

(Untersuchungen zur Molekularstrahlmethode aus dem Institut für physikalische Chemie der Hamburgischen Universität, Nr. 15.)

Beugung von Molekularstrahlen.

Von I. Estermann und O. Stern in Hamburg.

Mit 30 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Dezember 1929.)

Trifft ein Molekularstrahl (H_2 ; He) auf eine Kristallspaltfläche (Li F) auf, so zeigen die von ihr gestreuten Strahlen in allen Einzelheiten eine Intensitätsverteilung, wie sie den von einem Kreuzgitter entworfenen Spektren entspricht. Die aus der Gitterkonstante des Kristalls berechnete Wellenlänge hat für verschiedene m und v den

$$\text{von de Broglie geforderten Wert } \lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Die folgende Arbeit enthält die Beschreibung der Versuche, die in diesem Jahre im hiesigen Institut zum Nachweis der von de Broglie vorausgesagten Wellennatur von Molekularstrahlen unternommen wurden. Hierzu wurde die Reflexion und die Streuung von Molekularstrahlen aus Helium oder Wasserstoff an einer Kristallspaltfläche untersucht. Die Versuchsanordnung war dieselbe wie in der Arbeit von Knauer und Stern*, doch wurde eine Reihe von Änderungen an der Apparatur vorgenommen, die im folgenden an geeigneter Stelle beschrieben werden sollen. Teil I enthält die Versuche, die der eine von uns (Stern) von Januar bis April ausgeführt hat**, über deren Resultate bereits kurz in den Naturwissenschaften*** berichtet wurde. Teil II gibt die von uns gemeinsam unternommenen Versuche wieder.

Teil I.

Obwohl die hier beschriebenen Versuche durch die in Teil II geschilderten weit überholt sind, sollen sie hier noch kurz wiedergegeben werden, da sie den ersten sicheren Beweis für das Auftreten von Beugungserscheinungen am Kreuzgitter bei Molekularstrahlen enthalten. Den Ausgangspunkt bildeten die Versuche von Knauer und Stern über die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Kristallorientierung. Damals wurden die beiden in Fig. 1 und 2 gezeichneten Orientierungen

* F. Knauer und O. Stern, U. z. M. Nr. 11, ZS. f. Phys. **53**, 779, 1929.

** Die Versuche stellen eine Fortsetzung der Arbeit von Knauer und Stern dar. Da Herr Knauer zu meinem großen Bedauern wegen eigener Untersuchungen die weitere Mitarbeit an den Versuchen einzustellen wünschte, mußte ich die Versuche zunächst allein weiterführen. Stern.

*** O. Stern, Naturwissensch. **17**, 391, 1929.

untersucht. In der „geraden“ Lage (Fig. 1) steht die eine der beiden in der Kristalloberfläche liegenden Hauptachsen senkrecht auf der Einfallsebene. Bei der anderen Lage (Fig. 2) war der Kristall in seiner Ebene um 45° gedreht. Im folgenden soll diese Lage des Kristalls, bei der eine Hauptachse des Oberflächengitters gleichnamiger Ionen senkrecht zur Einfallsebene steht, als 0-Lage bezeichnet werden. Die Drehwinkel des Kristalls in seiner Ebene werden von ihr aus gezählt und im folgenden kurz als „Drehung“ bezeichnet. Fig. 1 entspricht also der Drehung 45° .

Der Apparat wurde nun so umgebaut, daß nicht nur die beiden genannten Lagen untersucht werden konnten, sondern daß der Kristall

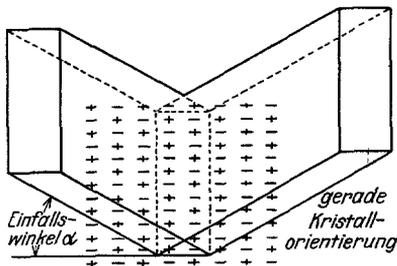


Fig. 1.

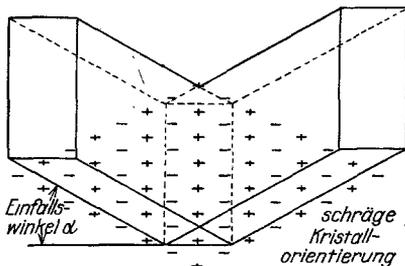


Fig. 2.

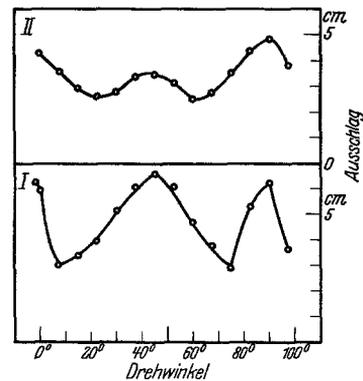


Fig. 3. Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Kristallorientierung.

mit Hilfe eines Zahnrades und einer von außen durch einen Schliff zu betätigenden Schnecke stetig in seiner Ebene gedreht werden konnte. Das Resultat dieses Versuches bei einem Einfallswinkel von 10° * gibt Kurve I (Fig. 3). Das Reflexionsvermögen hat in den beiden früher untersuchten Lagen (Drehung 0° und 45°) ein Maximum. Die Schärfe des Maximums bei 0° ist sehr beträchtlich, eine Drehung um $7\frac{1}{2}^\circ$ setzt das Reflexionsvermögen auf die Hälfte herab. Dieses Verhalten legte die Vermutung

* Unter dem Einfallswinkel verstehen wir stets den Winkel zwischen einfallendem Strahl und Kristalloberfläche (Glanzwinkel), kleine Einfallswinkel bedeuten also flachen Einfall.

nahe, daß bei der Nullstellung außer dem reflektierten Strahl auch noch gebeugte Strahlen in den Auffängerspalt gelangten, die bei einer geringen Verdrehung des Kristallgitters ihre Lage stark änderten, so daß sie nicht mehr in den Auffängerspalt hineinkamen. Theoretisch sind solche Beugungsmaxima zu erwarten, wenn nicht, wie in der Arbeit von Knauer und Stern angenommen, das gemeinsam aus positiven und negativen Ionen aufgebaute Gitter als Kreuzgitter wirkt, sondern nur das Gitter gleichnamiger Ionen. Die Theorie (siehe Anhang) zeigt, daß im letzten Falle Beugungsspektren auftreten sollten, die für die zu erwartenden de Brogliewellenlängen einen Winkel von etwa 8° bis 9° mit dem reflektierten Strahl bilden und nahezu (bis auf 1 bis 2°) in der Strahlebene liegen. Dabei verstehen wir unter der „Strahlebene“ diejenige Ebene, die durch die Strahlrichtung und die lange Kante des Rechtecks, das den Quer-

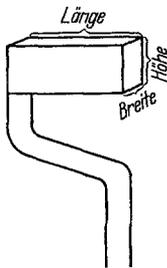


Fig. 4. Auffänger.

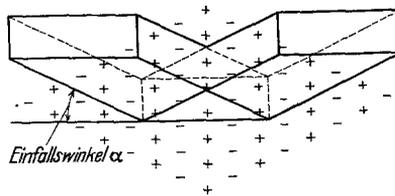


Fig. 5. „Hochkant“ auffallender Strahl.

schnitt ($5 \times 0,5$ mm) des Strahls bildet, bestimmt ist. Der Strahl fiel bei diesen Versüchen so auf die Kristalloberfläche, daß die lange Kante dieses Rechtecks zur Kristalloberfläche parallel war (vgl. Fig. 1 und 2). Solche Maxima mußten bei den benutzten Apparatdimensionen (Höhe des Auffängerspalts 5 mm, Breite 0,5 mm, Abstand vom Kristall 15 mm; siehe Fig. 4) noch mit in den Auffänger hineingelangen. Die Theorie ergibt weiter, daß bei einer geringen Drehung des Kristalls die erwähnten Beugungsspektren teilweise aus der Strahlebene herausrücken, evtl. bei weiterer Drehung gar nicht mehr zustande kommen. Ferner ergibt die Theorie, daß bei größeren Einfallswinkeln dieser Effekt schwächer wird. In Übereinstimmung damit steht Kurve II (Fig. 3), die mit einem Einfallswinkel von 20° aufgenommen wurde und wesentlich flachere Maxima aufweist. Diese Annahme erklärt zugleich das merkwürdige Resultat von Knauer und Stern, daß bei tiefer Strahltemperatur (100° K) ein Maximum des Reflexionsvermögens bei etwa 20° Einfallswinkel gefunden wurde. Denn bei dieser Temperatur kommen infolge der größeren de Brogliewellen-

länge die Beugungsmaxima erst bei etwa 20° Einfallswinkel zustande. Um diese Beugungsspektren direkt untersuchen zu können, wurde der Apparat so umgebaut, daß der Strahl „hochkant“ auf den Kristall auffiel, so daß jetzt die Strahlebene mit der Einfallsebene zusammenfiel (Fig. 5). Dies wurde dadurch erreicht, daß der Kristall jetzt horizontal am Kristallhalter befestigt wurde, während er früher vertikal angebracht war (vgl. Fig. 6 und 7), und der Strahl entsprechend um den Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ$

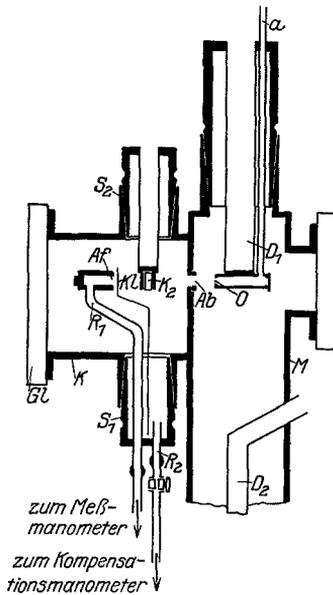


Fig. 6. Alte Anordnung.

O = Ofenspalt, Ab = Abbildespalt, Af = Auffänge, K_2 = Kristall, K_1 = Klappe, a = Zuführungsrohr für Gas, D_1 = Kühlgefäß, für die anderen Bezeichnungen vgl. U. z. M. Nr. 11, 1. c.

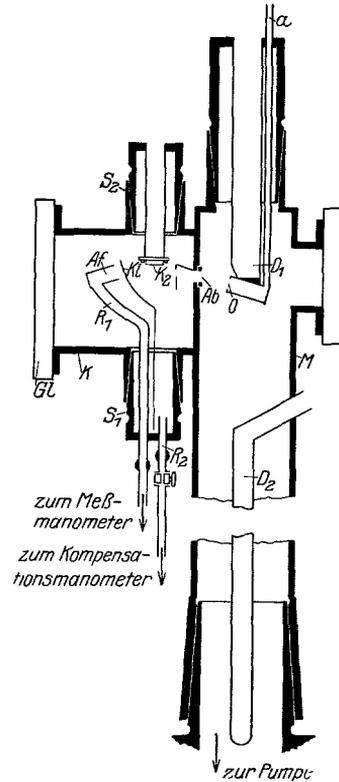


Fig. 7. Neue Anordnung.

