

Zur transversalen magnetischen Widerstandsänderung von InSb*.

Von

H. WEISS und H. WELKER.

Mit 5 Figuren im Text.

(Eingegangen am 18. Mai 1954.)

Die Abhängigkeit der transversalen magnetischen Widerstandsänderung vom Leitungstyp, der Beweglichkeit der Ladungsträger und der geometrischen Form des Halbleiterkörpers wird berechnet und am InSb experimentell untersucht. Es ergibt sich, daß die Form erst für Beweglichkeiten größer als $10000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ eine wesentliche Rolle spielt, wobei der HALL-Winkel eine Forminvariante ist. An CORBINO-Scheiben aus InSb erwies sich der Widerstand in einem Magnetfeld von 10000 Gauß 24,6mal größer als ohne Feld.

I. Einleitung.

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß Elektronenleiter — sowohl Metalle als auch Halbleiter — ihren elektrischen Widerstand erhöhen, wenn sie in ein Magnetfeld gebracht werden. Dieser Effekt wird als Widerstandsänderung im Magnetfeld bezeichnet. In der Literatur unterscheidet man die transversale und die longitudinale Widerstandsänderung je nach dem das Magnetfeld senkrecht oder parallel zum elektrischen Strom gerichtet ist. Im allgemeinen werden sowohl für die theoretische als auch die experimentelle Behandlung des Problems langgestreckte Proben in Drahtform vorausgesetzt, ohne daß dies immer ausdrücklich betont ist. Bereits BOLTZMANN hat jedoch im Jahre 1886 erkannt, daß die geometrische Form der Probe für die Größe der Widerstandsänderung von ausschlaggebender Bedeutung ist. Die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der Form der Präparate ist, wie weiter unten gezeigt wird, nur an solchen Körpern leicht beobachtbar, die eine hohe Beweglichkeit der Ladungsträger aufweisen. Besonders geeignet hierfür ist die halbleitende III—V-Verbindung InSb. Diese besitzt nach Leitfähigkeits- und HALL-Effektmessungen¹ eine Breite der verbotenen Zone (bezogen auf den absoluten Nullpunkt der Temperatur) von $0,27 \text{ eV}$.

Für die Widerstandsänderung sind die hohe Elektronenbeweglichkeit μ_n von maximal $63000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ bei Zimmertemperatur und die etwa 100mal kleinere Löcherbeweglichkeit μ_p von Bedeutung. Wegen des besonders großen Verhältnisses $b = \mu_n/\mu_p \approx 100$ besitzt das InSb

* HEITN Professor Dr. R. W. POHL zum 70. Geburtstag.

¹ MADELUNG, O., u: H. WEISS: Z. Naturforsch. 9a, (Juniheft 1954).

neben dem Eigenleitungsbereich bei hohen Temperaturen und dem Störleitungsbereich bei tiefen Temperaturen einen ausgeprägten Bereich der „gemischten Leitung“ bei mittleren Temperaturen. Dieser Bereich ist etwa auf der einen Seite durch die Eigenleitung (Elektronenkonzentration $n = \text{Löcherkonzentration } p$) und auf der anderen Seite durch den Nulldurchgang des HALL-Koeffizienten ($n/p = 1/b^2$) abzugrenzen.

II. Allgemeines über die physikalische Widerstandsänderung.

Zur Messung der transversalen Widerstandsänderung (im üblichen physikalischen Sinne) wird der in Fig. 3 a dargestellte langgestreckte, an seinen beiden Enden mit Elektroden versehene Leiter in ein Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene gebracht. Es soll sich dabei zunächst um einen reinen Elektronenleiter handeln. Legt man ohne Magnetfeld eine Spannung an die Elektroden, so fließen die Elektronen parallel zur Längsausdehnung des Leiters. Beim Einschalten des Magnetfeldes erfahren sie im ersten Augenblick eine Ablenkung durch die LORENTZ-Kraft senkrecht zum Magnetfeld und zum elektrischen Feld. Dadurch wird die eine Längsseite des Leiters negativ und die andere positiv aufgeladen. Dies führt zu einem elektrischen Gegenfeld, dem sog. HALL-Feld. Der Aufladungsprozeß ist beendet, wenn das HALL-Feld gerade so groß geworden ist, daß es die Wirkung der magnetischen Kraft auf die Elektronen kompensiert. Aus der Gleichheit von elektrischer und magnetischer Kraft ergibt sich für die HALL-Feldstärke

