen, parallel sind zur anderen optischen Achse. Aus (38m) sieht man, daß die Haupt- und Knotenpunkte auf der Winkelsymmetralen des Feldes liegen. Im Falle eines reinen magnetischen Feldes ist der Ursprung des Polarkoordinatensystems im Raume III durch das Feld *allein* noch nicht gegeben. Er liegt hier im Mittelpunkt jener Kreisbahn, die senkrecht in das Magnetfeld eintritt. Voraussetzung für die Richtigkeit der bisherigen Rechnungen ist, daß diese Bahn auch senkrecht aus dem Magnetfeld austritt. Die Krümmung des Polschuhes an der Eintritts- und Austrittsstelle des Strahles ist jedoch für die Abbildung durch Glieder erster Ordnung gleichgültig. Im § 8 machen wir uns frei von der Voraussetzung des senkrechten Strahllein- und Austrittes.

Als Anwendung der bisher entwickelten Theorie sei die Linienbreite bei der neuen Astonschen Apparatur¹⁾ berechnet. Die Kollimator-

¹⁾ F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **115**, 487, 1927.
Zeitschrift für Physik. Bd. 89.

schlitze S_1, S_2 befinden sich in der Distanz von 20 cm und besitzen die Weite von 0,02 mm. Bei S_2 beginnt das elektrische Feld mit dem Radius $a_e = 30$ cm und dem Öffnungswinkel $\Phi_e = 1/6 = 9^\circ 33'$. 13 cm nach dem Ende des elektrischen Feldes beginnt das Magnetfeld mit dem mittleren Radius $a_m = 22,5$ cm und dem mittleren Ablenkwinkel $\Phi_m = 38^\circ 12'$. In der mittleren Entfernung von 15 cm nach dem magnetischen Feld befindet sich die photographische Platte, die unter dem Winkel von $19^\circ 6'$ von den Strahlen getroffen wird. Aston berechnet die Linienbreite elementar aus der geometrischen Strahlverbreiterung und schiefen Insidenz und erhält 0,36 mm. Tatsächlich beobachtet er (allerdings bei der alten Apparatur), daß die Linien schärfer sind als die auf diese Art berechneten und gibt als Ursache hierfür die nicht genau rechteckige Schlitzform an. Wir werden jedoch sehen, daß die Ursache sich zwanglos aus der Linsenwirkung der Felder ergibt. Durch Anwendung der im § 5 und 6 angegebenen Formeln erhält man:

1. Das Bild von S_1 in der Distanz von 104,6 cm nach dem Ende des Magnetfeldes und dessen Breite von 0,056 mm;

2. das Bild von S_2 in der Distanz von 96,4 cm vor dem Ende des Magnetfeldes und dessen Breite von 0,071 mm.

Aus dem rein geometrischen Strahlenverlauf zwischen diesen Schlitzbildern erhält man die Linienbreite 0,20 mm. Auf diese Weise lassen sich auch die günstigsten Apparatenkonstanten bestimmen. Es sei jedoch noch bemerkt, daß die theoretische Voraussetzung des senkrechten Ein- und Austrittes namentlich bei der neuen Apparatur nur näherungsweise erfüllt ist.

Eine Anwendungsmöglichkeit der magnetischen Linse ist die Aufnahme des Energiespektrums von α -Strahlen. Wollte man nach der alten Dempster-Methode die Fokussierung nach 180° anwenden, so würden sehr große und starke Magnetfelder nötig sein, die in den seltensten Fällen zur Verfügung stehen. Mit Hilfe der hier entwickelten Theorie gelingt es jedoch durch die Verlegung der Schlitze in den feldfreien Raum mit beliebig kleinen Ablenkwinkeln und Magnetfeldern das Auslangen zu finden, ohne auf Richtungsfokussierung verzichten zu müssen.

§ 7. Das Wiensche Geschwindigkeitsfilter (kompensierte Strahlen) als Spezialfall.

Bei der Wienschen Anordnung heben sich die elektrischen und magnetischen Kräfte für den Hauptstrahl gerade gegenseitig auf. Es ist also $a = \infty$ und $a_m = -a_e$. Für diesen Fall versagen die Gleichungen (26), (28) und (30) zur Bestimmung der Kardinalpunkte, da sowohl a und κ [wie aus

Gleichung (17) ersichtlich ist] unendlich werden, als auch Φ verschwindet. Führt man die Länge L der Kondensatoren ein, so erhält man für große $a \dots L = a \cdot \Phi$. Ferner folgt aus (17) für große Werte von $a \dots \kappa = a/a_m$. Dies in (26), (28) und (30) eingesetzt, liefert die Koordinaten der Kardinalpunkte:

$$g = a_m \cdot \cotg (L/a_m), \quad (26w)$$

$$h = -a_m \cdot \tg (L/2 a_m), \quad (28w)$$

$$f = a_m/\sin (L/a_m). \quad (30w)$$

Es sei besonders hervorgehoben, daß das Wiensche Geschwindigkeitsfilter das volle Analogon zu einer optischen Zylinderlinse darstellt, da hier der Hauptstrahl ($\alpha' = 0$) unabgelenkt passiert. Alle anderen Felder wirken wie eine Zylinderlinse, kombiniert mit einem Prisma. Aus (18) sieht man, daß das Massenaflösungsvermögen verschwindet und

$$\delta \cdot a = -a_m \cdot \beta_I \quad (18w)$$

wird. Die Ordinate des Bildpunktes erhält man aus (34):

$$b'' = -a_m \beta_I \left(1 + \frac{f}{v' - g} \right) - b' \frac{f}{v' - g}. \quad (34w)$$