(1 : 5) geneigt wurde. Der Auffänger wurde um den gleichen Winkel geneigt, behielt aber sonst seine Lage bei, so daß seine Drehachse jetzt senkrecht auf der Kristalloberfläche stand, während sie früher in der Kristalloberfläche lag. Kurve III (Fig. 8) ist die erste mit dieser Anordnung gewonnene Kurve. Sie zeigt tatsächlich die erwarteten Beugungsmaxima. Daß diese überhaupt in den Auffänger hineinkamen, obgleich sie näher an der Kristalloberfläche liegen als der reflektierte Strahl (siehe Anhang

S. 119), lag an der beträchtlichen Höhe des Auffängerspalts (5 mm). Daß es sich wirklich um Beugungsmaxima handelt, zeigt Kurve IV (Fig. 8), die mit einem um 45° in seiner Ebene gedrehten Kristall erhalten wurde. Die Theorie ergibt, daß bei dieser Lage des Kreuzgitters keine so nahe

am reflektierten Strahl liegenden Beugungsspektren zustande kommen, in Übereinstimmung damit zeigt Kurve IV keine Andeutung davon. Die Kurven V, VI und VII (Fig. 8) sind mit Helium

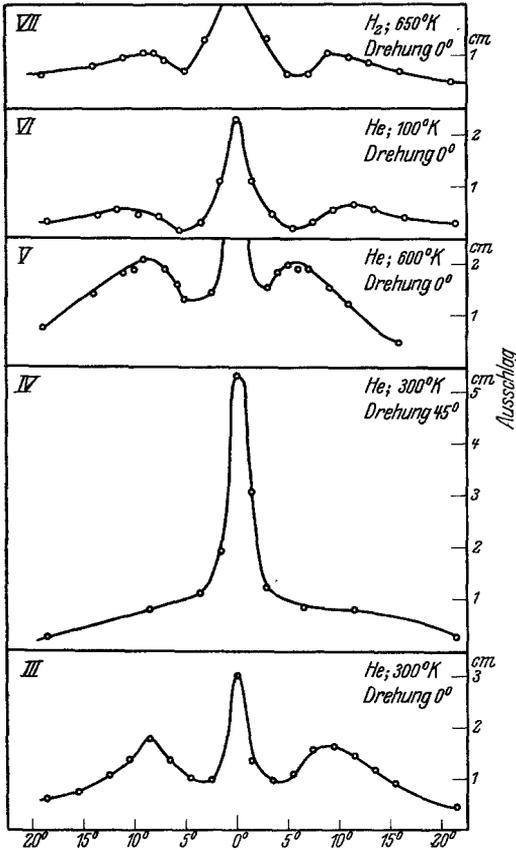


Fig. 8. Beugung von He und H₂ an NaCl.

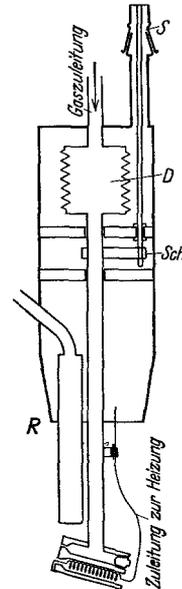


Fig. 9. Justierbarer Ofenspalt.

bei hoher und tiefer Temperatur und mit Wasserstoff bei hoher Temperatur aufgenommen und zeigen das gleiche Verhalten*. Die nach der de Broglieschen Formel $\lambda = \frac{h}{mv}$ zu erwartende Verschiebung der Beu-

* Es wurde manchmal derselbe Kristall an mehreren Tagen benutzt. In diesem Falle wurde er durch Füllen des Apparates mit Helium von 1 bis 2 mm Druck konserviert. Läßt man ihn längere Zeit im Vakuum stehen, so verdirbt die Kristalloberfläche.

gungsmaxima mit der Temperatur ist der Richtung nach vorhanden, aber wesentlich zu klein. Dies konnte, wie bereits in der Note in den „Naturwissenschaften“ erwähnt, an der unzureichenden Justierungsmöglichkeit liegen, für die nähere Diskussion vgl. Teil II. Immerhin stellen diese Versuche sicher, daß es sich bei den beobachteten Erscheinungen um Beugung am Kreuzgitter handelt.

Teil II.

Zuerst wurden die in Teil I beschriebenen Versuche zum Teil wiederholt, wobei sich die gleichen Resultate ergaben. Wie schon oben bemerkt, zeigte es sich, daß die Justierungsmöglichkeiten unzureichend waren.

Justierung.

Ofenspaltjustierung. Der Ofenspalt wurde offenbar bei Erwärmung infolge der Ausdehnung des ihn tragenden Gaszuführungsrohres nach unten verschoben, bei Abkühlung infolge Zusammenziehung nach oben. Eine Überschlagsrechnung ergibt für den Betrag dieser Verschiebung etwa 0,5 mm. Sie machte sich auch dadurch bemerkbar, daß für die Intensität des reflektierten Strahles bei hoher oder tiefer Temperatur je nach der Justierung schwankende Werte erhalten wurden. Um diese Ausdehnung kompensieren und gleichzeitig auch die Justierung während des Versuches verbessern zu können, wurde ein Teil des Zuführungsrohres durch eine federnde Dose *D* ersetzt. Dadurch war es möglich, den Ofenspalt in der aus Fig. 9 ersichtlichen Weise mit Hilfe der durch den Schliff *S* betätigten Schraube *Sch* während des Versuches in seiner Höhe zu verschieben. Seitliche Verschiebung war wie bisher durch Drehen des den ganzen Ofenspalt tragenden Schliffs möglich. Für Versuche mit gekühltem Strahl wurde noch ein Rohr *R* eingebaut, das mit flüssiger Luft gefüllt und mit dem Ofenspalt durch eine biegsame Kupferlitze verbunden werden konnte. Der Ofenspalt war zuerst 1, dann 0,5 mm lang und 0,2 mm breit.

Kristallhalterjustierung. Es kam vor, daß bei Drehung des Kristalls um 90° in seiner Ebene der reflektierte Strahl um mehrere Grad verschoben wurde, ein Zeichen dafür, daß die reflektierende Kristalloberfläche nicht senkrecht auf der Drehachse stand. Das kam daher, daß die Kristalle mitunter nicht ganz parallel auf der Auflagefläche saßen. Der Kristallhalter wurde daher so abgeändert, daß die Auflagefläche ähnlich wie bei der Cardanischen Aufhängung befestigt wurde (Fig. 10). Mit Hilfe der Schrauben S_1 und S_2 , die von außen durch zwei mit Schrauben-

ziehern versehene Schiffe gedreht wurden, konnte die Kristalloberfläche um zwei zueinander und zur Drehachse senkrechte Achsen gedreht werden. Auf diese Weise konnte sie senkrecht zur Drehachse justiert werden, was durch Beobachtung des reflektierten Strahles in den verschiedenen um 90° voneinander entfernten Lagen mit einer Genauigkeit von weniger als $0,5^\circ$ möglich war. Der Kristall wurde so auf dem Halter befestigt, daß die Hauptachsen des Oberflächengitters gleichnamiger Ionen parallel zu den Drehachsen der Cardanischen Justierung lagen. Zur Heizung des Kristalls wurde auf der Unterseite der Auflagefläche ein mit Glimmer isolierter Streifen aus dünnem Platinblech angebracht, der elektrisch erwärmt wurde.

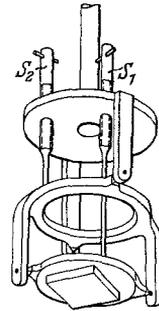


Fig. 10.
Kristallhalter.

Auffänger. Um die zunächst untersuchten Kreuzgitterspektren der Ordnung 01 richtig zu beobachten, hätte der Auffänger um die in der Einfallsebene liegende Hauptachse des Oberflächengitters gleichnamiger Ionen drehbar sein müssen (siehe Anhang S. 119). Dies wäre bei dem vorhandenen Apparat nur mit sehr großen Schwierigkeiten zu erreichen gewesen. Bei unserem Apparat stimmte die Drehachse des Auffängers mit der des Kristallhalters überein. Man hätte also den Auffänger noch mit einer weiteren Bewegungsvorrichtung versehen müssen, um seine Höhe über der Kristalloberfläche verändern zu können. Dabei hätte dafür gesorgt werden müssen, daß die Richtung des Auffängerkanals stets auf den Durchstoßpunkt der Drehachse des Kristallhalters durch die Kristalloberfläche hinzeigte. Auch dies wäre nur mit großen apparativen Komplikationen zu erreichen gewesen. Bei den früheren Versuchen wurde, wie erwähnt, diese Schwierigkeit in roher Weise dadurch umgangen, daß der Auffängerspalt so hoch gemacht wurde, daß auch noch unter ziemlich flachem Winkel vom Kristall ausgehende Strahlen in ihn hineingelangen konnten. Um sauberere Bedingungen zu erhalten und gleichzeitig die erwähnten apparativen Komplikationen zu vermeiden, haben wir einen Auffängerspalt von kleinerer Höhe (1,5 mm) verwendet und die Bewegungsmöglichkeiten des neuen Kristallhalters ausgenutzt. Statt den Auffänger an die Kristalloberfläche heranzubringen, haben wir den Kristall um die zur Einfallsebene des Strahles senkrechte Achse gekippt. Die Forderung, daß der Auffängerkanal stets auf den Durchstoßpunkt der Drehachse des Kristallhalters durch die Kristalloberfläche hinzeigt, ist dabei von selbst erfüllt. Allerdings wird der Einfallswinkel dabei ver-

größert, jedoch nur um wenige Grad. Wie die weiter unten mitgeteilten Untersuchungen über die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens vom Einfallswinkel zeigen, ist in dem in Frage kommenden Bereich (Einfallswinkel bis zu 20°) bei unseren Versuchsbedingungen die Reflexion praktisch vom Einfallswinkel unabhängig. Das gleiche haben wir für die Beugung angenommen. Bei unseren Versuchen sind wir dann so vorgegangen, daß wir bei jeder Stellung des Auffängers die „günstigste Kippung“ suchten, d. h. diejenige Kippung, bei der die Intensität des gebeugten Strahles ihr Maximum erreicht (vgl. auch die Diskussion über den Einfluß der Kippung im Anhang S. 121). Als weitere kleine Änderung ist zu erwähnen, daß in den Manometern die langen Spiralfedern durch kurze federnde Häkchen ersetzt wurden, wodurch die Empfindlichkeit der Manometer gegen Erschütterungen vermindert wurde.