$$E_y = \mu_n B E_x,$$

wobei E_x die in der Längsrichtung des Leiters wirksame elektrische Primärfeldstärke in V/cm und B die magnetische Induktion in Vsec/cm² ist. Im stationären Endzustand laufen die Elektronen wieder parallel zur Längsrichtung des Leiters, genau so wie im Fall ohne Magnetfeld. Die Äquipotentiallinien haben dabei eine Drehung um den HALL-Winkel ϑ erfahren, wobei¹

$$\text{tg } \vartheta = \mu_n B.$$

Aus dieser stark vereinfachten Betrachtungsweise ergibt sich noch keine Widerstandsänderung im Magnetfeld. In Wirklichkeit ist jedoch immer eine positive Widerstandsänderung im Magnetfeld vorhanden. Sie rührt davon her, daß die Elektronen keine einheitliche Geschwindigkeit v_x besitzen. $v_x = \mu_n E_x$ ist lediglich der Mittelwert der Geschwindigkeit. Zur Geschwindigkeit des einzelnen Elektrons im äußeren elektrischen Feld kommt bei Halbleitern der im allgemeinen viel größere thermische

¹ Zur Definition des HALL-Winkels vgl. W. SHOCKLEY, *Electrons and Holes in Semiconductors*, D. van Nostrand Company, N. Y. 1950, S. 204—211, 270—282 und 336—343.

Geschwindigkeitsanteil hinzu. Die Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung nach der klassischen Statistik ergibt zunächst für die HALL-Feldstärke

$$E_y = \frac{3\pi}{8} \mu_n B E_x \quad (1)$$

und für den HALL-Winkel

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{3\pi}{8} \mu_n B. \quad (2)$$

Jetzt ist eine Kompensation der magnetischen Kraft durch das HALL-Feld für jedes einzelne Elektron wegen der nicht einheitlichen Geschwindigkeit nicht mehr möglich. Es treten sowohl Rechtsablenkungen als auch Linksablenkungen der Elektronenbahnen gegenüber der Längsrichtung des Stabes auf. Dies führt dazu, daß die Elektronenbewegung im Magnetfeld immer mit einer Vergrößerung des elektrischen Widerstandes (relativ zum magnetfeldfreien Fall) verbunden ist. Unter den üblichen vereinfachenden Annahmen gilt für schwache Magnetfelder ($\mu_n B \ll 1$)¹ für die relative Widerstandsänderung:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_B} = \frac{\sigma_0 - \sigma_B}{\sigma_0} = \frac{4 - \pi}{\pi} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 (\mu_n B)^2. \quad (3)$$

Da die Widerstandsänderung durch eine Verkleinerung der Elektronenbeweglichkeit im Magnetfeld bedingt ist, schreibt man besser:

$$\frac{\Delta \mu_n}{\mu_n} = - \frac{4 - \pi}{\pi} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 (\mu_n B)^2. \quad (4)$$

Gl. (3) und (4) gelten für reine Elektronenleitung. Im Falle gemischter Leitung gilt²

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_B} = \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 B^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{\mu_n^3 n + \mu_p^3 p}{\mu_n n + \mu_p p} - \frac{(\mu_n^2 n - \mu_p^2 p)^2}{(\mu_n n + \mu_p p)^2} \right\}, \quad (5)$$

wobei μ_n, μ_p die Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeit, n, p die Elektronen- bzw. die Löcherkonzentration bedeutet. Bei vorgegebenem Verhältnis $\mu_n/\mu_p = b$ wird das Maximum der Widerstandsänderung erreicht bei einem Konzentrationsverhältnis

$$\frac{n}{p} = \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{b} \right) + \frac{2}{b} \right] / \left[\frac{4}{\pi} (1 - b) + 2b \right]. \quad (6)$$