Für den Spezialfall, daß der Objektschlitz am Beginn und sein Bild am Ende des Feldes liegt, erhält man aus der Abbildungsgleichung (31) $g = \pm f$ oder $\cos (L/a_m) = \pm 1$; es muß daher

$$L_\alpha = a_m \cdot n \cdot \pi \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (39w)$$

sein.

Besitzt das Geschwindigkeitsfilter die Länge L_α , so werden sich also Strahlen, die aus einem Punkte am Beginn des Feldes divergieren, am Ende des Feldes wieder vereinigen und divergent auftreten. Besitzt das Geschwindigkeitsfilter eine der dazwischen liegenden Längen

$$L = a_m \cdot \pi \cdot (n - \frac{1}{2}),$$

so wird ein Parallelstrahlenbündel maximaler Dicke austreten.

K. T. Bainbridge¹⁾ verwendet in seinem Massenspektrometer ein Wiensches Geschwindigkeitsfilter und danach ein homogenes Magnetfeld gleicher Stärke. Er beobachtet eine symmetrische Intensitätsverteilung in einer Massenspektrallinie und behauptet, daß dies auf das Fehlen jeglicher Richtungsfokussierung zurückzuführen sei. Seiner Ansicht nach treten die Strahlen untereinander parallel aus dem Geschwindigkeitsfilter in das Magnetfeld, schneiden sich nach 90° und verlassen das Feld nach

¹⁾ K. T. Bainbridge, Phys. Rev. 42, 1, 1932.

180°, wieder untereinander parallel. Wegen der oben besprochenen Fokussierungswirkung des Geschwindigkeitsfilters wird es zwar einen Satz von Bahnradien a_m im Magnetfeld geben, bei denen dies tatsächlich zutrifft. Es sind dies die Radien $a_m = L/(n - \frac{1}{2})\pi$. Dazwischen gibt es jedoch einen Satz Radien $a_m = L/n\pi$, für die gerade das Gegenteil zutrifft; auf diesen Bahnen findet also divergenter Eintritt in das Magnetfeld und Richtungsfokussierung statt. Die photographische Platte bei der Apparatur von Bainbridge liegt zwischen diesen beiden Extremfällen. Daß trotzdem Linien mit symmetrischer Intensitätsverteilung erhalten werden, liegt offenbar an der geringen Divergenz α' der zu fokussierenden Strahlen. Die völlige Klarstellung der Verhältnisse bei dieser Apparatur würde eine eingehende Untersuchung erfordern, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausginge.

§ 8. Verallgemeinerung der Theorie auf beliebig begrenzte Magnetfelder.

Da elektrische Radialfelder praktisch nur mit radialer Feldbegrenzung hergestellt werden können, wollen wir hier ausschließlich reine homogene

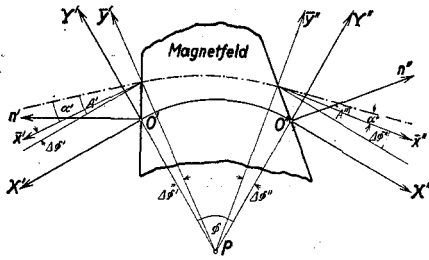


Fig. 3.

Magnetfelder betrachten, die jedoch durch beliebig geformte ebene Polschuhe erzeugt werden können. Auch hier wollen wir von der Krümmung der Polschuhe an der Ein- und Austrittsstelle des Strahles absehen, da diese bei Berücksichtigung von Gliedern erster Ordnung keinen Einfluß auf das Resultat

hat, vorausgesetzt, daß der Krümmungsradius groß gegen die Breite des eintretenden Bündels ist. Gegeben sei (Fig. 3) die mittlere Richtung des einfallenden Strahlenbündels $-X'$ und die Richtung der Normalen der Feldbegrenzung n' an der Eintrittsstelle des Mittelstrahles. Es sei $\epsilon' = \sphericalangle(n', X')$ dann positiv, wenn n' im positiven Quadranten der X', Y' -Ebene liegt. Aus (4) läßt sich dann die Bahn des Mittelstrahles sowie dessen Austrittsstelle O'' und Richtung X'' aus dem Magnetfeld bestimmen. Auch an dieser Stelle sei die Normale n'' zur Feldbegrenzung gegeben; $\epsilon'' = \sphericalangle(n'', X'')$ sei positiv, wenn n'' im positiven Quadranten der X'', Y'' -Ebene liegt. Mit dem Öffnungswinkel Ω der Feldbegrenzung besteht der Zusammenhang:

$$\Omega = \Phi - \epsilon' - \epsilon'' \tag{40}$$

Die Gleichungen (22a) und (22b) spezialisieren sich für ein reines Magnetfeld ($\varkappa = 1$) wie folgt:

$$y_2 = a \left[-\alpha' \sin \Phi + \delta (1 - \cos \Phi) + \frac{y_1}{a} \cos \Phi \right], \quad (22a, m)$$

$$\alpha'' = -\alpha' \cos \Phi + \delta \sin \Phi - \frac{y_1}{a} \sin \Phi. \quad (22b, m)$$

