Zur Theorie der galvanomagnetischen Effekte.

Von **Rudolf Peierls** in Leipzig.

(Eingegangen am 24. Dezember 1928.)

Es wird gezeigt, daß man aus den Blochschen Rechnungen qualitativ richtige Aussagen über die galvanomagnetischen Effekte erhält, insbesondere beide Vorzeichen des Halleffekts, die die Sommerfeldsche Theorie noch nicht lieferte, und die Größenordnung der Widerstandsänderung.

Bloch hat kürzlich* eine Theorie der metallischen Leitfähigkeit entwickelt, die die Sommerfeldsche Theorie** durch genauere Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Gitter verfeinert, und die im folgenden auf die galvanomagnetischen Effekte verallgemeinert werden soll. Wir schließen uns in den Bezeichnungen eng an die Blochsche Arbeit an.

§ 1. In einem metallischen Würfel von der Kantenlänge $K = a G$ wo a der Atomabstand ist, gibt es G^3 Translationszustände für jedes Elektron, die wir durch die Quantenzahlen k, l, m charakterisieren. Die zu einem Zustand gehörigen Werte von Energie und Strom sind (l. c. S. 566):

$$\left.\begin{aligned} E_{klm} &= E_0 - 2\beta\left(\cos\frac{2\pi k}{G} + \cos\frac{2\pi l}{G} + \cos\frac{2\pi m}{G}\right), \\ \mathfrak{F}^x_{klm} &= e\,\frac{a h \Phi^x}{\pi m} \sin\frac{2\pi k}{G} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

β und Φ^x sind Konstanten, für die wir später noch eine Relation gewinnen werden. Ferner leitet Bloch, indem er das Elektron durch ein spezielles Wellenpaket ersetzt, die zeitliche Änderung der Bewegung unter dem Einfluß einer elektrischen Feldes F ab. Das Elektron habe eine Wellenfunktion, entwickelt nach Eigenfunktionen des Systems ohne äußeres Feld: $\psi = \sum c_{klm} \psi_{klm}$. Dann ist [l. c. Gleichung (48)]

$$\frac{d}{dt} |c_{klm}|^2 = -\frac{K e F}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial k} |c_{klm}|^2. \tag{2}$$

Diese Gleichung hat folgende merkwürdige Konsequenz: Für $k > \frac{G}{4}$ nimmt nach (1) mit wachsendem k der Strom ab, d. h. im Felde wird ein solches Elektron verzögert, statt beschleunigt zu werden. Diese Tatsache ist so unanschaulich, daß es notwendig erscheint, ihre Richtigkeit möglichst ohne Vernachlässigungen und Annahmen zu beweisen.

---

* F. Bloch, ZS. f. Phys. **52**, 555, 1928, im Folgenden als l. c. zitiert.

** A. Sommerfeld, ebenda **47**, 1, 1928.

Zunächst: Dieser Effekt tritt bereits klassisch auf, sobald nur die durch (1) gegebene gegenseitige Abhängigkeit von Energie und Strom vorhanden ist. Denn wenn sich das Elektron mit dem Felde bewegt, so nimmt die potentielle Energie ab, die kinetische Energie des Elektrons also zu, d. h., da l und m wegen der Symmetrie ungeändert bleiben, wächst k. Für $k > \frac{G}{4}$ nimmt dann s_x ab.

Diese Überlegung überträgt sich einfach auf die Quantenmechanik. Ist (zur Abkürzung in einem Freiheitsgrad)

$$\psi = \sum c_k \psi_k \tag{3}$$

die Wellenfunktion, entwickelt nach Eigenfunktionen der Bewegung ohne äußeres Feld, so gilt nach Dirac*

$$\dot{c}_k = -\frac{2\pi i}{h} e F \sum_i x_{ik} c_i \tag{3a}$$

mit

$$x_{ik} = \int x \psi_i \bar{\psi}_k \, dx. \tag{3b}$$

In unserem Falle ist zwar $x\psi_i$ nicht entwickelbar, weil es die periodische Randbedingung nicht befriedigt $[(x\psi_i)_0 \neq (x\psi_i)_K]$. Nimmt man aber an, daß das Elektron zu Beginn im Innern des Metalls ist, so verschwindet (3) am Rande, und $x\psi$ ist entwickelbar. Man sieht leicht, daß dann (3a) und (3b) richtig bleiben. Rechnen wir das Feldpotential nicht zur Energie, so ist das System nicht konservativ, und wir erhalten für die Änderung der Energie:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum c_k \bar{c}_k E_k = -\frac{2\pi i}{h} e F \sum_{i,k} (\bar{c}_k c_i x_{ik} - c_k \bar{c}_i x_{ki}) E_k \\ &= -\frac{2\pi i}{h} e F \sum c_i \bar{c}_k x_{ik} (E_k - E_i). \end{aligned} \tag{4}$$

