

Über die quantenmechanische Herleitung der Balmerterme.

Von **L. Hulthén** in Stockholm.

(Eingegangen am 24. August 1933.)

Es werden die von Pauli aufgestellten Matrixgleichungen des Wasserstoffatomproblems auf die wohlbekannten Matrixbeziehungen, die bei Impulsmomentbetrachtungen auftreten, zurückgeführt, was zu einer vereinfachten Ableitung der Balmerformel führt.

In seinem Aufsatz „Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik“¹⁾ hat W. Pauli bekanntlich zum ersten Male eine eingehende Behandlung des Wasserstoffatoms vom Standpunkt der damals neuen Heisenbergschen Theorie gegeben. Seitdem sind die Methoden der Matrixrechnung, besonders durch Arbeiten von Dirac, nicht unwesentlich vereinfacht worden, und man kann erwarten, daß dies auch zu einer vereinfachten Darstellung von Paulis Resultaten verwertet werden kann. Daß dies in der Tat der Fall ist, soll in der folgenden Note kurz gezeigt werden, wo das betreffende Problem auf die Auflösung desselben Systems von Matrixbeziehungen, wie es bei Impulsmomentbetrachtungen vorkommt, zurückgeführt wird.

Es handelt sich nach Pauli um das folgende System von Matrixgleichungen:

$$P_x P_y - P_y P_x = -\frac{\hbar}{2\pi i} P_z \quad \text{usw.} \quad (\text{I})$$

$$A_x P_x = P_x A_x \quad \text{usw.}$$

$$\left. \begin{aligned} A_x P_y - P_y A_x = P_x A_y - A_y P_x = -\frac{\hbar}{2\pi i} A_z \quad \text{usw.} \\ (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{A}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

$$A_x A_y - A_y A_x = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{2}{m_0 Z^2 e^4} E P_z \quad \text{usw.} \quad (\text{III})$$

$$1 - \mathfrak{A}^2 = -\frac{2}{m_0 Z^2 e^4} E \left(\mathfrak{B}^2 + \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \right). \quad (\text{IV})$$

Die Gleichungen gelten einem Atom mit festem Kern von der Ladung $+Ze$ und einem Elektron der Masse m_0 und der Ladung $-e$. E ist die Hamiltonsche Funktion:

$$E = \frac{1}{2m_0} p^2 - \frac{Ze^2}{r}.$$

¹⁾ W. Pauli jr., ZS. f. Phys. **36**, 351, 1926.

Die Vektormatrix \mathfrak{A} mit den Komponenten A_x, A_y, A_z ist analog zur klassischen Mechanik¹⁾ durch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{Z e^2 m_0} \frac{1}{2} \{[\mathfrak{P} \mathfrak{p}] - [\mathfrak{p} \mathfrak{P}]\} + \frac{\mathfrak{r}}{r}$$

definiert, wo \mathfrak{r} den Radiusvektor, \mathfrak{p} den linearen Impuls und \mathfrak{P} mit den Komponenten P_x, P_y, P_z den Drehimpuls bedeuten:

$$\mathfrak{P} = [\mathfrak{r} \mathfrak{p}].$$

Pauli zeigt, daß \mathfrak{A} mit dem zeitlichen Mittelwert $\bar{\mathfrak{r}}$ ebenso zusammenhängt wie in der klassischen Theorie:

$$\bar{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{P}}{2} \frac{Z e^2}{2|E|} \mathfrak{A}.$$

Durch die Einführung von:

$$\lambda = \sqrt{\frac{R h Z^2}{|E|}} \cdot A_x \text{ usw.} \quad R = \frac{2 \pi^2 e^4 m_0}{h^3}$$

$$\xi = \frac{2 \pi}{h} \cdot P_x \text{ usw.}$$

ergibt sich:

$$\xi \eta - \eta \xi = i \zeta \text{ usw.,}^2) \quad (\text{I}')$$

$$\lambda \xi = \xi \lambda \text{ usw.,} \quad (\text{II}' \text{ a})$$

$$\lambda \eta - \eta \lambda = \xi \mu - \mu \xi = i \nu \text{ usw.,} \quad (\text{II}' \text{ b})$$

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta = \xi \lambda + \eta \mu + \zeta \nu = 0, \quad (\text{II}' \text{ c})$$

$$\lambda \mu - \mu \lambda = i \zeta \text{ usw.} \quad (\text{III}')$$

$$\frac{R h Z^2}{|E|} = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1. \quad (\text{IV}')$$

Aus (I'), (II' b) und (III') wird leicht gefolgert:

$$(\lambda + \xi)(\mu + \eta) - (\mu + \eta)(\lambda + \xi) = 2 i (\nu + \zeta) \text{ usw.}$$

Wenn wir

$$\lambda + \xi = 2 \alpha \text{ usw.}$$

setzen, erhalten wir ein Gleichungssystem von wohlbekanntem Typus:

$$\alpha \beta - \beta \alpha = i \gamma \text{ usw.,}$$

1) W. Pauli, l. c., u. W. Lenz, ZS. f. Phys. **24**, 197, 1924.

2) Herr Prof. O. Klein hat mich auf den interessanten Umstand hingewiesen, daß die Operatoren einer allgemeinen Lorentz-Transformation dieselben Beziehungen erfüllen wie die Größen $\lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \zeta$.

das z. B. von Dirac¹⁾ behandelt worden ist. Dies zeigt, daß die Eigenwerte von $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ in der Form $(n/2)^2 - 1/4$ geschrieben werden können, wo n eine ganze Zahl ($\neq 0$) bedeutet. Zuzufolge von (II'c) gilt:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Die Eigenwerte von $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ sind also $n^2 - 1$ (n ganze Zahl, $\neq 0$), und wir erhalten somit das bekannte Resultat:

$$\frac{R h Z^2}{|E|} = n^2, \quad |E| = \frac{R h Z^2}{n^2} \quad (R = c \cdot \text{Rydbergzahl}).$$

Herr Prof. O. Klein hat mich auf die oben behandelte Frage aufmerksam gemacht und hat mir gute Ratschläge gegeben, wofür ich ihm sehr dankbar bin.

¹⁾ P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1930, § 30.