Hierbei ist zu beachten, daß α' und α'' , der Ableitung gemäß, gegen die Normalen \bar{x}' und \bar{x}'' der Radien an der Eintritts- bzw. Austrittsstelle zu zählen ist. Bezeichnen wir mit A' den Winkel eines einfallenden Strahles gegen die X' -Achse und mit A'' den Winkel des abgelenkten Strahles gegen die X'' -Achse, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= A' - \Delta \Phi' = A' - \frac{y_1}{a} \operatorname{tg} \varepsilon'; \\ \alpha'' &= A'' - \Delta \Phi'' = A'' - \frac{y_2}{a} \operatorname{tg} \varepsilon''. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Lautet die Gleichung des eintretenden Strahles

$$Y' = y_1 + A' X', \quad (5a)$$

so erhält man jene des austretenden Strahles durch Substitution von (22a, m), (22b, m) und (41) in $Y'' = y_2 + A'' X''$. Faßt man alle δ enthaltenden Glieder zusammen, und vereinigt die trigonometrischen Funktionen, so erhält man:

$$\begin{aligned} Y'' &= \left(-A' a \sin \Phi + y_1 \frac{\cos (\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \right) \\ &\quad - X'' \left[A' \frac{\cos (\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} + \frac{y_1}{a} \frac{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \right] \\ &\quad + \delta \{ a (1 - \cos \Phi) + X'' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon'' (1 - \cos \Phi)] \}. \end{aligned} \quad (42)$$

Wir betrachten nun wieder ein Strahlenbündel, das von der Stelle $X' = l'$, $Y' = b'$ ausgeht, und suchen jene Stelle $X'' = l''$, $Y'' = b''$, an der, nach Durchlaufen des Feldes, Wiedervereinigung stattfindet. Das Strahlenbündel betritt das Feld an der Stelle $y_1 = b' - A' l'$. Setzt man dies in (42) ein, und beachtet, daß an der Fokussierungsstelle Y'' von a' unabhängig sein muß, so erhält man als Fokussierungsbedingung die Forderung, daß der Koeffizient von A' verschwindet. Dieser lautet:

$$\begin{aligned} &- a \sin \Phi - l' \frac{\cos (\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \\ &\quad - l'' \left[\frac{\cos (\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} - \frac{l'}{a} \frac{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \right] = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Wir versuchen auch diese Gleichung auf die aus der geometrischen Optik bekannte Gestalt $(l' - g') \cdot (l'' - g'') = f' f''$ zu bringen. Durch Vergleich der Konstanten erhält man:

$$l' l'' - g' g'' = a^2 \frac{\sin \Phi \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} ; \quad (44)$$

$$g' = a \frac{\cos \varepsilon' \cos (\Phi - \varepsilon'')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} ; \quad (45')$$

$$g'' = a \frac{\cos \varepsilon'' \cos (\Phi - \varepsilon')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} . \quad (45'')$$

Durch die Gleichungen (45) ist die Lage der Brennpunkte gegeben. Um die Lage der Hauptpunkte und damit die Brennweite zu finden, benutzen wir wieder die Eigenschaft, daß die Lateralvergrößerung verschwindet: $b'' = b'$ für $l' = h'$ und $l'' = h''$. Aus (42) und (43) folgt für $\delta = 0$:

$$b'' = b' \frac{\cos (\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} - l'' \frac{b' \sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}{a \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} .$$

Also erhält man:

$$h'' = a \frac{\cos \varepsilon'' \cos (\Phi - \varepsilon') - \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} . \quad (46'')$$

Die Lage des zweiten Hauptpunktes findet man leicht durch die Überlegung, daß der Strahlenweg umkehrbar sein muß. Es können daher Größen mit einem Strich und solche mit zwei Strichen vertauscht werden. Wir erhalten:

$$h' = a \frac{\cos \varepsilon' \cos (\Phi - \varepsilon'') - \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} . \quad (46')$$

Die Brennweite ergibt sich aus den Gleichungen: $f' = g' - h'$; $f'' = g'' - h''$. Man findet, daß $f' = f'' = f$ ist, wobei man für f die Gleichung erhält:

$$f = a \frac{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} . \quad (47)$$

Die Abbildungsgleichung in diesem allgemeinen Fall lautet also:

$$(l' - g') \cdot (l'' - g'') = f^2, \quad (48)$$

oder

$$1/(l' - h') + 1/(l'' - h'') = 1/f. \quad (49)$$

Auch hier fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen, da vordere und hintere Brennweite einander gleich sind.