Aus der Schrödingergleichung und (3a):

$$x_{ik}(E_k - E_i) = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \int_0^K x \left(\bar{\psi}_k \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} - \psi_i \frac{\partial^2 \bar{\psi}_k}{\partial x^2} \right) dx$$

$$= \frac{h^2}{8\pi^2 m} \left\{ \left[x \left(\bar{\psi}_k \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_k}{\partial x} \right) \right]_0^K - \int_0^K \left(\bar{\psi}_k \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_k}{\partial x} \right) dx \right\}. \tag{5}$$

* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **112**, 661, 1926.

Setzen wir (5) in (4) ein, so fällt bei der Summation der integrierte Term fort, weil $\sum c_k \psi_k$ am Rande verschwindet.

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{h}{2\pi i m} e F \sum c_i \bar{c}_k \int_0^K \left(\bar{\psi}_k \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_k}{\partial x}\right) dx = -\frac{eF}{m} \cdot p,$$

wo $-\frac{ep}{m}$ der Strom des Elektrons ist. Bei mit dem Felde gerichtetem Impuls muß also die Energie des Elektrons zunehmen, woraus wieder nach (1) die Abnahme des Impulses folgt.

(1) enthält nur eine unabhängige Aussage, denn wie wir zeigen wollen, gilt auch für diesen Fall die de Brogliesche Relation*:

$$\frac{\partial E_{klm}}{\partial k} = -\frac{h}{m} \cdot p^x_{klm}. \tag{6}$$

Es seien ψ_{klm} und $\psi_{k'lm}$ zwei Eigenfunktionen, für die $k - k' \ll G$. Wir werden später zum $\lim G \to \infty$ übergehen und k als kontinuierlich variabel ansehen. Es ist nach der Wellengleichung, der ψ_k und $\psi_{k'}$ genügen:

$$\Delta \psi_k \cdot \bar{\psi}_{k'} - \psi_k \Delta \bar{\psi}_{k'} = \mu (E_{k'} - E_k) \psi_k \bar{\psi}_{k'} \quad \left(\mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2}\right).$$

Über ein Elementarparallelepiped integriert:

$$\left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \bar{\psi}_{k'} - \psi_k \frac{\partial \bar{\psi}_{k'}}{\partial x}\right] = \mu \cdot (E_{k'lm} - E_{klm}) \int \psi_k \bar{\psi}_{k'} \, d\tau. \tag{7}$$

Die eckige Klammer meint die Differenz der Integrale über die rechte und linke Seitenfläche. Wegen der Periodizität des Potentials im Kristall ist nun (l. c. S. 559) $\psi_{klm} = e^{\frac{2\pi i}{K}(kx + ly + mz)} \cdot u_{klm}$, wo u_{klm} langsam veränderlich in k, l, m und periodisch im Atomabstand. Für $\frac{k - k'}{G} \ll 1$ kann man offenbar setzen:

$$\psi_{k'lm} = e^{2\pi i \frac{k'-k}{K} x} \psi_{klm},$$

$$\frac{\partial \psi_{k'lm}}{\partial x} = 2\pi i \frac{k'-k}{K} \psi_{klm} \cdot e^{2\pi i \frac{k'-k}{K} x} + \frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} \cdot e^{2\pi i \frac{k'-k}{K} x}.$$

Also wird (7) bis auf Glieder höherer Ordnung in $\frac{k'-k}{K}$

$$\left(e^{2\pi i \frac{k'-k}{K} a} - 1\right) \int \left(\frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} \bar{\psi}_{klm} - \frac{\partial \bar{\psi}_{klm}}{\partial x} \psi_{klm}\right) df$$
$$= \mu (E_{k'} - E_k) \int \psi_{klm} \bar{\psi}_{klm} \, dx\, dy\, dz.$$

---

* L. de Broglie, Ann. de phys. (10) **3**, 22, 1926.