Der höchste erzielbare $\Delta \varrho/\varrho_B$ -Wert wird damit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_B} &= \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 \frac{4}{\pi} \left(b + \frac{(b-1)^2}{\pi} \right) \mu_p^2 B^2 \\ &= \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 \frac{4}{\pi} \left(\mu_n \mu_p + \frac{(\mu_n - \mu_p)^2}{\pi} \right) B^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹ Vgl. FRÖHLICH, H.: Elektronentheorie der Metalle, S. 232—248. Berlin: Springer 1936.

² MADELUNG, O., u. H. WELKER: Z. angew. Phys. 5, 12 (1953), Gl. (7).

Dieser Wert ist immer größer als der durch Gl. (3) gegebene. Insbesondere gilt für $\mu_n = \mu_p$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_B} = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 \frac{4}{\pi} (\mu_n B)^2. \tag{8}$$

Dieses Maximum wird bei $n = p$ erreicht. Die Widerstandsänderung ist dann etwa 5mal so groß wie in (3).

Von besonderem Interesse ist der Fall $b \rightarrow \infty$. Es ergibt sich hier:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_B} = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 \frac{4}{\pi^2} \mu_n^2 B^2 \tag{9}$$

für

$$\frac{n}{p} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) b}. \tag{10}$$

Allgemein gilt: Ist $\mu_n > \mu_p$, so liegt das Maximum der Widerstandsänderung bei $n < p$, also bei überwiegender Löcherkonzentration. Da jedoch der Vorzeichenwechsel des HALL-Koeffizienten erst bei $n/p = 1/b^2$ erfolgt, befindet sich das Maximum der Widerstandsänderung noch in dem Bereich der gemischten Leitung, in welchem die HALL-Konstante das für Elektronenleitung typische Vorzeichen besitzt. Dies wird experimentell am einfachsten dadurch nachgeprüft, daß man die verschiedenen n/p -Werte durch Variation

der Temperatur herstellt und Widerstandsänderung und HALL-Effekt an einem einzigen InSb-Präparat als Funktion der Temperatur mißt (Fig. 1)¹. Wie es sein muß, liegt der Nulldurchgang des HALL-Koeffizienten bei tieferen Temperaturen als das Maximum der Widerstandsänderung.

Ersichtlich ist die Widerstandsänderung auch dann besonders groß, wenn die Elektronenbeweglichkeit sehr groß ist. Für den Vergleich mit dem Experiment wird im allgemeinen $\Delta \rho / \rho_0$ oder überhaupt nur der relative Widerstand ρ_B / ρ_0 aufgetragen.

Bis vor kurzem war Wismut der Körper mit der größten Beweglichkeit und damit der größten Widerstandsänderung im Magnetfeld. Der

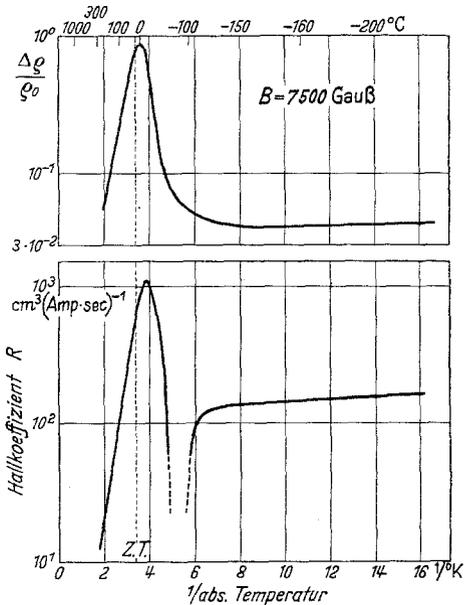


Fig. 1. Relative Widerstandsänderung und HALL-Koeffizient R für eine p -leitende Probe aus InSb in Abhängigkeit von der reziproken Temperatur. Magnetische Induktion 7500 Gauß.