Wir betrachten noch die Abbildung durch Strahlen, für die δ ungleich Null ist. In diesem Falle hat man noch das dritte Glied der Gleichung (42) zu berücksichtigen. Unter Verwendung von (45'') und (47) erhält man:

$$b'' = b' \frac{g'' - l''}{f} + \delta \{ a(1 - \cos \Phi) + l'' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon'' (1 - \cos \Phi)] \}, \quad (50'')$$

oder, da einfach und doppelt gestrichene Größen vertauscht werden können:

$$b' = b'' \frac{g' - l'}{f} + \delta \{ a(1 - \cos \Phi) + l' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon' (1 - \cos \Phi)] \}. \quad (50')$$

Besonderes Interesse verdient der Fall, daß von verschiedenen Objektpunkten b' Strahlen verschiedener Geschwindigkeit austreten, jedoch derart, daß alle an der Stelle $b'' = 0$ vereinigt werden. Die Bedingung für diese *Geschwindigkeitsfokussierung* lautet demnach:

$$b' = \delta \{ a(1 - \cos \Phi) + l' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon' (1 - \cos \Phi)] \}. \quad (51)$$

Hieraus folgt unter Beachtung von (18m) und (6), daß die Ordinate des Objektes proportional der Geschwindigkeitsabweichung sein muß. Dies ist praktisch dadurch zu erreichen, daß als Objekt das Bild eines Schlitzes verwendet wird, das durch ein anderes elektromagnetisches Feld entworfen wird; denn die Ordinate dieses Bildes ist ebenfalls, wie aus Gleichung (27) ersichtlich ist, der Geschwindigkeitsabweichung proportional. Stimmen beide Proportionalitätskonstanten überein, so findet nach dem zweiten Feld Geschwindigkeitsfokussierung statt.

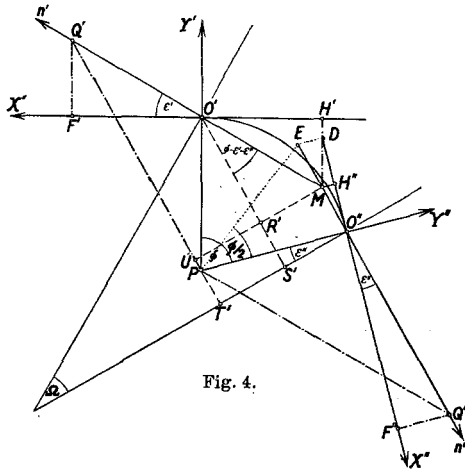


Fig. 4.

Am Schlusse dieses Paragraphen sei an Hand von Fig. 4 noch ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Kardinalpunkte beschrieben. Alle gegebenen Linien ($X', Y', X'', Y'', n', n''$) wurden voll gezeichnet. Alle zur Konstruktion erforderlichen Linien wurden strichpunktiert und alle zur mathematischen Begründung dienenden Linien wurden strichliert.

Gang der Konstruktion. Zunächst bestimme man M , den Schnittpunkt von n' und n'' ; die Projektion von M auf X' bzw. X'' liefert H' bzw. H'' .

Sodann bestimme man P , den Schnittpunkt von Y' und Y'' . Da P der Mittelpunkt der Kreisbahn O', O'' sein soll, muß die Angabe die Bedingung $PO' = PO''$ befriedigen. Man zeichnet sodann PQ' parallel zu n'' und PQ'' parallel zu n' . Die Projektion von Q' auf X' bzw. von Q'' auf X'' liefert die Brennpunkte F' bzw. F'' .

Beweis: $PO' = PO'' = a$;

$$R'M = S'O'' = T'O' - T'S' = a \cdot \cos \varepsilon'' - a \cdot \cos (\Phi - \varepsilon'');$$

$$O'M = R'M / \sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon''); \quad O'H' = O'M \cdot \cos \varepsilon' = -k'.$$

Daraus ergibt sich Übereinstimmung mit Gleichung (46'); Gleichung (46'') wird analog verifiziert.

$$U'M = T'O'' = a \cdot \cos \varepsilon''; \quad Q'M = U'M / \sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'');$$

$$H'F = Q'M \cdot \cos \varepsilon' = f.$$

Man sieht die Übereinstimmung mit Gleichung (47).

§ 9. Anwendung auf einige praktische vorkommende Polschuhformen.

A. Sektorförmige Begrenzung mit $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$. Die Formeln (45), (46) und (47) gehen über in die Formeln (26m), (28m) und (30m). Diese gelten auch dann noch, wenn der Polschuh kreisförmig begrenzt ist und der Strahl zentral eintritt. Denn, wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, tritt dann der Strahl für jeden Bahnkreis zentral aus. Zwischen dem Ablekungswinkel und dem Bahnradius besteht die Beziehung: $a = R \cdot \cotg \frac{1}{2} \Phi$, wobei R den Polschuhradius bedeutet. Diese benötigt man, wenn man die Bilder für stark verschiedene Massen oder Geschwindigkeiten berechnen will.