Beugungsversuche mit Steinsalz.

Zunächst wurden die Versuche mit Helium und Steinsalz mit der verbesserten Apparatur wiederholt, und zwar zuerst nicht bei günstigster Kippung, sondern bei konstanter Kippung. Die Ergebnisse sind aus den

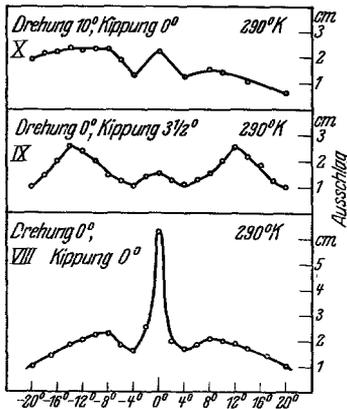


Fig. 11. Beugung von He an NaCl.

Kurven VIII bis X (Fig. 11) zu ersehen. Einfallswinkel: $11\frac{1}{2}^\circ +$ Kippwinkel. Kristallorientierung: Drehung 0° . Man sieht, daß bei Kurve VIII (Kippwinkel 0°) der reflektierte Strahl stark, die Beugungsmaxima verhältnismäßig schwach sind. Bei Kurve IX, Kippwinkel $3\frac{1}{2}^\circ$ * ist umgekehrt vom reflektierten Strahl nur noch eine Andeutung zu sehen, während die Beugungsmaxima viel stärker ausgeprägt und nach außen verschoben sind. Dieses Verhalten ist nach der elementaren Theorie der Kreuzgitter (siehe Anhang) zu erwarten, da die

Beugungsmaxima näher am Kristall liegen als der reflektierte Strahl. Auch das Auseinanderrücken der Beugungsmaxima bei stark gekipptem Kristall wird von der Theorie gefordert. Ein weiterer Beweis dafür, daß es sich um von einem Kreuzgitter herrührende Beugungsmaxima

* Die Kippwinkel sind nur aus den Dimensionen des Kristallhalters geschätzt, ihr Absolutwert ist bis zu 20% unsicher; die relative Genauigkeit beträgt etwa $\frac{1}{4}^\circ$.

handelt, ist aus Kurve X zu entnehmen, bei der der Kristall um etwa 10° in seiner Ebene gedreht war. Durch diese Verdrehung wird bei konstanter Kippung das eine Maximum verstärkt, das andere geschwächt (siehe Anhang S. 123).

Tabelle 1.

Beugungswinkel Grad	Ausschlag cm	Kippwinkel Grad	Beugungswinkel Grad	Ausschlag cm	Kippwinkel Grad
0	7,4	0			
- 4	2,55	0	+ 4	2,2 2,25 < 2,2	0 $\frac{1}{2}$ 1
- 6	3,6 3,1	$\frac{1}{2}$ 1	+ 6	3,05 3,25 < 3,2	$\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$
- 8	4,45 4,55 < 4,5	$\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$	+ 8	5,13 5,55 5,2	1 $1\frac{1}{2}$ 2
- 10	5,35 < 5,3	$1\frac{1}{2}$ 2	+ 10	5,0 5,42 5,25 4,7	$1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$ 3
- 11	5,4 < 5,4	$1\frac{1}{2}$ 2			
- 12	5,2 < 5,2	$1\frac{1}{2}$ 2	+ 12	4,0 < 4,0	$2\frac{1}{2}$ 2,3
- 14	3,45 4,4 4,1	$1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$	+ 14	2,9 < 2,9 2,6	$3\frac{1}{2}$ 3 $4\frac{1}{2}$
- 16	3,15 3,0	$3\frac{1}{2}$ 4			

In den Kurven XI und XII (Fig. 12) sind die Ergebnisse eines Versuches mit günstigster Kippung (Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ +$ Kippwinkel, Strahltemperatur bei Kurve XI 290° K, bei Kurve XII 580° K) wiedergegeben. In Übereinstimmung mit der Theorie sind die Winkel günstigster Kippung um so größer, je weiter man sich vom reflektierten Strahl entfernt. Tabelle 1 zeigt dieses Verhalten beim obigen Versuch, es wurde auch bei allen folgenden Versuchen verifiziert.

Der berechnete Abstand der Kreuzgitterspektren vom gespiegelten Strahl ergibt sich aus Tabelle 2.

Bei den in Teil I mitgeteilten Versuchen stimmte die Lage des bei Zimmertemperatur gefundenen Maximums mit der berechneten für die Ordnung 01 überein. Die Temperaturverschiebung der Maxima wurde

damals schon zu klein gefunden; es wurde betont, daß dieses Resultat wegen der Unzulänglichkeit der Justierung nicht sicher war. Die mit

Tabelle 2.

Strahltemperatur	Beugungswinkel	
	Ordnung 01	Ordnung 02
100° K	14 $\frac{1}{2}$ °	29 $\frac{1}{2}$ °
290	8 $\frac{1}{2}$	17
580	6	12

der verbesserten Justierung und flachem Einfallswinkel ($11\frac{1}{3}^\circ$) angestellten Versuche (Kurven VIII, IX, XI und XII) ergaben bei Zimmertemperatur, sowohl bei konstantem Einfallswinkel wie bei günstigster

Kippung, das gleiche Resultat. Die Temperaturverschiebung war jedoch praktisch 0, auch bei 580° K lag das Maximum etwa bei 9° *. Wir möchten annehmen, daß der Grund dafür darin liegt, daß beim Steinsalz auch die Maxima der Ordnung 02 sehr intensiv sind. Bei flachem Einfall ($11\frac{1}{3}^\circ$) würde bei Zimmertemperatur das Maximum der Ordnung 02 aus geometrischen Gründen unterdrückt werden (siehe Anhang S. 118), bei hoher Strahltemperatur sich dagegen deutlich bemerkbar machen.

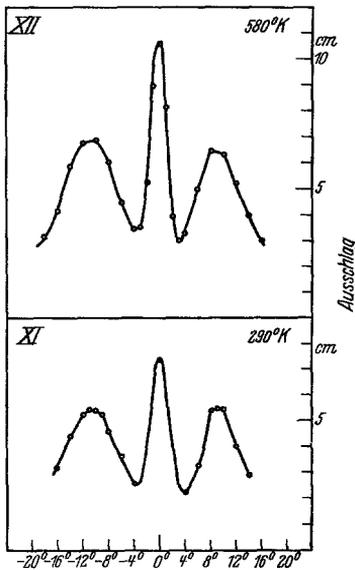


Fig. 12. Beugung von He an NaCl.

Zimmertemperatur (XIV) besonders sorgfältig (Abstand der Meßpunkte 1°) ausgemessen. Bei diesem Einfallswinkel sollte das Maximum der Ordnung 02 auch bei Zimmertemperatur noch in Erscheinung treten. Tatsächlich hat Kurve XIV auch den Charakter einer durch Über-

* Da die Lage des gespiegelten Strahles, besonders seiner Form wegen, nicht genauer als auf etwa 1° festgelegt werden konnte, wurde immer der mittlere Abstand der beiderseitigen Maxima gemessen.

Um diese Annahme zu stützen, haben wir Versuche mit steilerem Einfallswinkel ($18\frac{1}{3}^\circ$; 1:3) bei drei Temperaturen (Kurve XIII 100° K, XIV 290° K und XV 580° K, Fig. 13) ausgeführt und speziell die Kurve bei

lagerung der beiden Ordnungen entstandenen Kurve. Die bei hoher Temperatur aufgenommene Kurve XV zeigt das Maximum an der Stelle, wo es für die Ordnung 02 zu erwarten ist. Es sieht also so aus, als ob bei steigender Temperatur die Intensität der zweiten Ordnung im Vergleich zur ersten wächst. Umgekehrt ist bei der Kurve XIII, 100° K, das Maximum ungefähr bei der für die erste Ordnung zu erwartenden Stelle, da hier die zweite Ord-

nung so weit vom gespiegelten Strahl (29°) entfernt liegt, daß sie schon aus geometrischen Gründen stark geschwächt wird. Theoretisch sollte es durchaus denkbar sein, daß das Verhältnis der Intensitäten der verschiedenen Ordnungen mit der Temperatur variiert, denn bei einem von einem Gitter erzeugten Beugungs-Spektrum hängt dieses Verhältnis bekanntlich stark von der Form der Gitterstriche ab. Nun werden die Helium-Atome größerer Geschwindigkeit tiefer in das Potentialfeld des Kristalls eindringen als die langsameren*. Es ist daher durchaus denkbar, daß die „Form der Gitterstriche“ für Heliumatome verschiedener Geschwindigkeit verschieden ist. Sollte dies zutreffen, so wäre anderer-

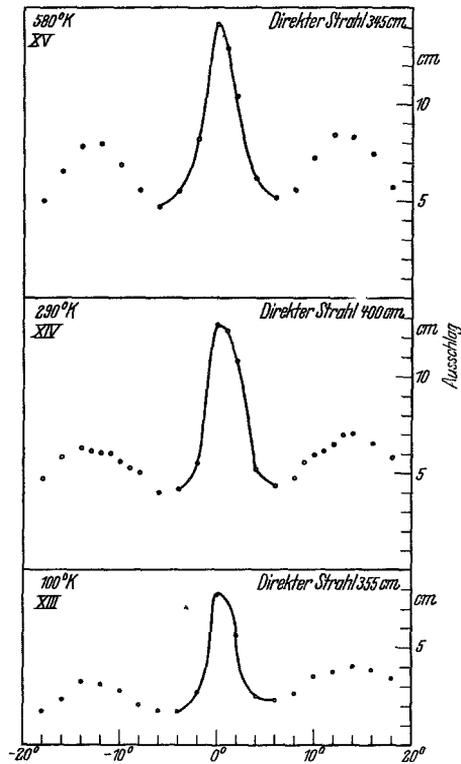


Fig. 13. Beugung von He an Na Cl.

seits die Untersuchung des Intensitätsverhältnisses der verschiedenen Ordnungen ein Mittel, um etwas über den Potentialverlauf an der Oberfläche eines Kristalls zu erfahren. Natürlich ist diese Deutung unserer Versuchsergebnisse noch durchaus hypothetisch und müßte durch Versuche mit „monochromatischen“ Molekularstrahlen (Molekularstrahlen einheitlicher Geschwindigkeit) geprüft werden. Eine solche Unter-

* Diese Folgerung aus der klassischen Theorie bleibt auch in der Wellenmechanik erhalten.

suchung dürfte jetzt keine besonderen experimentellen Schwierigkeiten mehr bieten und wird in Angriff genommen. Zunächst haben wir darauf verzichtet, die offenbar etwas komplizierten Verhältnisse am Steinsalz genauer zu untersuchen, da wir inzwischen gefunden hatten, daß die Versuche an LiF-Gittern ein viel einfacheres und klareres Bild ergeben. Immerhin möchten wir zum Schluß nochmals betonen, daß uns die Deutung der beobachteten Erscheinungen als Beugung der de Brogliewellen des Molekularstrahles am Kreuzgitter der Kristalloberfläche des NaCl völlig gesichert zu sein scheint.