¹ Diese Figur ist aus H. WEISS, Z. Naturforsch. 8a, 463 (1953), Fig. 5b und 7 aus den für Präparat p6 gültigen Kurven entstanden.

relative Widerstand des Bi ist in Fig. 2 in der untersten Kurve dargestellt.

Bei InSb ergibt sich infolge der wesentlich größeren Elektronenbeweglichkeit eine viel höhere Widerstandsänderung im Magnetfeld als bei Bi. So erhielt man bei der in Fig. 1 verwendeten InSb-Probe ($\rho = 1,5 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{cm}$, $\mu = 20000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$) den in Fig. 2 dargestellten Verlauf des relativen Widerstandes, der bei 10000 Gauß einen Wert von 2,45 erreicht gegenüber Bi mit nur 1,45.

Die genauere Analyse zeigt, daß diese Probe in dem Gebiet der gemischten Leitung liegt, so daß also für die Auswertung der Messung von der allgemeinen Gl. (5) ausgegangen werden muß. Da darüber hinaus die Gültigkeit des quadratischen Gesetzes auf einen sehr kleinen Bereich beschränkt ist, soll auf eine genauere Auswertung verzichtet werden.

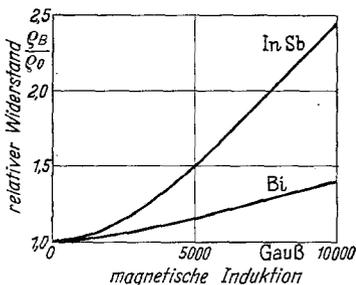


Fig. 2. Relativer Widerstand von Bi und einer Probe InSb (gemischte Leitung) in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

Auch Wismut dürfte nicht, wie vielfach angenommen wird, Elektronenleiter, sondern ein gemischter Leiter mit $n = p$ sein, so daß also die in Fig. 2 vorliegenden Proben in gewissem Sinne vergleichbar sind.

III. Einfluß der geometrischen Form auf die Widerstandsänderung.

Die bisherigen Überlegungen und Ergebnisse sind wesentlich an die Existenz einer HALL-Feldstärke gebunden, welche die magnetischen Kräfte in nullter Ordnung kompensiert. Die zum HALL-Feld führende elektrische Aufladung fällt jedoch weg, wenn man eine geometrische Formgebung und Elektrodenanordnung für den Leiter benutzt, wie sie zuerst von CORBINO¹ im Jahre 1911 angegeben wurde (Fig. 3 b). Wegen der ringförmigen Geschlossenheit kann keine Aufladung und damit kein HALL-Feld mehr auftreten. Die Rotationssymmetrie des elektrischen Feldes wird im Magnetfeld nicht verändert. Dafür durchsetzt jetzt der elektrische Strom den Leiter nicht mehr auf dem kürzesten Wege, sondern auf einem Wege, welcher gegen diesen um den HALL-Winkel ϑ gedreht ist. Die Strombahnen sind die in Fig. 3 b eingezeichneten logarithmischen Spiralen. Zu der oben besprochenen „physikalischen“

¹ CORBINO, O. M.: Phys. Z. 12, 561 (1911). — Vgl. auch MEISSNER, W., u. M. KOHLER: Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XI/2. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1935. Insbesondere wird in letzterem auf die bereits von BOLTZMANN erkannte Formabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung hingewiesen.