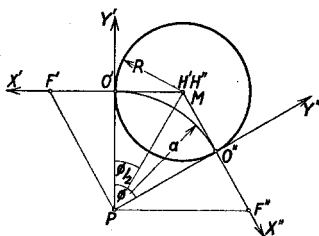


Fig. 5.

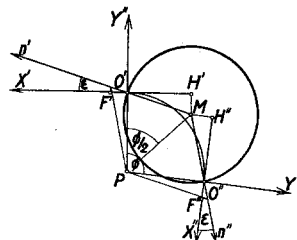


Fig. 6.

B. Schräger Eintritt in einen kreisförmigen Polschuh. Dies ist eine Verallgemeinerung des obigen Falles. Wie aus Fig. 6 hervorgeht, ist hier aus Symmetriegründen $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$. Es liegen daher auch die vorderen und hinteren Kardinalpunkte symmetrisch zum Feld. Aus Gleichung (45') oder (45'') folgt:

$$g = a \frac{\cos \varepsilon \cos (\Phi - \varepsilon)}{\sin (\Phi - 2\varepsilon)}.$$

Ebenso aus Gleichung (46') oder (46''):

$$h = a \frac{\cos \varepsilon \cdot [\cos (\Phi - \varepsilon) - \cos \varepsilon]}{\sin (\Phi - 2 \varepsilon)}$$

und schließlich aus Gleichung (47):

$$f = a \frac{\cos^2 \varepsilon}{\sin (\Phi - 2 \varepsilon)}$$

(Dieselben Gleichungen gelten auch für beliebige Feldbegrenzungen, wenn Ein- und Austrittswinkel einander gleich sind. Für Strahlen mit verschiedenen Bahnradien erfüllt jedoch nur der kreisförmige Polschuh durchwegs diese Bedingung.) Wie aus Dreieck $PO'M$ folgt, besteht hier der Zusammenhang:

$$a = R \left(\cos \varepsilon \cotg \frac{\Phi}{2} + \sin \varepsilon \right) = R \frac{\cos \left(\frac{\Phi}{2} - \varepsilon \right)}{\sin \frac{\Phi}{2}}$$

C. Halbkreisförmige Polschuhbegrenzung mit zentralem, senkrechtem Eintritt. Wie aus Fig. 7 folgt, ist hier $\varepsilon' = 0$ und $\varepsilon'' = \Phi \cdot \frac{1}{2}$. Man erhält aus:

$$\begin{aligned} (45') \dots g' &= a \cdot \cotg \frac{1}{2} \Phi, \\ (45'') \dots g'' &= a \cdot \cotg \frac{1}{2} \Phi \cdot \cos \Phi, \\ (46') \dots h' &= 0, \\ (46'') \dots h'' &= -a \cdot \sin \Phi, \\ (47) \dots f &= a \cdot \cotg \frac{1}{2} \Phi. \end{aligned}$$

Wie aus Dreieck PMO'' folgt, besteht hier der Zusammenhang:

$$a = R / (2 \cdot \sin \frac{1}{2} \Phi).$$

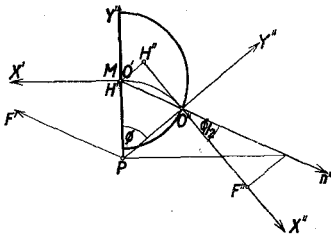


Fig. 7.

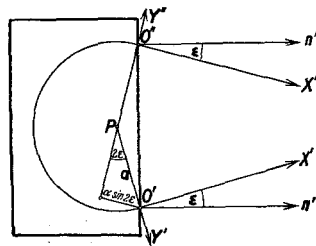


Fig. 8.

D. Eintritts- und Austrittsebene fallen zusammen. Wie aus Fig. 8 ersichtlich, ist hier $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$. Da $\Omega = 180^\circ$, folgt aus Gleichung (40): $\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'' = \pi$. Für diesen Spezialfall versagen die Gleichungen (45), (46) und (47), da der Nenner verschwindet. Um die Abbildung zu erhalten,

muß auf Gleichung (43) zurückgegangen werden. Diese vereinfacht sich für diesen Spezialfall zu:

$$a \cdot \sin 2\varepsilon + l' + l'' = 0. \quad (52)$$

Diese Gleichung erinnert an eine Spiegelung in der Strahlenoptik. Es sind jedoch hier die Verhältnisse komplizierter, da der reflektierte Strahl auch eine Parallelverschiebung erleidet, die von der Masse und Geschwindigkeit der Strahlen abhängig ist.

§ 10. Einfluß der Streufelder.