Beugungsversuche mit Lithiumfluorid.

Wesentlich bessere Reflexion, schärfere Strahlen und intensivere Beugungsmaxima erhielten wir bei Versuchen mit LiF*. Auch vom diffusen Untergrund, der bei den Steinsalzversuchen noch merklich vorhanden war, war praktisch nichts mehr zu bemerken.

Tabelle 3.

Gas	Strahltemperatur	Ort des Maximums		Kurve
		berechnet	gefunden	
He	290° K	$11\frac{3}{4}^{\circ}$	12°	XVI
	580	$8\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	XVII
H ₂	290	$16\frac{3}{4}$	$14\frac{1}{2}$	XVIII
	580	$11\frac{3}{4}$	12	XIX

Kurven XVI bis XIX (Fig. 14 bis 16) und Tabelle 3 enthalten die Ergebnisse der Versuche mit einem Einfallswinkel von $11\frac{1}{2}^{\circ}$ und günstigster Kippung. Die berechnete Lage der Maxima ist in den Kurven durch einen Pfeil markiert. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment liegt vollständig innerhalb der Versuchsgenauigkeit von $\frac{1}{3}$ bis 1° , mit Ausnahme der Werte für Wasserstoff von 290° , bei dem das Maximum für die „wahrscheinlichste Wellenlänge“ ($16\frac{3}{4}^{\circ}$) schon außerhalb des Einfallswinkels ($11\frac{1}{2}^{\circ} +$ Kippwinkel) liegt. Der Kippwinkel ist aber beschränkt, er darf nicht größer sein als der halbe Einfallswinkel, weil sonst die Kristalloberfläche den gebeugten Strahl abblenden würde. In Wirklichkeit kann der Kippwinkel wegen der endlichen Ausdehnung des Strahles nicht einmal so groß gemacht werden, im obigen Falle nicht größer als 4° . Das bei $14\frac{1}{2}^{\circ}$ gefundene Maximum ist also

* Es wurden künstliche, von R. Pohl, Göttingen, hergestellte Kristalle benutzt. Wir möchten Herrn Pohl auch an dieser Stelle besonders herzlich für die Freundlichkeit danken, mit der er uns seine ganzen Vorräte an Li F-Kristallen überlassen hat.

durch den Abfall bei großen Winkeln (langen Wellen) vorgetauscht. Die später wiedergegebene Kurve mit größerem Einfallswinkel zeigt das Maximum an der richtigen Stelle.

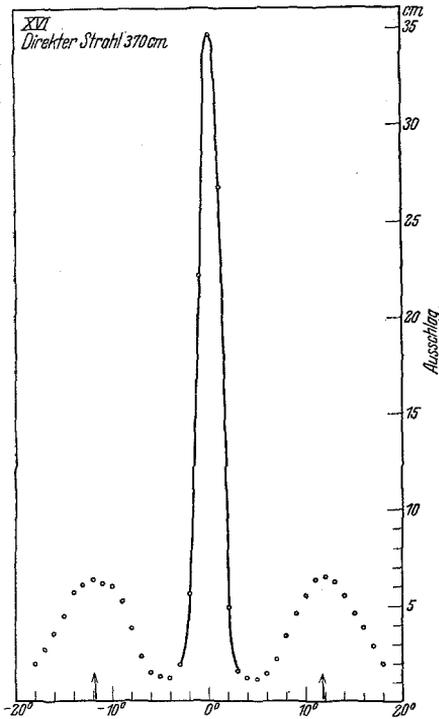


Fig. 14. Beugung von He an LiF, 295° K, Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ$.

Kurven XX bis XXVI (Fig. 17 und 18) und Tabelle 4 enthalten die Ergebnisse bei einem Einfallswinkel von $18\frac{1}{2}^\circ$ und günstigster Kippung.

Kurve XX (Fig. 17) gibt als Beispiel eine vollständige Kurve; in den Kurven XXI bis XXVI (Fig. 18) ist jeweils eine Hälfte der gemessenen Kurve unter Fortlassung des gespiegelten Strahles wiedergegeben. Daß wir bei Helium von

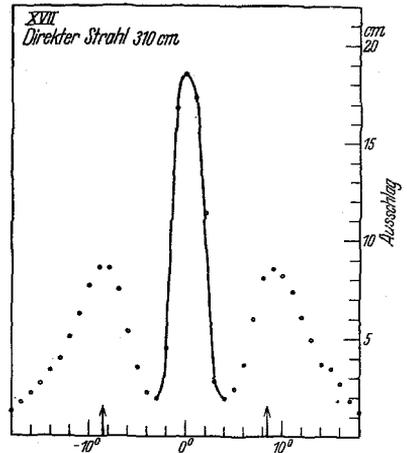


Fig. 15. Beugung von He an LiF, 580° K, Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ$.

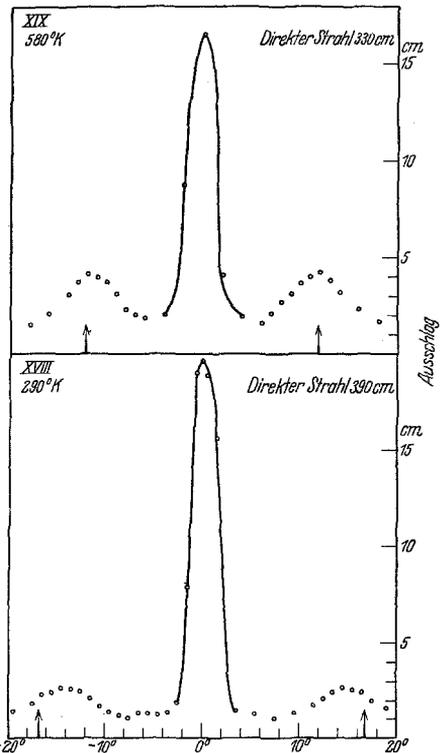


Fig. 16. Beugung von H₂ an LiF, Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ$.

Tabelle 4.

Gas	Strahl- temperatur	Ort des Maximums		Kurve
		berechnet	gefunden	
He	100° K	21°	15½°	XXI
	180	15½°	14½°	XXII
	290	12	-11½°	XXIII
	590	8¾°	9	XXIV
H₂	290	17	17	XXV
	580	12	11	XXVI

100° K das Maximum schon bei zu kleinen Winkeln finden, ist wieder dadurch zu erklären, daß für die wahrscheinlichste Wellenlänge λ_m das Beugungsmaximum schon außerhalb des Einfallswinkels liegt. Es ist

bemerkenswert, daß in allen Fällen, in denen die Abweichung vom berechneten Wert größer als $\frac{1}{4}^\circ$ ist, das gefundene Maximum bei kleineren Winkeln als berechnet liegt. Das liegt daran, daß wir aus verschiedenen Gründen (siehe folgenden Absatz) die Intensität bei großen Winkeln etwas zu klein messen. Dadurch wird das Maximum der Kurve etwas nach kleineren Winkeln verschoben. Wir können also sagen, daß auch bei dem größeren Einfallswinkel in allen Fällen die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten vollständig innerhalb der Versuchsgenauigkeit liegt. Das Beugungsmaximum von Helium bei

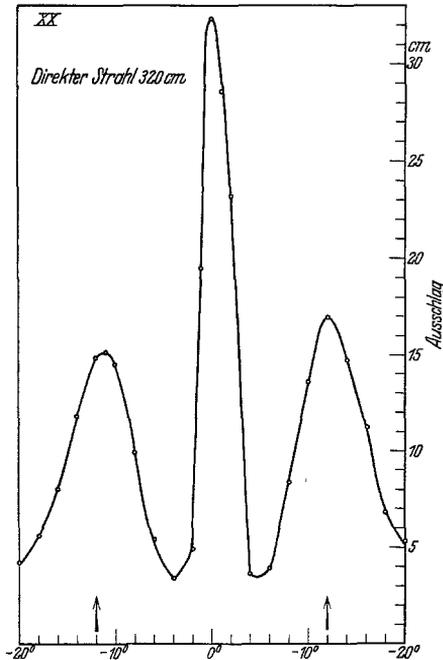


Fig. 17. Beugung von He an LiF, 290° K, Einfallswinkel $18\frac{1}{2}^\circ$.

Zimmertemperatur liegt z. B. an derselben Stelle, wie das von Wasserstoff bei der doppelten absoluten Temperatur. Die Kurven XXI bis XXVI geben somit eine vollständige Bestätigung der de Broglieschen Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

sowohl bezüglich der Abhängigkeit der Wellenlänge von m und v wie auch der Absolutwerte selbst.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, daß die Intensitätsverteilung in den Beugungsmaximis der Maxwellverteilung der Geschwindigkeiten bzw. Wellenlängen im Molekularstrahl entspricht. Daß dies in großen Zügen der Fall ist, zeigt der Vergleich unserer Beugungskurven

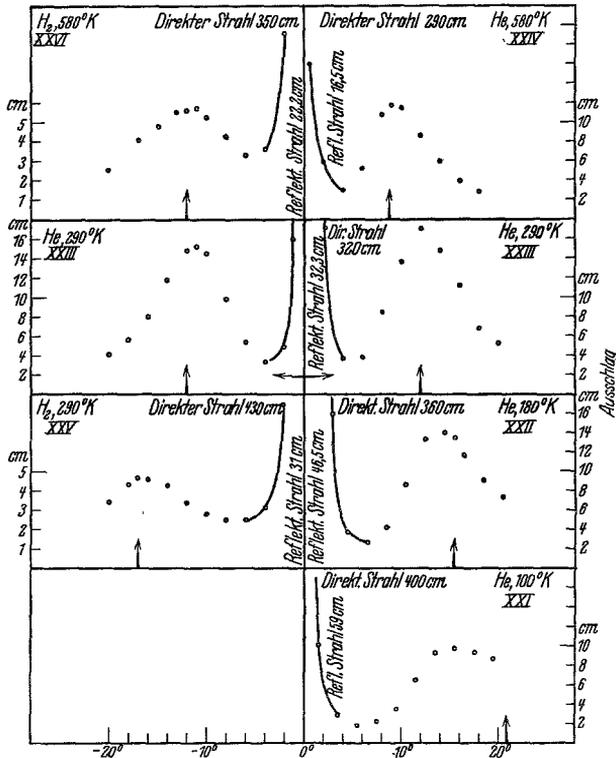


Fig. 18. Beugung von He und H₂ an LiF, Einfallswinkel 18¹/₂°.