Links ist über eine Ebene $x =$ const, rechts über ein Elementarparallelepiped zu integrieren. Wegen

$$G^2 \cdot \frac{h}{4\pi i} \int \left(\frac{\partial \psi_{klm}}{\partial x} \bar{\psi}_{klm} - \frac{\partial \bar{\psi}_{klm}}{\partial x} \psi_{klm} \right) df = p^x_{klm}$$

und $G^3 \cdot \int \psi_{klm} \bar{\psi}_{klm} \, d\tau = 1$:

$$-\frac{8\pi^2}{h} \frac{k' - k}{K} a \cdot p^x_{klm} = \frac{8\pi^2 m}{G h^2} (E_{k'} - E_k) \; p^x_{klm} = \frac{m}{h} \cdot \frac{E_{k'} - E_k}{k' - k},$$

was in der Grenze für $k' - k \to 0$ in (6) übergeht. Diese Formel steht in engem Zusammenhang mit der de Broglieschen Relation zwischen Wellenlänge, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Übrigens ist hierdurch natürlich eine Beziehung zwischen den Konstanten β und Φ^x der Gleichungen (1) gegeben, die die Zahl der willkürlichen Konstanten verringert. (1) enthält als wesentliche Annahme nur noch, daß die Elektronen stark gebunden sind, d. h. daß die Austauschenergie zwischen den Plätzen im Gitter klein ist gegen die Anregungsspannung der Atome.

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß die Gleichung (2) unabhängig von dem von Bloch benutzten speziellen Kennardschen Wellenpaket ist. Wegen (3a) brauchen wir nur das Integral $\int x \, \psi_{klm} \bar{\psi}_{k'l'm'} \, d\tau$ zu berechnen. Der bequemeren Schreibweise wegen sei wieder in einem Freiheitsgrad gerechnet:

$$\int_{-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x \, \psi_k \bar{\psi}_{k'} \, dx = \int x e^{\frac{2\pi i}{K}(k - k') x} u_k \bar{u}_{k'} \, dx$$

$$= \sum_{\alpha = -\frac{G}{2}}^{\frac{G}{2}} e^{\frac{2\pi i}{G}(k - k') \alpha} \cdot \int_0^a (x + \alpha a) e^{\frac{2\pi i}{K}(k - k') x} u_k \bar{u}_{k'} \, dx.$$

Wegen $\sum_\alpha e^{\frac{2\pi i}{G}(k - k')\alpha} = 0$ für $k \neq k'$

$$x_{kk'} = a \sum_\alpha \alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{G}(k - k')\alpha} \cdot \int_0^a e^{\frac{2\pi i}{K}(k - k') x} u_k \bar{u}_{k'} \, dx.$$

In der Grenze für große G ($a \to 0$) geht das Integral in $\int_0^a u_k \bar{u}_k \, dx = \frac{1}{G}$ über:

$$x_{kk'} = \frac{a}{e^{\frac{2\pi i}{G}(k - k')} - 1} \sim \frac{K}{2\pi i (k - k')}.$$

Dies in (3) eingesetzt, liefert (2) für große G.

§ 2. Wir nehmen nun an, daß außer dem elektrischen Feld F in der x-Richtung ein Magnetfeld H in der z-Richtung wirkt. Es ist also der Hamiltonfunktion ein Glied

$$\frac{eH}{mc}(x p_y - y p_x) + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2 \cdot (x^2 + y^2) \tag{8}$$

hinzuzufügen. Dann wird die Geschwindigkeit *

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{h}{4\pi i m}\int\left[\left(\psi\frac{\partial\bar\psi}{\partial x} - \bar\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{eH}{mc}\, y\,\psi\bar\psi\right] d\tau, \\ v_y &= \frac{h}{4\pi i m}\int\left[\left(\psi\frac{\partial\bar\psi}{\partial y} - \bar\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{eH}{mc}\, x\,\psi\bar\psi\right] d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die in (9) sichtbare Abhängigkeit vom Koordinatenanfangspunkt ist nur scheinbar, denn durch das letzte, der Zentrifugalkraft entsprechende Glied in (8) wird diese Abhängigkeit gerade kompensiert. Wir werden (9) nur brauchen, um den von allen Elektronen herrührenden Gesamtstrom zu berechnen. Dann ist aber $\psi\bar\psi$ im ganzen Metall im Mittel konstant, und man kann das Koordinatensystem so wählen, daß $\int x\psi\bar\psi\, d\tau = 0$ usw. Man sieht durch eine etwas umständliche Rechnung, daß dann gleichzeitig das zweite Glied in (8) keinen Beitrag zu (12) liefert. Entsprechend (3a) und (3b) haben wir jetzt die Integrale $\frac{h}{2\pi i}\int x\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar\psi_{klm}\, d\tau$ zu bestimmen.