Die bisher entwickelte Theorie besitzt noch einen Schönheitsfehler: Es ist prinzipiell praktisch unmöglich, Felder herzustellen, die abrupt aufhören. Streng genommen wird daher stets das Feld erstens in den Raum I und II (Fig. 1) übergreifen und zweitens im Raum III nicht von φ unabhängig sein, sondern gegen den Rand zu abnehmen. Diese Tatsache würde den praktischen Wert der bisherigen Rechnungen in Frage stellen. Tatsächlich ist es jedoch meist möglich, die Streufelder klein zu halten, so daß die durch sie verursachten Störungen gering sind. Im Falle eines reinen magnetischen und reinen elektrischen Feldes sollen die Verhältnisse näher untersucht werden.

A. Magnetisches Feld. Der Einfluß des Streufeldes wurde für ein eben begrenztes Magnetfeld erstmalig von A. J. Dempster¹⁾ untersucht. Es soll gezeigt werden, wie sich die Rechnungen von Dempster in die hier entwickelte allgemeine Theorie einbauen lassen. In der Praxis wird es immer möglich sein, durch geeignete Abschirmungen das Streufeld auf so kleinen Raum zusammen zu drängen, daß nur die Richtungsablenkung, nicht aber die Verschiebung des Strahles berücksichtigt werden braucht. Wird ein von der Anode A ausgehendes Strahlenbündel durch ein elektrisches Feld senkrecht zur Polschuhbegrenzung beschleunigt, so ist, wie leicht einzusehen ist, der Winkel beim Eintritt in das praktisch homogene Feld H_0 gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{1}{a H_0} \cdot \int_0^A H(n) \, dn.$$

Aus Gleichung (52) folgt für den Dempster-Fall $l'' = 0$, daß $l' = -a \cdot \sin 2\varepsilon$ sein muß. Der erforderliche senkrechte Abstand b des Schlitzes vom homogenen Feldbeginn wird gegeben sein durch:

$$b = l' \cos \varepsilon = -2a \operatorname{tg} \varepsilon \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)^{-3/2}.$$

¹⁾ Vgl. A. J. Dempster, Phys. Rev., a. a. O., der an Stelle von $\varepsilon' \dots - \gamma, n \dots - x$ und $a \dots r_0$ einführt.

Für kleine Werte von ε (und nur für solche ist die Integraldarstellung von $\text{tg } \varepsilon$ richtig), geht diese Formel in jene von Dempster über:

$$b = \frac{2}{H_0} \int_0^A H(n) \, dn.$$

Durch die Vorversetzung des Schlitzes um die Distanz b bleibt trotz Vorhandenseins des Streufeldes die Fokussierung erhalten. Eine ähnliche Überlegung ist auch in den anderen praktisch vorkommenden Fällen möglich.

B. Elektrisches Feld. Es wurde das Feld am Rande eines Kondensators, der von einer Blende begrenzt ist, berechnet. Es wurde untersucht, welchen Abstand die Blende vom Kondensator haben muß, damit die ablenkende Wirkung dieses tatsächlich realisierbaren Feldes gleich ist jener eines Idealkondensators, dessen Feldstärke innerhalb der Kondensatorplatten konstant und außerhalb derselben gleich Null ist. Das Ergebnis dieser im Druck befindlichen Untersuchung sei hier an Hand der maßstäblichen Fig. 9 vorweggenommen. Je nach der Weite der Blende im

Verhältnis zum Kondensatorplattenabstand ergibt sich ein verschiedener Blendenabstand; bei festgehaltenem Kondensatorplattenabstand muß der Eckpunkt der Blende auf der eingezeichneten Kurve k liegen. Der Rechnung wurde zwar unendliche Blendendicke und Kondensatorlänge zugrunde gelegt, doch hat dies auf die praktische Anwendbarkeit dieses Ergebnisses keinen Einfluß, da sich die Feldstärke beiderseits sehr rasch exponentiell dem Wert Null bzw. dem

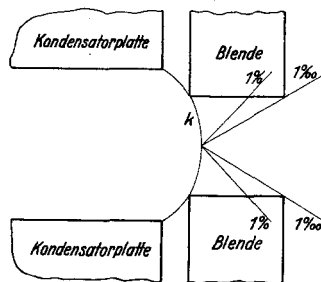


Fig. 9.

konstanten Wert nähert. Es ist praktisch vollkommen ausreichend, eine solche Blendendicke zu verlangen, daß die Feldstärke auf 1% oder 1/1000 des Wertes im Kondensator herabsinkt. Für diese Fälle wurde in Fig. 9 die Blendendicke als Funktion der Blendenweite eingezeichnet. Die dort enthaltenen Kurven geben also den geometrischen Ort des anderen Eckpunktes der Blende an. Die Rechnung wurde zwar nur für ebene Kondensatorplatten ausgeführt, doch läßt sich das Ergebnis sinngemäß auch auf elektrische Radialfelder anwenden, wenn nur der Plattenabstand klein gegen den Radius ist. Der Öffnungswinkel Φ des Feldes ist dann die Winkellänge der Kondensatorplatten und nicht jene der Blenden. Eine geringe Neigung der Blenden würde nur einen Fehler höherer Ordnung verursachen.

§ 11. Welcher der beiden zur Strahlbegrenzung erforderlichen Kollimator-schlitze ist der Abbildung zugrunde zu legen und welches ist die günstigste Anordnung der Schlitze?