mit der in Wellenlängen dargestellten Maxwellverteilung im Strahl (Kurve XXVII, Fig. 19). Doch zeigt sich, daß die Intensität bei großen Winkeln (langen Wellen) etwas zu stark abfällt. Das hat folgende Gründe. Die Dispersion nimmt mit zunehmendem Abstand vom gespiegelten Strahl zu. Der Winkel β (siehe Anhang S. 118) wird für die erste Ordnung gegeben durch

$$\cos \beta = \frac{\lambda}{d},$$

also ist

$$d\beta = \frac{-1}{d \cdot \sin \beta} d\lambda,$$

d. h. die im Wellenbereich $d\lambda$ enthaltenen Wellenlängen werden auf einen um so größeren Winkelbereich $d\beta$ verteilt, je kleiner $\sin \beta$, also auch β ist. Für kleine Beugungswinkel $R - \beta$ ist β nahezu 90° , also $\sin \beta$ nahezu 1. Für die für uns in Betracht kommenden Beugungswinkel bis etwa 20° sind die Werte von $\sin \beta$:

$R - \beta$	β	$\sin \beta$
0°	90°	1,0
5	85	0,9962
10	80	0,9845
15	75	0,9659
20	70	0,9397

alle noch sehr nahe gleich 1; immerhin verursacht dieser Einfluß einen zu raschen Abfall der Intensität nach größeren Beugungswinkeln. Der zweite Grund liegt in der Versuchsanordnung, und zwar darin, daß bei größeren Winkeln vom Auffänger aus nicht mehr die ganze vom Molekularstrahl „beleuchtete“ Fläche des Kristalls gesehen werden kann. Dieser Einfluß wäre aus den Apparatdimensionen zu berechnen; wir

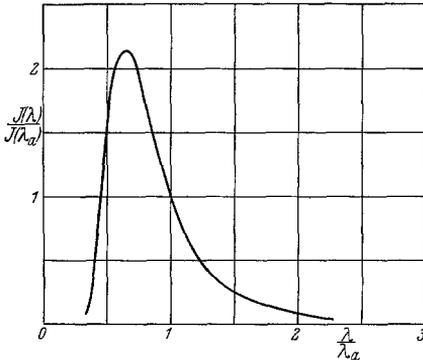


Fig. 19. Maxwell-Verteilung der de Broglie-Wellenlängen im Molekularstrahl.

möchten uns damit begnügen, eine obere Grenze für ihn anzugeben: Die vom Auffänger aus gesehene Fläche ist mindestens gleich der bei 0° gesehenen Fläche multipliziert mit dem Kosinus des Beugungswinkels $R - \beta$. Diese Schwächung ist also höchstens ebenso groß wie die durch die Dispersion; die gesamte Schwächung durch die beiden Einflüsse könnte also bei 20° Beugungswinkel maximal 12% betragen.

Experimentell scheint die Schwächung teilweise noch größer zu sein. Es wäre immerhin möglich, daß hier ein reeller Effekt mitwirkt, etwa derart, daß die langen Wellen (langsamen Moleküle) nicht tief genug in das Potentialfeld des Gitters eindringen, daß also gewissermaßen die Gitterstriche für sie zu flach sind. Eine nähere Diskussion dieser Verhältnisse möchten

wir verschieben, bis wir die bereits erwähnten Untersuchungen mit monochromatischen Molekularstrahlen durchgeführt haben.

Wir geben noch einige Kurven (XXVIII bis XXX, Fig. 20) mit konstanter Kippung für die Kippwinkel 0° , 3° und 6° , bei denen man sehr schön sieht, wie mit zunehmendem Kippwinkel der gespiegelte Strahl verschwindet, während die Beugungsmaxima viel stärker werden und nach außen rücken. In Kurve XXXI (Fig. 21) geben wir noch einen Versuch mit einem um 8° in seiner Ebene verdrehten Kristall, in der

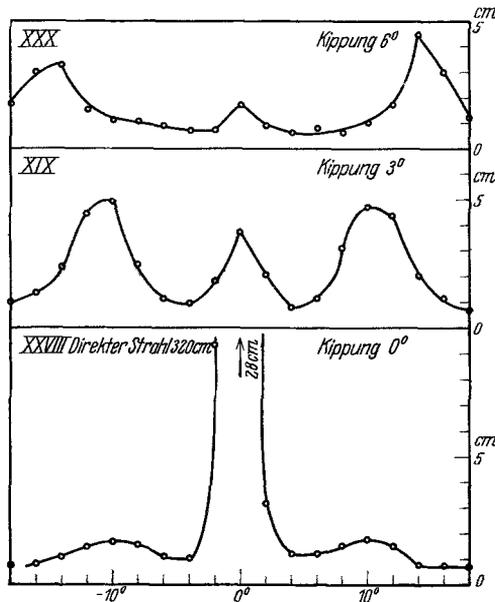


Fig. 20. Beugung von He an LiF mit konstanter Kippung.

wir bei jedem Meßpunkt den zugehörigen Kippwinkel eingetragen haben. Man sieht deutlich, wie auf der einen Seite ein ausgeprägtes Maximum an der richtigen Stelle (12°) ohne wesentliche Kippung erhalten wird, während auf der anderen Seite trotz stärkster Kippung nur noch Andeutungen eines Maximums sichtbar sind. Wie bereits bei den entsprechenden Steinsalzversuchen bemerkt, entspricht dieses Verhalten in allen Einzelheiten der Theorie.

Beugungsspektren in der Einfallsebene.

Nachdem sich gezeigt hatte, daß für diese Versuche das LiF ein wesentlich geeigneteres Oberflächengitter besitzt als das NaCl, haben wir

auch die Art von Spektren, die Knauer und Stern am Steinsalz untersucht hatten, am LiF untersucht. Daß die damaligen Versuche keine klaren Resultate gaben, liegt nicht nur an den schlechten Eigenschaften

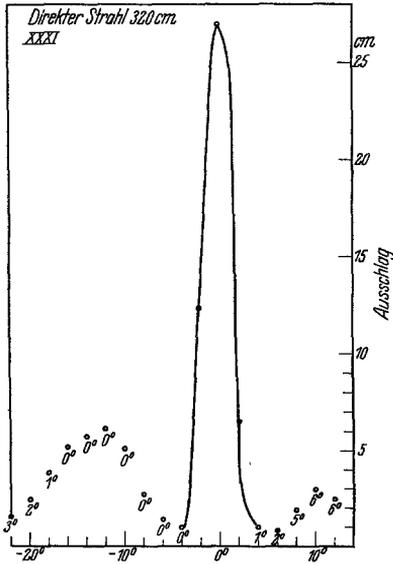


Fig. 21. Beugung von He an LiF mit verdrehtem Kristall, Drehung 8° .

des NaCl, sondern auch, wie in Teil I auseinandergesetzt, daran, daß infolge des zu hohen Auffängerspaltls teilweise noch die oben untersuchten, neben dem gespiegelten Strahl liegenden Beugungsmaxima mit in den Auffänger hineinkamen. Wir haben daher für diese Versuche die Höhe des Auffängers auf 1 mm verringert, was vollständig genügte, zumal bei LiF die erwähnten Beugungsmaxima infolge der kleineren Gitterkonstante weiter vom Strahl entfernt liegen. Im Übrigen wurde wieder die in Fig. 6 gezeichnete Anordnung benutzt. Die Orientierung des Kristalls war so, daß die Einfallsebene parallel zu einer Würffläche des Kristalls war, also den Winkel zwischen den

Hauptachsen des Oberflächengitters gleichnamiger Ionen halbierte (Drehung 45° , vgl. S. 96). Die Beugungsspektren waren also von der Ordnung $+1$, $+1$ bzw. -1 , -1 . Sie entsprechen den Spektren eines Strichgitters mit der Gitterkonstante $\frac{d}{\sqrt{2}}$ (siehe Anhang S. 123). Diese

Spektren sind also viel einfacher als die oben untersuchten Kreuzgitterspektren. Da sie in der Einfallsebene liegen, fällt die Komplikation durch Kippung des Kristalls weg. Wenn wir trotzdem die Kreuzgitterspektren viel eingehender untersucht haben, so liegt das daran, daß sie viel intensiver und sauberer als diese Strichgitterspektren sind. Das kommt offenbar daher, daß bei den Kreuzgitterspektren sowohl der einfallende wie die gebeugten Strahlen nur kleine Winkel mit der Kristalloberfläche bilden, die „Rauhigkeit“ der Oberfläche (vgl. die Überlegungen im Abschnitt Reflexion) macht sich also nicht so störend bemerkbar. Bei einer Drehung des Kristalls um 45° (also bei der als Drehung 0 bezeichneten Stellung) waren die entsprechenden Spektren (in diesem

Falle Ordnung 01) nur schwach angedeutet. Wir geben in den Kurven XXXII bis XLI (Fig. 22) das Resultat für Helium und die Strahltemperaturen 100° und 290° K für die Einfallswinkel von 10° bis 70°. Die Pfeile geben die berechnete Lage des gebeugten Strahles für λ_m . Wie man sieht, liegt die Übereinstimmung zwischen berechneter und beobachteter Lage im allgemeinen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit, die in diesem Falle, da wir nur von 5 zu 5° gemessen haben, etwa 2 bis 3° beträgt.

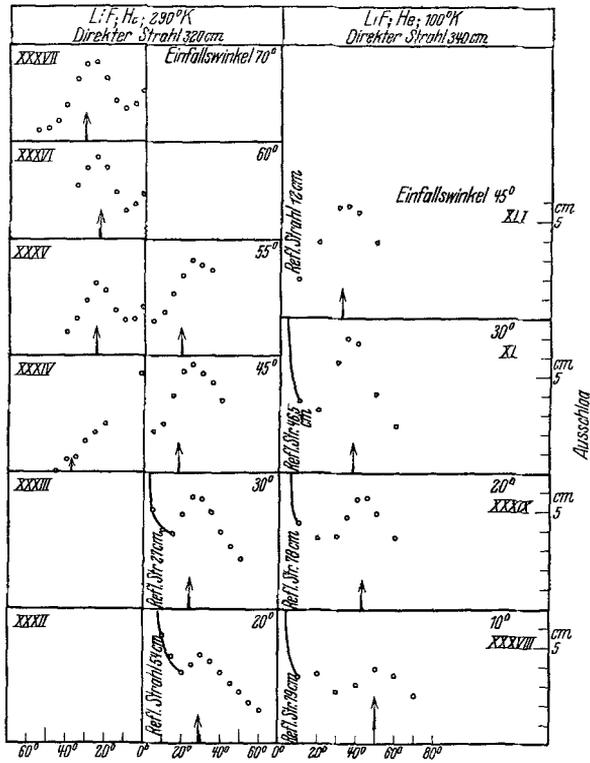


Fig. 22. Beugungsspektren in der Einfallsebene.