Mit

$$x\psi = \sum \alpha_{k'l'm'}\,\psi_{k'l'm'} \tag{10}$$

$$\frac{h}{2\pi i}\int x\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar\psi_{klm}\, d\tau = \frac{h}{2\pi i}\sum\alpha_{k'l'm'}\int\frac{\partial\psi_{k'l'm'}}{\partial y}\bar\psi_{klm}\, d\tau.$$

$\frac{\partial}{\partial y}$ ist aber ein Operator, der die Gruppe der Translationen um Vielfache des Gitterabstands zuläßt, also verschwindet das obige Integral, falls $\psi_{k'l'm'}$ und ψ_{klm} zu verschiedenen Darstellungen dieser Gruppe gehören, d. h. falls nicht $k = k'$, $l = l'$, $m = m'$. Es bleibt

$$\frac{h}{2\pi i}\alpha_{klm}\int\frac{\partial\psi_{klm}}{\partial y}\bar\psi_{klm}\, d\tau = \alpha_{klm}\, p^y_{klm}. \tag{11}$$

Nun ist wegen (10), (2) und (3a)

$$\alpha_{klm} = \frac{K}{h}\,\frac{\partial c_{klm}}{\partial k}.$$

* Vgl. z. B. O. Klein, ZS. f. Phys. **41**, 407. 1927, Gleichung (18).

Es wird also, wenn außer dem Magnetfeld noch ein elektrisches Feld in der x- und y-Richtung wirksam ist:

$$\frac{d}{dt}|c_{klm}|^2 = \frac{Ke}{h}\left[-F_x\frac{\partial|c_{klm}|^2}{\partial k} - F_y\frac{\partial|c_{klm}|^2}{\partial l} + \frac{H}{mc}\left(p^y_{klm}\frac{\partial|c_{klm}|^2}{\partial k} - p^x_{klm}\frac{\partial|c_{klm}|^2}{\partial l}\right)\right]$$

oder, für die Verteilung aller Elektronen, mit

$$\xi = \frac{2\pi k}{G}, \qquad \eta = \frac{2\pi l}{G}, \qquad \zeta = \frac{2\pi m}{G}$$

$$\frac{d}{dt}f(\xi\eta\zeta) = \frac{2\pi e a}{h}\left\{-F_x\frac{\partial f}{\partial \xi} - F_y\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{H}{mc}\left(p^y\frac{\partial f}{\partial \xi} - p^x\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\right\}, \quad (12)$$

in Analogie zur entsprechenden Formel der klassischen Mechanik*.

Wir haben andererseits den Einfluß der Wärmebewegung zu berücksichtigen und dann $f(\xi\eta\zeta)$ durch die Forderung $\frac{df}{dt} = 0$ zu bestimmen. Diese Rechnung wird bei Bloch unter der vereinfachenden Annahme s^x prop. ξ, E prop. $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ durchgeführt. Diese Annahme bedeutet entweder den Grenzfall freier Elektronen, oder daß sich die Elektronen wesentlich in den Zuständen $|k|$, $|l|$, $|m| \ll \frac{G}{4}$ befinden, und schließt das in § 1 diskutierte Phänomen aus. Die strenge Rechnung wird sehr kompliziert, wir wollen sie nur in zwei Grenzfällen durchführen, nämlich in dem von Bloch behandelten und in dem Falle, wo die Elektronen, auf die es ankommt, in den Zuständen $\left|\frac{G}{2} - k\right| \ll 1$ usw. sind.