Die Beantwortung dieser Frage richtet sich nach dem Zweck der Anordnung.

A. Bestmögliche Vereinigung eines Strahlenbündels von Teilchen gleicher Masse und Geschwindigkeit (Abbildung). Für die Form eines durch zwei Schlitze S'_1 und S'_2 (siehe Fig. 10) ausgeblendetes Strahlenbündels sind zwei

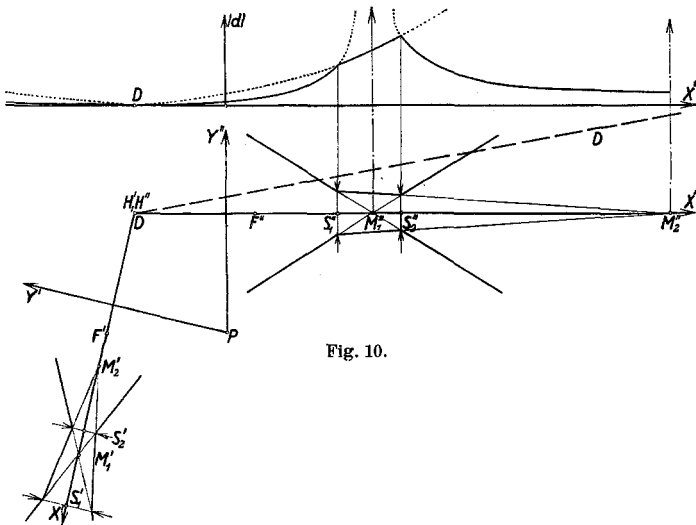


Fig. 10.

Punkte M'_1 und M'_2 maßgebend. Das Bild dieses Strahlenbündels ist wieder ein Strahlenbündel, das durch die Bilder S''_1 , S''_2 der Schlitze ausgeblendet gedacht werden kann. Das Bündel ist daher bei S''_1 oder S''_2 am engsten, je nachdem das Bild von S'_1 kleiner oder größer ist als das Bild von S'_2 . Eine elementare Überlegung liefert die Regel: Liegt der vordere Brennpunkt F' außerhalb (innerhalb) der Strecke M'_1, M'_2 , so ist beim Bild des innerhalb (außerhalb) M'_1, M'_2 liegenden Schlitzes das Bündel am engsten; dieser ist der Rechnung zugrunde zu legen. Es muß also immer zwischen dem abzubildenden Schlitz und dem Brennpunkt einer der Punkte M'_1 oder M'_2 liegen. Fällt F' mit M'_1 oder M'_2 zusammen, so liegt M''_1 oder M''_2 im Unendlichen und es ist gleichgültig, mit welchem Schlitz gerechnet wird.

B. *Bestmögliche Zerlegung eines heterogenen Strahlenbündels (größte reduzierte Auflösung)*. Als Auflösung D bezeichnen wir den Koeffizienten von δ in den Gleichungen (27) bzw. (50''). Wir finden:

$$D = a(1 - \cos \kappa \Phi) + l'' \kappa \sin \kappa \Phi$$

bzw.

$$D = a(1 - \cos \Phi) + l'' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon'' (1 - \cos \Phi)].$$

Wir sehen, daß in beiden Fällen D eine lineare Funktion von l'' ist; die Nullstelle von D bezeichnen wir mit l''_0 . Im ersten Falle finden wir aus (28):

$$l''_0 = -\frac{a(1 - \cos \kappa \Phi)}{\kappa \sin \kappa \Phi} = h.$$

In diesem Falle befindet sich also die Nullstelle von D (wir wollen sie im folgenden kurz Punkt D nennen) im zweiten Hauptpunkt. Im zweiten Falle erhalten wir:

$$l''_0 = \frac{-a(1 - \cos \Phi)}{\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon'' (1 - \cos \Phi)} = -\frac{a \sin \frac{\Phi}{2} \cos \varepsilon''}{\cos \left(\frac{\Phi}{2} - \varepsilon'' \right)}.$$

In Fig. 4 wurde nach dieser Gleichung Punkt D konstruiert (...). Man bestimmt hierzu zuerst den Schnittpunkt E der Winkelsymmetralen von Φ mit n'' und projiziert sodann E auf X'' ; es ist leicht einzusehen, daß $O''D = -l''_0$ ist. Für den Spezialfall $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ fällt D mit H' und H'' zusammen.

Bei der praktischen Anwendung kommt es jedoch nicht auf die Auflösung D selbst an, sondern auf ihr Verhältnis zur Strahlbreite, das wir kurz die reduzierte Auflösung d bezeichnen wollen. Diese ist also stückweise proportional einem Ausdruck der Form: $(l' - l''_0) : (l' - l''_M)$. In Fig. 10 ist d als Funktion von l' zu sehen. Eine elementare Überlegung zeigt, daß das Maximum von d , falls überhaupt ein solches vorhanden ist, bei einem der Blendenbilder liegt, und zwar bei jenem Blendenbild, das von der Nullstelle D gerade durch *einen* der Punkte M''_1 oder M''_2 getrennt wird. An dieser Stelle ist also der eigentliche Filterschlitz anzubringen.