Nur bei kurzen Wellen und großen Einfallswinkeln liegen die gemessenen Maxima bis zu 7° nach rechts (größeren Winkeln) gegenüber den berechneten verschoben. Daß diese Abweichungen nur bei großen Einfallswinkeln und auch da nur bei kurzen Wellen (Strahl: Zimmertemperatur) auftreten, zeigt deutlich, daß offenbar die Rauigkeit der Oberfläche hier schon eine Rolle spielt, wofür auch die außerordentlich schlechte Reflexion spricht. Auch der Sinn der Verschiebung entspricht einer Bevorzugung

der langen und Benachteiligung der kurzen Wellen. Wir möchten zu den Kurven bei 290° K noch bemerken, daß bei Einfallswinkeln unter 45° in Übereinstimmung mit der Theorie keine „negativen“ Maxima (Bewugungswinkel kleiner als Reflexionswinkel) gefunden wurden. Auch bei diesen Spektren stehen also alle Beobachtungen durchaus in Übereinstimmung mit der Theorie.

Reflexion.

Die Reflexion der Molekularstrahlen von He an LiF folgt innerhalb der Versuchsgenauigkeit (hierfür etwa $\frac{1}{4}^\circ$) dem Reflexionsgesetz. Dies gilt auch für die anderen untersuchten Fälle (H_2 an LiF, H_2 und He an NaCl), nur ist in diesen Fällen die Reflexion nicht so stark und der Strahl etwas verwaschen. Die Werte des Reflexionsvermögens (maximale Intensität im reflektierten Strahl dividiert durch maximale Intensität im direkten Strahl) variieren natürlich etwas, je nach der Beschaffenheit und dem Alter der Kristallspaltfläche, die Größenordnung ist jedoch stets reproduzierbar. Ganz allgemein hängt das Reflexionsvermögen stark vom Einfallswinkel und der Kristallorientierung ab.

Abhängigkeit vom Einfallswinkel. In allen Fällen nimmt das Reflexionsvermögen mit wachsendem Einfallswinkel ab. Vgl. beispielsweise die Kurven XLII und XLIII in Fig. 23 (Reflexionsvermögen von

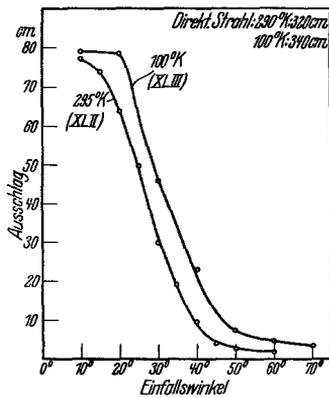


Fig. 23.

Reflexionsvermögen von Li F für He.

LiF für He bei gerader Kristallorientierung, Drehung 45°). Die natürlichste Deutung dafür ist wohl die, daß die Kristallspaltfläche eine matte Oberfläche darstellt. Bei einer solchen wird die spiegelnde Reflexion nur dann beträchtlich, wenn die Projektion der Höhe der Unebenheiten auf den Strahl kleiner als die Wellenlänge wird. Das gleiche Verhalten zeigte sich bei der Reflexion von Molekularstrahlen an hochpolierten Flächen bei den Versuchen von Knauer und Stern, bei denen entsprechend Unebenheiten von etwa 10^{-5} cm Einfallswinkel von etwa 10^{-3} , d. h. einigen

Minuten, genommen werden mußten, um den Beginn der spiegelnden Reflexion zu erhalten. In unserem Falle sollte man umgekehrt aus dem Auftreten sehr guter Spiegelung bei Einfallswinkeln bis zu 20° und

steilem Abfall bei größeren Winkeln auf Unebenheiten von der Größenordnung von wenigen (2 bis 3) Wellenlängen, also etwa 1 \AA , schließen. Das ist die Größenordnung der Amplitude der Temperaturschwingung der Gitterionen. Für diese Deutung spricht auch die Zunahme des Reflexionsvermögens mit abnehmender Temperatur des Kristalls*. Ganz unabhängig von dieser Annahme über die Natur der Unebenheiten spricht für die Auffassung als Reflexion an einer matten Fläche die aus den Kurven zu entnehmende Zunahme des Reflexionsvermögens mit abnehmender Strahltemperatur (längere de Brogliewellen). Allerdings zeigen unsere Beobachtungen die Zunahme nicht in allen Fällen, es kommt manchmal sogar das umgekehrte Verhalten vor. Doch braucht dieser Befund nicht unbedingt einen Widerspruch gegen die obige Annahme darzustellen, denn diese bezieht sich ja auf die gesamte von der Kristalloberfläche in Phase gestreute Strahlung, enthält also nicht nur den direkt gespiegelten Strahl, sondern auch die gebeugten Strahlen. Leider können wir diese Gesamtintensität nicht feststellen, da wir nicht alle gebeugten Strahlen untersuchen konnten. Eine Entscheidung über die Zulässigkeit unserer Annahme ist natürlich nur auf Grund solcher Messungen möglich, immerhin möchten wir sie vorläufig als natürliche und mit den Versuchsergebnissen verträgliche Arbeitshypothese ansehen. Sollte sie sich bestätigen, so könnte man in einfacher Weise die Amplitude der Temperaturschwingungen der Ionen messen und z. B. das Vorhandensein einer Nullpunktenergie nachweisen. (Vgl. die entsprechenden Versuche an Röntgenstrahlen.)

Abhängigkeit von der Kristallorientierung. Zunächst fanden wir fast durchgängig, daß die Reflexion bei gerader Stellung des Kristalls (Drehung 45°) wesentlich stärker (oft über doppelt so groß) war wie bei schräger Stellung (Drehung 0°). Wir möchten das so deuten, daß bei der schrägen Lage so viel der in Phase gestreuten Intensität in die hier besonders intensiven Beugungsmaxima der Ordnung 01 geht, daß für den gespiegelten Strahl nicht mehr so viel übrig bleibt. Bei der geraden Kristallstellung sind diese Maxima nicht vorhanden, sondern nur die wesentlich schwächeren der Ordnung 11. Beim Wasserstoff, bei dem die Intensität der Beugungsmaxima sehr viel kleiner ist, ist auch der Unterschied des Reflexionsvermögens in beiden Lagen viel geringer. Auch hier ist eine sichere Deutung erst nach Messung aller Beugungsspektren möglich, immerhin ist im gespiegelten Strahl und den von uns unter-

* Vgl. Knauer und Stern, l. c. Wir haben dieses Resultat mehrfach reproduziert.

suchten Beugungsspektren bei flachem Einfall (bis 20°) und bei LiF und He bereits etwa die Hälfte der Gesamtintensität des einfallenden Strahles enthalten, so daß, da sicher auch etwas diffuse Streuung vorhanden ist, für die übrigen Spektren nicht mehr viel Intensität zur Verfügung steht*. Im übrigen scheint die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Kristallorientierung recht kompliziert zu sein, wofür Kurve XLIV in Fig. 24 (He an LiF, Einfallswinkel $11\frac{1}{2}^\circ$, Strahl-

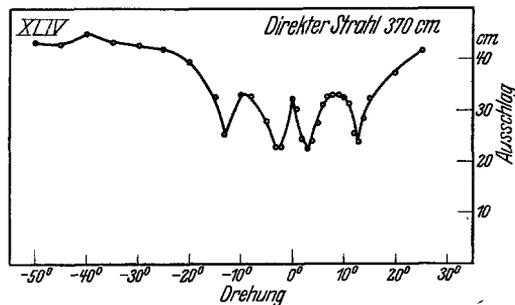


Fig. 24. Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Kristallorientierung.

temperatur 290°K) ein Beispiel gibt. Es ist aber mit der Möglichkeit zu rechnen, daß dieser Verlauf, insbesondere die starken Intensitätsänderungen bei kleinen Drehwinkeln, analog wie bei den Kurven I und II in Teil I noch durch in den Auffängerspalt gelangende Beugungsmaxima beeinflusst ist. Da diese Beugungsspektren sehr nahe am reflektierten Strahl ($< 3^\circ$) liegen müßten, so müßten sie von einem Gitter mit großer Gitterkonstante herrühren. Es liegt nahe, an ein Gitter von adsorbierten Molekülen zu denken**, doch sind natürlich auch andere Deutungen möglich. Eine Diskussion wird erst zweckmäßig sein, wenn ein größeres Beobachtungsmaterial vorliegt.

Von anderen Kristallen haben wir noch KCl und KBr untersucht. Bei He und KCl erhielten wir Reflexion von der gleichen Größenordnung wie beim Steinsalz, aber schwächere Beugung, bei KBr nur sehr schwache Reflexion und keine meßbare Beugung. Von anderen Gasen haben wir noch Neon untersucht, das weder an LiF noch an KCl merkbare reguläre Reflexion zeigt.

* Dies ist gleichzeitig ein guter Beweis dafür, daß bei unseren Versuchen keine Wellenlängeauslese stattfindet, was auch schon aus unseren Beugungskurven direkt folgt.

** Es wäre übrigens auch möglich, daß unser Kreuzgitter überhaupt aus adsorbierten Molekülen besteht, nur müßten diese dann bezüglich Gitterkonstante und Anordnung mit dem LiF-Gitter übereinstimmen.

Die hier beschriebenen Versuche sind noch in vielen Beziehungen ergänzungsbedürftig. Selbstverständlich werden Versuche mit „monochromatischen“ Molekularstrahlen in manchen Punkten wesentlich einfachere und besser zu deutende Resultate ergeben. Die Monochromatisierung dürfte keine besonderen experimentellen Schwierigkeiten machen. Sie kann entweder durch rotierende Zahnräder oder durch „Vorzerlegung“ mit einem zweiten Kristall erfolgen. Andererseits wäre es für die Fortführung der Versuche sehr wichtig, wenn insbesondere das Problem der Verteilung der Intensität auf den gespiegelten und die gebeugten Strahlen theoretisch näher untersucht würde.