Man wird nun die Verteilung ansetzen

$$f(\xi, \eta, \zeta) = f_0(\xi, \eta, \zeta) + \chi_1 \sin\xi + \chi_2 \sin\eta.$$

f_0 ist die Fermiverteilung, χ_1 und χ_2 Funktionen, von denen wir nur mehr näherungsweise annehmen können, daß sie nur von der Energie abhängen. Ferner werden χ_1 und χ_2 nur dort wesentlich $\neq 0$ werden, wo $\frac{\partial f_0}{\partial E} \neq 0$ ist, d. h. für tiefe Temperaturen, also entartete Statistik in der Umgebung eines kritischen Wertes E_1. Außerhalb dieses Bereiches ist offenbar, wie man aus (12) und l. c. Gleichung (75) sieht, die Stationäritätsbedingung mit $\chi_1 = \chi_2 = 0$ erfüllt. Wir unterscheiden die beiden Grenzfälle [vgl. (1)]

$$\begin{aligned} &\text{a) } E_1 - E_0 \ll 3\beta, \\ &\text{b) } E_0 + 6\beta - E_1 \ll 3\beta \end{aligned} \quad (13)$$

---

* Siehe z. B. A. Sommerfeld, ZS. f. Phys. **47**, 43, 1928, Gleichung (65).

und definieren im Falle

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a)} & \bar{\xi} = \xi, & \bar{\eta} = \eta, & \bar{\zeta} = \zeta, \\ \text{b)} & \bar{\xi} = \pi - \xi, & \bar{\eta} = \pi - \eta, & \bar{\zeta} = \pi - \zeta. \end{array}\right| \tag{14}$$

Offenbar sind in beiden Fällen $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta} \ll \pi$. Wir ersetzen E näherungsweise durch

$$\left.\begin{array}{l} E(\xi, \eta, \zeta) = \text{const} + \bar{\beta}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2), \\ \text{mit } \bar{\beta} = \begin{cases} \beta & \text{im Falle a,} \\ -\beta & \text{,, \quad ,, \quad b} \end{cases} \end{array}\right\} \tag{15a}$$

(die additive Konstante lassen wir fortan stets fort) und den Strom durch

$$s^x(\xi, \eta, \zeta) = \frac{e\tau}{mc}\bar{\xi}, \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{a h \Phi^x}{\pi}. \tag{15b}$$

Mit diesen Bezeichnungen und der Vorwegnahme der Tatsache, daß das Blochsche Integral (77) nur dann einen Beitrag liefert, wenn $E + h\nu$ und $E - h\nu$ noch in der Nähe des kritischen Wertes liegen, also auch für $E_{k'l'm'} = E_{klm} - h\nu$ die Gültigkeit von (15a) angenommen werden darf, läßt sich die Blochsche Ableitung von Gleichung (77) wörtlich übertragen, und wir bekommen statt des dortigen (78):

$$\begin{aligned} & B \cdot \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta/T} \Big\{ (\bar{\xi}\chi_1 + \bar{\eta}\chi_2) \cdot \frac{f_0(E + kTx)\, e^x + f(E - kTx)}{f_0(E)} \\ & - [\bar{\xi}\chi_1(E + kTx) + \bar{\eta}\chi_2(E + kTx)] \frac{f_0(E)}{f_0(E + kTx)} \\ & - [\bar{\xi}\chi_1(E - kTx) + \bar{\eta}\chi_2(E - kTx)] \frac{f_0(E)\, e^x}{f_0(E - kTx)} \Big\} \frac{x^2\, dx}{e^x - 1} \\ & + \frac{B'}{E} \cdot \left(\frac{T}{\Theta}\right)^5 \cdot \int_0^{\Theta/T} \Big\{ \Big[\bar{\xi}\chi_1(E + kTx) + \bar{\eta}\chi_2(E + kTx) \frac{f_0(E)}{f_0(E + kTx)} \\ & + (\bar{\xi}\chi_1(E - kTx) + \bar{\eta}\chi_2(E - kTx) \Big] \cdot \frac{f_0(E)\, e^x}{f_0(E - kTx)} \Big\} \frac{x^4\, dx}{e^x - 1} \\ & = 2\beta \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E}(F_x \bar{\xi} + F_y \bar{\eta}) + \frac{H\tau}{mc}(\bar{\xi}\chi_2 \cos\eta - \bar{\eta}\chi_1 \cos\xi). \end{aligned} \tag{16}$$