Widerstandsänderung kommt so eine zusätzliche Widerstandsvergrößerung hinzu, die davon herrührt, daß der Strom den Leiter nicht mehr auf dem kürzesten Wege durchsetzt und daß ferner die verlängerten Strompfade einen verkleinerten Querschnitt besitzen. Da sowohl die Wegverlängerung als auch die Querschnittsverringerung proportional $1/\cos \vartheta$ ist, ergibt sich für den relativen Widerstand im Magnetfeld

$$\frac{R_B}{R_0} = \frac{\mu_0}{\mu_B \cos^2 \vartheta} =: \frac{\mu_0}{\mu_B} (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta). \quad (11)$$

Hierin bedeutet μ_0 den Wert der Beweglichkeit ohne Magnetfeld, μ_B den durch das Magnetfeld verkleinerten Wert [vgl. Gl. (4)]. Führen wir den HALL-Winkel ϑ beim Feld B zurück auf den HALL-Winkel ϑ_0 beim Feld $B \rightarrow 0$ vermöge der Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{3\pi}{8} \mu_0 \cdot B \frac{\mu_B}{\mu_0} = \operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{\mu_B}{\mu_0}, \quad (12)$$

so erhalten wir für den relativen Widerstand im Magnetfeld die Beziehung¹

$$\frac{R_B}{R_0} = \frac{\mu_0}{\mu_B} + \frac{\mu_B}{\mu_0} \operatorname{tg}^2 \vartheta_0. \quad (13)$$

Damit das Zusatzglied in Gl. (13) einen merklichen Beitrag liefert, muß $\operatorname{tg} \vartheta_0 > 1$ sein, wobei jedoch gleichzeitig μ_B/μ_0 , welches naturgemäß immer < 1 ist, nicht zu klein werden darf. Diese in sich widerspruchsvolle Forderung kann jedoch bis zu einem gewissen Grade dadurch erfüllt werden, daß man in einem Temperaturbereich arbeitet, in welchem die physikalische Widerstandsänderung klein ist. Damit jedoch $\operatorname{tg} \vartheta_0 > 1$ ist, muß in technisch leicht herstellbaren Magnetfeldern bis zu 10 000 Gauß die Elektronenbeweglichkeit mindestens $10\,000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ sein. Nur Körper wie InSb und InAs werden also wegen ihrer extrem hohen Beweglichkeiten bei Zimmertemperatur den Effekt deutlich zeigen, während er bei Bi nicht erwartet werden kann.

Die große, ja überwiegende Bedeutung des Zusatzgliedes in Gl. (14) wird deutlich, wenn man in Fig. 4 die große Widerstandsänderung einer CORBINO-Scheibe (Kurve d) mit der eines längsgestreckten Stabes (Kurve a) vergleicht. Wie es sein muß, erhält man für die quadratische Platte (Kurve b) und für die langgestreckte Platte mit Elektroden an den Längsseiten (Kurve c) relative Widerstände, die zwischen den Grenzwerten für den langgestreckten Stab und die CORBINO-Scheiben liegen.

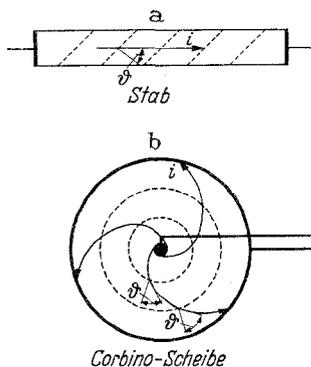


Fig. 3a u. b. Verlauf der Äquipotential- und Stromlinien. a In einer stabförmigen Probe; b in einer CORBINO-Scheibe.

¹ HALPERN, L., u. K. M. KOCH: Acta physica Austriaca 5, 129 (1951). Unsere Gl. (13) geht in Gl. (4) l. c. über, wenn $\mu_B = \mu_0$ gesetzt wird.

In den Fällen *b* und *c* hat man neben einer Richtungsänderung der elektrischen Feldstärke auch eine solche des Stromes und zwar so, daß der Winkel zwischen beiden Richtungen gleich dem HALL-Winkel ϑ ist. Der HALL-Winkel ϑ ist also bei gegebenem Material und gegebenem Magnetfeld eine Invariante, unabhängig von der geometrischen Form. Es muß noch erwähnt werden, daß die vier in Fig. 4 zur Darstellung gebrachten InSb-Präparate aus demselben Kristallmaterial hergestellt sind, also gleiche spezifische Widerstände und Elektronenbeweglichkeiten besitzen.