Zusammenfassung. Die vorliegenden Versuche haben gezeigt, daß ein Strahl aus He- oder H₂-Molekülen, der auf eine Spaltfläche von LiF trifft, von dieser wie von einem Kreuzgitter gebeugt wird. Es wurden verschiedene Ordnungen der Beugungsspektren (0,1; 0, -1; 1,1 und -1, -1) untersucht; Einfallswinkel und Gitterorientierung wurden variiert. Die de Brogliewellenlänge wurde durch Temperaturänderung des Strahles (Variation von v) und Änderung des Gases (Variation von m) variiert. Das Resultat unserer Versuche läßt sich wie folgt zusammenfassen: Trifft ein Strahl von Gasmolekülen auf eine Kristallspaltfläche auf, so zeigen die reflektierten und gestreuten Strahlen eine Intensitätsverteilung, die in allen Einzelheiten der bei der Beugung von Wellen an einem Kreuzgitter auftretenden Intensitätsverteilung entspricht. Setzt man für die Gitterkonstante des Kreuzgitters den Abstand gleichnamiger Ionen ein, so erhält man für die dem Strahl zuzuordnende Wellenlänge genau den de Broglieschen Wert $\lambda = \frac{h}{mv}$.

Anhang. Berechnung der Kreuzgitterspektren.

Wir betrachten ein quadratisches Kreuzgitter, legen die x - und y -Achse unseres kartesischen Koordinatensystems in die beiden Hauptachsen des Gitters und den Nullpunkt in den Durchstoßpunkt des einfallenden Strahles. Sein Querschnitt wird als unendlich klein angenommen. Bildet der einfallende Strahl die Winkel α_0 , β_0 und γ_0 mit der x -, y - und z -Achse, so ist die Richtung eines gebeugten Strahles bestimmt durch die Winkel α , β und γ , die sich aus den Gleichungen

$$\cos \alpha - \cos \alpha_0 = h_1 \cdot \frac{\lambda}{d},$$

$$\cos \beta - \cos \beta_0 = h_2 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

ergeben. λ ist die Wellenlänge, d die Gitterkonstante, h_1 und h_2 sind ganze Zahlen (Ordnungsnummern des Spektrums). Jeder gebeugte Strahl ist also die Schnittgerade zweier Kegel um die x - bzw. y -Achse mit der Spitze im Nullpunkt und den erzeugenden Winkeln α bzw. β .

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß die Einfallsebene die x - z -Ebene ist. Dann ist

$$\beta_0 = 90^\circ, \cos \beta_0 = 0 \text{ und } \alpha_0 = R - \gamma_0.$$

Setzen wir $h_1 = h_2 = 0$, so erhalten wir den reflektierten Strahl als Schnittgerade des α -Kegels (Kegel um die x -Achse mit dem Winkel α), wobei jetzt $\alpha = \alpha_0$ ist, und des β -Kegels, der in diesem Falle zur x - z -

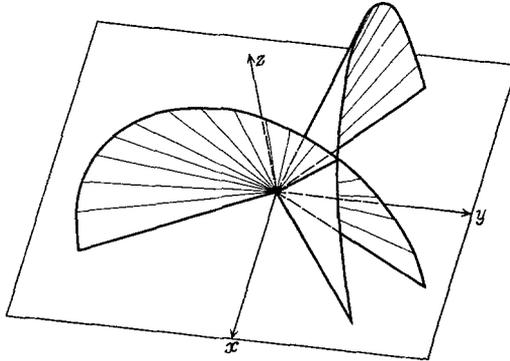


Fig. 25. Konstruktion der Kreuzgitterspektren.

Ebene ausartet. Setzen wir $h_1 = 0$, $h_2 = \pm 1$, so erhalten wir die hauptsächlich von uns untersuchten Spektren der Ordnung $0, \pm 1$. Die gebeugten Strahlen sind dann die Schnittgeraden des α -Kegels mit dem Winkel $\alpha = \alpha_0$ und des β -Kegels mit dem Winkel β , dessen Zahlenwert sich aus der Gleichung

$$\cos \beta = \pm \frac{\lambda}{d}$$

ergibt (s. Fig. 25). Die Kegel schneiden sich nur dann, wenn $R - \beta < \alpha_0$ ist. Zur leichteren Übersicht denken wir uns die Schnittkreise unserer Kegel mit der Einheitskugel um den Nullpunkt parallel zur x -Achse auf die y - z -Ebene projiziert (Fig. 26). Der α -Kreis (Schnittkreis zwischen α -Kegel und Einheitskugel) wird ohne Größenänderung als Kreis um den Nullpunkt abgebildet, die beiden β -Kreise ($h_2 = \pm 1$) werden Gerade parallel zur z -Achse. Der Fahrstrahl vom Nullpunkt zum um die z -Achse drehbaren Auffänger schneidet aus der Einheitskugel

einen zur x — y -Ebene parallelen Kreis („Auffängerkreis“) heraus, dessen Projektion eine den α -Kreis im Schnittpunkt mit der z -Achse berührende, zur y -Achse parallele Gerade bildet. Dabei ist der Auffänger, wie es bei unseren Versuchen der Fall war, so justiert gedacht, daß er bei der Stellung in der Einfallsebene den reflektierten Strahl aufnimmt. Wie aus Fig. 26 ersichtlich, würde man also mit dieser Anordnung den gebeugten Strahl nicht messen können, da er näher am Kristall liegt als der reflektierte Strahl. Bei den ersten Versuchen wurde diese Schwierigkeit so umgangen, daß mit einem hohen Auffängerspalt gearbeitet

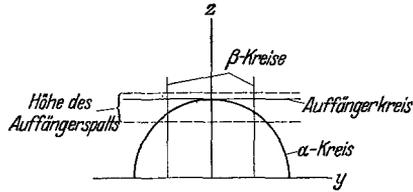


Fig. 26. Parallelprojektion parallel zur x -Achse auf die yz -Ebene.

wurde, so daß der Auffänger den aus Fig. 26 ersichtlichen Streifen bestrich. Bei den in Teil II beschriebenen Versuchen wurde, wie im Text erwähnt, der Kristall um die y -Achse gekippt. Die in Fig. 27 gezeichnete Parallelprojektion (das Koordinatensystem ist im Kristall fest und wird mit ihm gekippt) unterscheidet sich von der früheren dann dadurch, daß der α -Kreis wegen der Vergrößerung des Einfallswinkels um den Kippwinkel größer wird und der Auffängerkreis statt in eine Gerade in eine sehr flache Ellipse projiziert wird, die den α -Kreis schneidet. Bei bestimmter Stellung des Auffängers (Drehung um die z -Achse bei nicht gekipptem Kristall) kann man also den Kippwinkel so wählen, daß der gebeugte Strahl in den Auffänger gelangt. In Wirklichkeit ist dieser

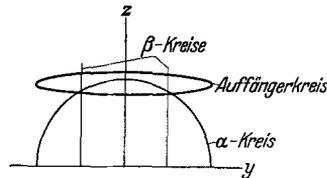


Fig. 27. Parallelprojektion für gekippten Kristall.

Winkel wegen der endlichen Dimensionen von Strahl und Auffänger natürlich nicht ganz scharf; wir sind, wie im Text erwähnt, so vorgegangen, daß wir jedesmal denjenigen Kippwinkel aufgesucht haben, der dem Maximum an Intensität entsprach. Dreht man umgekehrt bei konstanter Kippung den Auffänger, so mißt man nicht den reflektierten Strahl, sondern gebeugte Strahlen, die um so weiter vom reflektierten Strahl entfernt liegen, je größer der Kippwinkel ist (vgl. Kurven XXVIII bis XXX in Fig. 20).

Zur Berechnung der Beugungswinkel eignet sich besser die Projektion der Einheitskugel parallel zur z -Achse. Wir erhalten dabei die

in der Röntgenspektroskopie als „Methode des reziproken Gitters“ bekannte Darstellung. Fig. 28 zeigt den Spezialfall, in dem der einfallende Strahl in der x - z -Ebene liegt. Die eingezeichneten Punkte sind die Projektionen der Durchstoßpunkte der gebeugten Strahlen mit der Einheitskugel. Ihre Koordinaten sind gegeben durch die Gleichungen

$$x = \cos \alpha = \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{d},$$

$$y = \cos \beta = \cos \beta_0 + h_2 \frac{\lambda}{d}.$$

Sie bilden also ein Gitter mit der Gitterkonstante λ/d , das „reziproke Gitter“. Die von uns untersuchten Kreuzgitterspektren entsprechen den Punkten P_1 und P_2 , sie kommen nur dann zustande, wenn P_1 und P_2

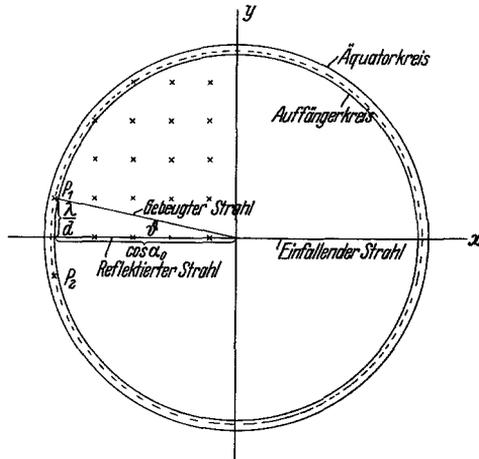


Fig. 28. Parallelprojektion parallel zur z -Achse auf die xy -Ebene, reziprokes Gitter.

innerhalb des Äquatorkreises liegen. Die Projektion des Auffängerkreises wird ebenfalls ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\cos \alpha_0$. Man sieht wieder, daß die Punkte P_1 und P_2 nicht auf dem Auffängerkreis liegen, die gebeugten Strahlen also nicht vom Auffänger getroffen werden. Um die durch die Punkte P_1 und P_2 gegebenen Beugungsspektren messen zu können, müßten wir also den Auffänger so justieren, daß die Projektion des Auffängerkreises den gestrichelten Kreis ergibt. Dann wäre der Winkel ϑ_0 zwischen der Einfallsebene und der durch die z -Achse und den gebeugten Strahl bestimmten Ebene, den wir messen, gegeben durch

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_0}.$$

Wie gesagt, konnten wir diesen einfachen Fall aus apparativen Gründen nicht realisieren, sondern haben den Kristall um die y -Achse um den Winkel δ gekippt. Die Drehachse des Auffängers ist dann nicht mehr die z -Achse, sondern gegen die z -Achse um den Winkel δ geneigt (z' -Achse), und die Projektion des Auffängers ist kein Kreis mehr. Den von uns gemessenen Winkel ϑ' zwischen der Einfallsebene und der durch die z' -Achse und den gebeugten Strahl bestimmten Ebene erhalten wir durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{1}{\cos \delta - (\sin \delta) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 (\alpha_0 + \delta) - \operatorname{tg}^2 \vartheta}},$$

wobei

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{\cos (\alpha_0 + \delta)}$$

ist, denn im raumfesten Koordinatensystem x', y', z' ist $\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{y'}{x'}$, woraus die obige Formel durch Einsetzen der ungestrichenen Koordinaten folgt. Da alle vorkommenden Winkel klein (maximal 20°) sind, genügt für unsere Zwecke die Näherung

$$\operatorname{tg} \vartheta' = (\operatorname{tg} \vartheta_0) \cdot \left[1 + \delta \operatorname{tg} \alpha_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}} \right) \right]^*$$