Es ist zu beachten, daß auf der rechten Seite nicht $\bar{\beta}$, sondern β steht, was davon herrührt, daß nach ξ, η, ζ, nicht nach $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ zu differenzieren ist, wenn man $\frac{\partial f_0}{\partial E}$ bildet. Insbesondere ist also für verschwindendes Magnetfeld kein Unterschied zwischen Fall a und b und die Formel ist identisch mit der Blochschen. Die Tatsache, daß sich für die Leitfähigkeit dasselbe ergibt, obwohl man das in § 1 diskutierte Phänomen in Rechnung gestellt hat, erklärt sich anschaulich folgendermaßen: Man hat ja nicht ein Elektron, sondern eine ganze Gesamtheit, die alle Zustände zwischen zwei Werten von k erfüllt und sich unter dem Einfluß eines Feldes F in der x-Richtung zu wachsenden k-Werten verschiebt. Dabei wird zwar der von den Elektronen mit $k > \frac{G}{4}$ herrührende Strom verkleinert, der von den mit $k < -\frac{G}{4}$ herrührende vergrößert, aber da sich die Verteilung als Ganzes verschiebt, so ist das Resultat dasselbe, als wäre ein Elektron von dem Zustand mit dem größten negativen k in den mit dem größten positiven k übergegangen. In der hier durchgeführten Näherung ist also der Verlauf der Stromwerte als Funktion von k weitgehend gleichgültig für die Leitfähigkeit. Man sieht aber aus (16) auch, daß er nicht mehr gleichgültig ist für den Halleffekt, da im Falle b $\cos\xi$ und $\cos\eta$ negativ, im Falle a positiv sind. H erscheint also im zweiten Falle mit -1 multipliziert. Diese Tatsache wird sich als die Ursache des anomalen Halleffekts (wir wollen die in der Literatur übliche Bezeichnung „positiv" beibehalten) erweisen.

Streng ist (16) nicht lösbar, wenn χ_1 und χ_2 nur Funktionen von E sind, d. h. die zugrundeliegende Funktionalgleichung ist nicht separierbar. Es wird aber in den hier betrachteten Grenzfällen bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sein, $\cos\xi$ und $\cos\eta$ durch δ zu ersetzen, wo

$$\delta = \begin{Bmatrix} +1 & \text{im Falle a,} \\ -1 & \text{„ \quad „ \quad b.} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Wir erhalten, nach Division durch $\bar{\xi}$ bzw. $\bar{\eta}$:

$$B\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta/T} \left\{\chi_1 \cdot \frac{f_0(E+kTx)\,e^x + f_0(E-kTx)}{f_0(E)} - \chi_1(E+kTx)\frac{f_0(E)}{f_0(E+kTx)} - \chi_1(E-kTx)\frac{f_0(E)\,e^x}{f_0(E-kTx)}\right\}\frac{x^2\,dx}{e^x-1} + \frac{B'}{E}\cdot\left(\frac{T}{\Theta}\right)^5\cdot\int_0^{\Theta/T}\left\{\chi_1(E+kTx)\frac{f_0(E)}{f_0(E+kTx)} + \chi_1(E-kTx)\frac{f_0(E)\,e^x}{f_0(E-kTx)}\right\}\frac{x^4\,dx}{e^x-1} = 2\beta\frac{\partial f_0}{\partial E}F_x + \delta\frac{H\tau}{mc}\chi_2 \tag{18}$$

und eine entsprechende Gleichung. Die Auflösung dieser Integralgleichungen ist für tiefe Temperaturen sehr schwierig. Um wenigstens qualitativ etwa über die Effekte zu erfahren, wollen wir $T \gg \Theta$ annehmen. Dann kann man in (18) wegen $x \ll 1$

$$f_0(E + kTx) = f_0(E - kTx) = f_0(E)$$

und

$$\chi_1(E + kTx) = \chi_1(E - kTx) = \chi_1(E) \text{ usw.}$$

setzen und erhält durch eine leichte Umformung:

$$\left.\begin{aligned} C\cdot\left(\frac{T}{\Theta}\right)\left(\frac{\beta}{E}\right)^{3/2}\cdot\chi_1 &= \frac{\partial f_0}{\partial E}\cdot F_x + \frac{\delta}{2\beta}\cdot\frac{H\tau}{mc}\chi_2, \\ C\cdot\left(\frac{T}{\Theta}\right)\left(\frac{\beta}{E}\right)^{3/2}\cdot\chi_2 &= \frac{\partial f_0}{\partial E}\cdot F_y - \frac{\delta}{2\beta}\cdot\frac{H\tau}{mc}\chi_1. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Oder zunächst bis auf Glieder der Ordnung H^2:

$$\chi_1 = \frac{\partial f_0}{\partial E}\left[F_x\frac{1}{C}\frac{\Theta}{T}\left(\frac{E}{\beta}\right)^{3/2} + F_y\frac{H\tau}{mc}\frac{1}{C^2}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2\left(\frac{E}{\beta}\right)^3\frac{\delta}{2\beta}\right],$$

und entsprechend χ_2. Dann wird für die Stromdichte in der x-Richtung:

$$I_x = \frac{e\tau}{ma^3}\cdot\frac{1}{8\pi^3}\iiint \xi^2\chi_1\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für eine langsam veränderliche Funktion $\varphi(E)$: $\int\frac{\partial f_0}{\partial E}\varphi(E)\,dE = \varphi(E_1)$ ist, wo E_1 der „kritische Wert" der Fermiverteilung ist:

$$I_x = \frac{e\tau}{ma^3}\frac{1}{6\pi^2}\cdot\left\{\frac{F_x}{C\beta}\frac{\Theta}{T}\cdot\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^3 + \frac{\delta F_y}{2C^2\beta^2}\cdot\frac{H\tau}{mc}\cdot\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^{9/2}\right\},$$

$$I_y = \frac{e\tau}{ma^3}\frac{1}{6\pi^2}\left\{\frac{F_y}{C\beta}\cdot\frac{\Theta}{T}\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^3 - \frac{\delta F_x}{2C^2\beta^2}\frac{H\tau}{mc}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^{9/2}\right\}.$$

§ 3. Beim Halleffekt ist $I_y = 0$. Daraus entsteht also ein Gegenfeld F_y:

$$F_y = F_x\cdot H\cdot\frac{\delta\tau}{2mc\beta C}\cdot\frac{\Theta}{T}\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^{3/2}$$

oder, weil

$$F_x = \frac{6\pi^2 ma^3}{e\tau}C\beta\cdot\frac{T}{\Theta}\left(\frac{\beta}{E_1}\right)^3 I_x,$$

wird

$$F_y = \delta H I_x\cdot\frac{3\pi^2 a^3}{ec}\cdot\left(\frac{\beta}{E_1}\right)^{3/2}.$$

E_1 bestimmt sich daraus, daß die Zahl der Quantenzellen mit $E < E_1$ gleich der Zahl der Elektronen sein muß. Mit den Abkürzungen:

$n = \frac{N}{G^3}$ = Zahl der Leitungselektronen pro Atom, λ = Zahl der Quantenzellen im ungestörten Atom:

$$\left(\frac{E_1}{\beta}\right)^{3/2} = \begin{cases} \frac{6\pi^2 n}{2\lambda} & \text{im Falle a,} \\ 6\pi^2\left(1 - \frac{n}{2\lambda}\right) & \text{,, ,, b.} \end{cases}$$

Also die Hallkonstante

$$R = \frac{F_y}{H \cdot I_x} = \begin{cases} -\frac{2a^3}{ec\frac{n}{2\lambda}} & \text{(a)} \\ +\frac{2a^3}{ec\left(1 - \frac{n}{2\lambda}\right)} & \text{(b)} \end{cases} \tag{20}$$

Dieser Wert stimmt größenordnungsmäßig mit dem Sommerfeldschen überein, wenn nicht gerade $\frac{n}{2\lambda}$ bzw. $1 - \frac{n}{2\lambda}$ sehr klein wird. n und λ sind beide von der Größenordnung 1. (a^3 ist das Atomvolumen, das Sommerfeldsche n ist unser n/a^3.)