Während Gl. (2) und (5) nur für schwache Magnetfelder gelten, gelten Gl. (11) bis (13) ohne Rücksicht auf die Stärke des Magnetfeldes. Dies

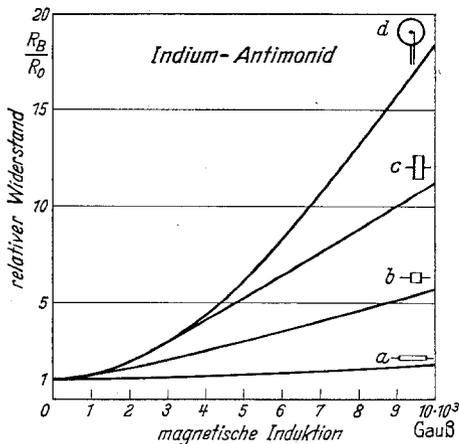


Fig. 4. Relativer Widerstand in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion für vier InSb-Proben gleicher Reinheit, jedoch verschiedener geometrischer Form.

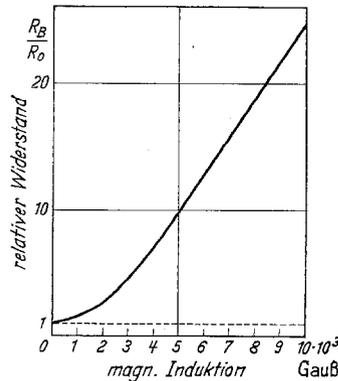


Fig. 5. Relativer Widerstand einer CORBINO-Scheibe aus InSb, $\mu = 63000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$.

läßt sich an Hand der gemessenen Kurven verifizieren, indem man den Wert (12) von $\text{tg } \vartheta$ in (11) einsetzt und nach μ_0 auflöst:

$$\mu_0 = \frac{\mu_0}{\mu_B} \frac{8}{3\pi B} \sqrt{\frac{R_B}{R_0} \frac{\mu_B}{\mu_0} - 1}.$$

Das Verhältnis μ_0/μ_B kann für jede Feldstärke aus der für den langgestreckten Stab gültigen Kurve *a* entnommen werden. Es ist somit möglich, für jede Feldstärke den Wert μ_0 zu berechnen. Die sich so für die Werte der magnetischen Feldstärke von 1000 bis 10000 Gauß ergebenden μ_0 -Werte sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Es ergibt sich Unabhängigkeit des μ_0 -Wertes von der Feldstärke, bei der die Messung durchgeführt wurde und befriedigende Übereinstimmung mit der HALL-Beweglichkeit von $43000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$.

Durch Verbesserung der Reinheit der InSb-Proben ist es möglich geworden, eine HALL-Beweglichkeit von $63000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ zu erreichen.

Tabelle 1.

Magnetische Induktion B [Gß]	μ_0/μ_B Stab Fig. 4, Kurve a	R_B/R_0 CORBINO-Scheibe Fig. 4, Kurve d	μ_0 [cm ² /Vsec]
1000	1,014	1,25	44000
2000	1,05	2,0	42400
3000	1,09	3,0	41000
4000	1,14	4,4	40800
6000	1,25	8,2	41500
8000	1,36	13,0	42000
10000	1,48	18,7	43000

Eine CORBINO-Scheibe aus solchem Material weist den in Fig. 5 dargestellten Verlauf des relativen Widerstandes auf. Bei 10000 Gauß ist der Widerstand 24,6mal so groß wie ohne Feld.

Wir hatten vor einiger Zeit Gelegenheit, mit Herrn Dr. SHOCKLEY über die Ergebnisse unserer Untersuchungen zu diskutieren und möchten nicht verfehlen, ihm für wertvolle Hinweise zu danken.

Erlangen, Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke A. G.