Will man die Schwierigkeit, die darin liegt, daß der Auffängerkreis nicht als Kreis abgebildet wird, vermeiden, so muß man die stereographische Projektion, d. h. die Projektion von einem Pol der Einheitskugel auf die Äquatorebene, verwenden. Hierbei werden bekanntlich alle Kreise auf der Kugeloberfläche wieder als Kreise abgebildet. Fig. 29 zeigt als Beispiel diese Projektion für LiF und He von 180° K, Einfallswinkel $18\frac{1}{2}^\circ$, Kippung 3° . P gibt den reflektierten, P_1 den gebeugten Strahl. Der Auffängerkreis liegt infolge der Kippung exzentrisch, sein Mittelpunkt liegt zwar auf der x -Achse, aber nicht im Nullpunkt, sondern nach links verschoben. Wir haben uns auch durch Ausführung der Projektion unter Berücksichtigung unserer Dimensionen von Strahl und Auffängerspalt überzeugt, daß der gemessene „Schwerpunkt“ der Intensität praktisch,

* Der Kippwinkel δ selbst ist (nach freundlicher Mitteilung von Herrn W. Gordon) durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}}{2 \operatorname{tg} \alpha_0}$$

gegeben. Für die bei unseren Versuchen auftretenden kleinen Winkel genügt die Näherung $\delta = \frac{\vartheta_0^2}{4 \alpha_0}$.

d. h. innerhalb $\frac{1}{4}^\circ$, denselben Beugungswinkel ergibt, den man unter Vernachlässigung der Dimensionen erhält.

Dreht man den Kristall in seiner Ebene um den Winkel ε , so wird

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha_{00} \cdot \cos \varepsilon,$$

$$\cos \beta_0 = \cos \alpha_{00} \cdot \sin \varepsilon,$$

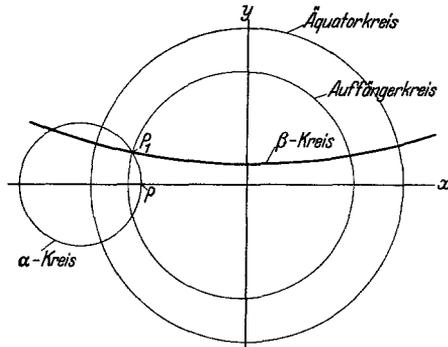


Fig. 29. Konstruktion des gebeugten Strahls in stereographischer Projektion für gekippten Kristall.

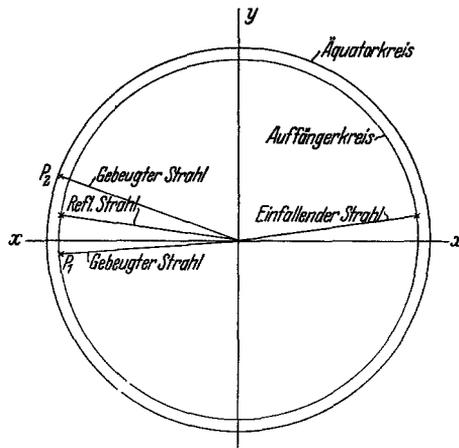


Fig. 30. Parallelprojektion für gedrehten Kristall.

wobei α_{00} ($= \alpha_0$ für $\varepsilon = 0$) der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Kristalloberfläche (Glanzwinkel) ist. Für kleine Drehwinkel ε ist der Effekt der, daß das Beugungsspektrum auf der einen Seite näher an den Auffängerkreis heranrückt (P_1 in Fig. 30, Parallelprojektion parallel zur z -Achse auf die $x-y$ -Ebene mit im Kristall

festem Koordinatensystem) und daher bei kleineren Kippwinkeln gemessen wird, während das Beugungsspektrum auf der anderen Seite vom Auffängerkreis nach dem Äquatorkreis hinrückt und daher große Kippwinkel erfordert. Auch bricht das Spektrum hier schon bei viel kürzeren Wellen ab als auf der anderen Seite, weil die den langen Wellen entsprechenden Gitterpunkte schon außerhalb des Äquatorkreises liegen. Fig. 30 zeigt den von uns als Beispiel gemessenen Fall $\varepsilon = 8^\circ$. Für große ε , z. B. $\varepsilon = 45^\circ$, kommen die hier behandelten Beugungsspektren überhaupt nicht mehr zustande.

Die Berechnung der in der Einfallsebene liegenden Spektren zeigt, daß diese vollständig den Spektren eines Strichgitters entsprechen.

1. Fall: Drehung 0° , d. h. eine Hauptachse des Oberflächengitters gleichnamiger Ionen liegt in der Einfallsebene (vgl. S. 96). Dann folgt aus den Gleichungen

$$\cos \alpha - \cos \alpha_0 = h_1 \frac{\lambda}{d}, \quad \cos \beta - \cos \beta_0 = h_2 \frac{\lambda}{d}$$

wegen $h_2 = 0$, $\beta = \beta_0 = 90^\circ$

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{d},$$

d. h. die Spektren eines Strichgitters mit der Gitterkonstante d .

2. Fall: Drehung 45° . Dann ist

$\alpha_0 = \beta_0$, $h_1 = h_2$, $\alpha = \beta$ und $2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \gamma = \cos^2 (R - \gamma)$, wobei γ der Winkel mit der z -Achse (Einfallslot) ist. Also ist

$$\cos (R - \gamma) = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha.$$

Wegen

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{d} \quad \text{und} \quad \alpha_0 = R - \gamma_0$$

ist

$$\cos (R - \gamma) = \cos (R - \gamma_0) + h_1 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \sqrt{2},$$

d. h. die Spektren sind die eines Strichgitters mit der Gitterkonstante $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Berechnung der Wellenlänge λ_m größter Intensität. Für die Geschwindigkeitsverteilung im Molekularstrahl gilt nach Maxwell*

$$dn = C \cdot e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \cdot v^3 dv$$

* Vgl. die Bemerkung von A. Einstein in ZS. f. Phys. 3, 417, 1920.

(α ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit im ruhenden Gas). Nach de Broglie ist

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} \quad \text{oder} \quad v = \frac{h}{m \cdot \lambda} \quad \text{und} \quad dv = -\frac{h}{m \cdot \lambda^2} \cdot d\lambda.$$

Setzt man

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{m \cdot \alpha},$$

so ist

$$dn = C' \cdot e^{-\frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^5} d\lambda = C' \cdot f(\lambda) d\lambda.$$

Für die Wellenlänge λ_m größter Intensität ist $\frac{dn}{d\lambda} = C' f(\lambda)$ ein Maximum,

also

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\lambda_m^2}{\lambda_\alpha^2} = \frac{2}{5}; \quad \lambda_m = \lambda_\alpha \cdot \sqrt{0,4}.$$

Es ist

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{m \alpha} = 30,8 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{\sqrt{T \cdot m}} \text{ cm},$$

also

$$\lambda_m = 19,47 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{\sqrt{T \cdot m}} \text{ cm}.$$

Die Zahlenwerte für die Gitterkonstante d haben wir aus dem Landolt-Börnstein entnommen, es ist für

$$\text{NaCl: } d = 3,980 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

und für

$$\text{LiF: } d = 2,845 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Die Werte von λ_m und λ_m/d für die von uns untersuchten Fälle gibt Tabelle 5.

Tabelle 5.

Temperatur ° K	He = 4,00			H ₂ = 2,016		
	$\lambda_m \cdot 10^8$ cm	$\frac{\lambda_m}{d}$ für NaCl	$\frac{\lambda_m}{d}$ für LiF	$\lambda_m \cdot 10^8$ cm	$\frac{\lambda_m}{d}$ für NaCl	$\frac{\lambda_m}{d}$ für LiF
100	0,974	0,2446	0,3423	1,371	0,3450	0,4828
180	0,727	—	0,255	—	—	—
295	0,570	0,1432	0,2003	0,805	0,2024	0,2830
590	0,405	0,1018	0,1424	0,570	0,1432	0,2003

Mit Hilfe dieser Zahlen und der oben abgeleiteten Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta' = (\operatorname{tg} \vartheta_0) \left[1 + \delta \operatorname{tg} \alpha_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}} \right) \right]$$

sind die im Text angegebenen Beugungswinkel von λ_m berechnet. Wenn wir verlangen, daß die Maxima unserer Kurven mit den für λ_m berechneten Beugungswinkeln der Lage nach übereinstimmen, so setzen wir dabei voraus, daß die Dispersion konstant ist. Dies ist bei den von uns untersuchten Kreuzgitterspektren stets mit genügender Annäherung der Fall (vgl. S. 110). Auch bei den Strichgitterspektren ist in den von uns untersuchten Fällen die durch die variable Dispersion hervorgerufene Verschiebung des Intensitätsmaximums im allgemeinen klein. Die Berechnung dieser Verschiebung ist kurz folgende: Es ist

$$\cos(R - \gamma) = \cos(R - \gamma_0) \pm \frac{\lambda}{d} \sqrt{2}; \quad (h_1 = \pm 1)$$

sowie

$$dn = C' \cdot e^{-\frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot d\lambda = C' \cdot f(\lambda) d\lambda = C'' \varphi(\gamma) d\gamma.$$

Das Maximum dieser Kurve liegt bei

$$\frac{d\varphi(\gamma)}{d\gamma} = 0,$$

woraus sich ergibt, daß

$$2 \frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda_m^2} - 5 = \pm \frac{\lambda_m}{d} \cdot \frac{\cos(R - \gamma_m)}{\sin^2(R - \gamma_m)}$$

ist, wobei γ_m der Beugungswinkel ist, dem die größte Intensität entspricht, λ_m die zugehörige Wellenlänge. Die hieraus berechnete Verschiebung des Intensitätsmaximums (für kleine Verschiebungen wurde eine Näherungsformel benutzt) vergrößert stets den Winkel $(R - \gamma_m)$ mit der Kristalloberfläche. Für $h = +1$ (gebeugter Strahl zwischen Kristalloberfläche und reflektiertem Strahl) ist sie für den Einfallswinkel 45° zwar 11° ($R - \gamma_m = 19^\circ$ statt 8°), aber schon für 55° Einfallswinkel nur noch 2° und für die größeren Einfallswinkel noch kleiner; für $h = -1$ (gebeugter Strahl auf der anderen Seite des reflektierten) ist sie durchweg höchstens 1° oder kleiner.