Es sei noch die Frage untersucht, welche Schlitzanordnung die günstigste ist. Auch hier wird es praktisch darauf ankommen, daß die reduzierte Auflösung d möglichst groß ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Feld ein möglichst stark verkleinertes Bild des Schlitzes entwirft. Hierzu muß, wie aus (34) und (50') für $\delta = 0$ sofort ersichtlich ist, l' möglichst groß und $l'' = g''$ sein.

Es ist noch von Interesse, welcher Öffnungswinkel Φ , bei festgehaltenem l' , am günstigsten ist. Hierzu müssen wir d als Funktion von l' und Φ ableiten; zu diesem Zweck vertausche man in (27) die einfach und doppelt gestrichenen Größen, wobei sich ergibt:

$$b' = \delta a \left[(1 - \cos \kappa \Phi) + \frac{l'}{a} \kappa \sin \kappa \Phi \right] - b'' \left[\frac{l'}{a} \kappa \sin \kappa \Phi - \cos \kappa \Phi \right].$$

Bezeichnet man die Objektschlitzbreite mit y'_0 , so erhält man die reduzierte Auflösung:

$$d = \frac{a}{y'_0} \left[(1 - \cos \kappa \Phi) + \frac{l'}{a} \kappa \sin \kappa \Phi \right].$$

Das Maximum von d erhält man aus:

$$\frac{dd}{d\Phi} = \frac{\kappa a}{y'_0} \left[\sin \kappa \Phi + \frac{l'}{a} \kappa \cos \kappa \Phi \right] = 0; \quad l' = -\frac{a}{\kappa} \operatorname{tg} \kappa \Phi.$$

Aus (25) findet man, daß dann $l'' = 0$ sein muß. Es sollen sich also die Kollimatorschlitze in möglichst großer Distanz vor dem Feld befinden, dessen Öffnungswinkel aus der obigen Gleichung berechnet, nur wenig größer als $\pi/2$ ist; der Filterschlitz befindet sich dann am Ende des Feldes.

Für ein Magnetfeld beliebiger Polschuhform findet man analog aus (50):

$$d = \frac{a}{y'_0} \left\{ (1 - \cos \Phi) + \frac{l'}{a} [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon' (1 - \cos \Phi)] \right\}.$$

Bei konstantem l' wird d ein Maximum für

$$\frac{dd}{d\Phi} = \frac{a}{y'_0} \left\{ \sin \Phi + \frac{l'}{a} [\cos \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon' \sin \Phi] \right\} = 0$$

bzw.

$$l' = -\frac{a}{\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{cotg} \Phi}.$$

Aus (43) folgt, daß dann $l'' = 0$ ist; macht man l' sehr groß, so wird $\Phi - \varepsilon' = \frac{1}{2} \pi$. Aus der Gleichung für d ist ersichtlich, daß d für $\varepsilon \doteq \pi/2$ sehr groß wird. Maximalste Auflösung wäre also durch streifenden Eintritt eines Strahls in ein Magnetfeld zu erreichen, in dem der Strahl um 180° abgelenkt wird. Praktisch wird dies jedoch, wegen des Streufeldes, nur schwer realisierbar sein.

Zusammenfassung.

Es wird die Bahn von Teilchen beliebiger Anfangsbedingungen in einer Kombination eines radialen elektrischen und dazu senkrechten homogenen magnetischen Feldes untersucht und gezeigt, daß Strahlen, die von einem

beliebigen Objektpunkt ausgehen, nach Durchlaufen des Feldes in einem Bildpunkt vereinigt werden. Die Gesetzmäßigkeiten dieser Abbildung sind die gleichen wie in der Optik der Zylinderlinsen. Es werden Formeln zur Berechnung der Lage der Haupt- und Brennpunkte abgeleitet; auch eine Konstruktion der Kardinalpunkte aus der geometrischen Feldanordnung wird angegeben. Ferner wird untersucht, welches die zur Erreichung größter Auflösung günstigste Schlitzanordnung ist. Alle bisher bekannten derartigen Feldkombinationen sind in dieser allgemeinen Theorie als Spezialfall enthalten. Schließlich werden die Ergebnisse angewandt auf die Theorie der Massenspektrometer von Aston, Bainbridge und Dempster, sowie Bartky und Dempster.

Ein zweiter Teil mit der Berechnung der aplanatischen Flächen wird folgen.

Die Anregung zu dieser Arbeit, für die ich Herrn Dr. J. Mattauch danke, gab eine Idee von ihm zu einem Massenspektrographen mit Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung, die in einer folgenden Arbeit behandelt wird.

Auch der österreichisch-deutschen Wissenschaftshilfe, durch deren Unterstützung mir die Ausführung dieser Arbeit ermöglicht wurde, sei hier wärmstens gedankt.

Wien, I. Physikalisches Institut der Universität.