Das Vorzeichen hängt wesentlich von der Besetzungszahl $x = \frac{n}{2\lambda}$ ab. Ist x klein, so hat man Fall a, also negativen, ist x ungefähr 1, Fall b und positiven (anomalen) Halleffekt. Die ganze Rechnung ist auch ohne Vernachlässigung symmetrisch zum Falle $x = \frac{1}{2}$, so daß in diesem Falle kein Halleffekt auftreten wird. Diese Tatsache hängt zusammen mit dem von Pauli* gefundenen Reziprozitätsgesetz zwischen freien und „besetzten“ Plätzen im Atom, gilt aber hier nur für tiefe Temperaturen, bei denen man $\frac{\partial f_0}{\partial E}$ als symmetrisch in E_1 ansehen kann. Die Leitfähigkeit verschwindet für $x = 0$ und $x = 1$, im ersten Falle, weil keine Leitungselektronen da sind, im zweiten Falle, weil alle Plätze besetzt sind.

A priori läßt sich über diese Besetzungszahlen wenig aussagen. Sie sind zwar bei freien Atomen bekannt, doch kommen bei dem gegenseitigen Einfluß der Atome zwei Einflüsse dazu: Erstens wird β unter Umständen vergleichbar mit der Anregungsenergie, so daß ein „Ausweichen“ in angeregte Zustände des ungestörten Atoms möglich ist, andererseits kann

* W. Pauli, ZS. f. Phys. **31**, 765, 1925.

z. B. von zwei ursprünglich gleichen Termen einer durch die Störung um einen Betrag verschoben werden, der größer als β ist. Man kann darüber keine Aussagen machen, ohne die Wechselwirkung der Elektronen untereinander in Betracht zu ziehen. Man wird aber folgendes erwarten: Ist zufällig die Anregungsspannung $> 6\,\beta$, aber noch vergleichbar mit β, so werden mit wachsender Temperatur mehr Elektronen in den angeregten Zustand gehen, also die Besetzungszahl sinken. Dann kann der Halleffekt vom positiven zum negativen Vorzeichen übergehen. Dieser Fall scheint bei Wismut und vielleicht bei Zinn vorzuliegen*.

Wir wollen schließlich noch die Widerstandsänderung im Magnetfeld berechnen. Dafür sind zwei Einflüsse vorhanden. Erstens wird das Magnetfeld einen Einfluß auf die Einstellung der Spins haben und damit die Verteilung f_0 ändern. Dieser Effekt ist natürlich unabhängig von der Richtung Magnetfeld gegen Strom und wird daher vielleicht für den Paralleleffekt maßgebend sein. Der zweite Einfluß ist die von Sommerfeld behandelte Verlängerung der Wege der Elektronen durch die Umwege, die sie im Magnetfeld machen. Dieser Effekt ist richtungsabhängig und verschwindet, wenn Strom und Feld parallel sind. Man wird ihn daher für die Differenz zwischen Parallel- und Transversaleffekt verantwortlich machen.

Dieser letztere Effekt ist aus unseren Formeln (19) zu gewinnen, indem man bis zu den Gliedern zweiter Ordnung in H geht. In der oben durchgeführten Näherung wird aber die Widerstandsänderung Null, und man hat genau wie bei Sommerfeld die Integrale über die Fermiverteilung um einen Schritt weiter zu approximieren. Die Rechnung soll hier übergangen werden. Man findet für die Änderung der Leitfähigkeit

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = -R^2\cdot\sigma^2\cdot 12\,\pi^2\left(\frac{kT}{E_1}\right)^2\cdot H^2. \tag{21}$$

Zur vorläufigen Orientierung wollen wir in (21) die Werte von R und σ für Ag bei 0^0 C einsetzen. Man erhält

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx -10^{-11}\left(\frac{kT}{E_1}\right)^2\cdot H^2.$$

Die Übereinstimmung mit der Erfahrung würde verlangen, daß die nach Sommerfeld für die Entartung maßgebende Größe $\log A = \frac{E_1}{kT}$ von

---

* Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, Ergänzungsband. Berlin 1927. S. 666.

der Größenordnung 10 ist. Es scheint, daß derartige Werte von E_1 möglich und das obige Resultat wenigstens in gröbster Annäherung richtig ist.

Für $T \gg \Theta$, wofür die Formel (21) abgeleitet ist, würde sich Temperaturunabhängigkeit ergeben, doch ist diese Voraussetzung im allgemeinen nicht erfüllt. Ob eventuell noch für tiefere Temperaturen Proportionalität mit $T^2 . \sigma^2$ besteht, konnte ich noch nicht durch Vergleich mit einwandfreiem empirischen Material feststellen. Außerdem liefert (21) noch nicht die Größenordnung der anomalen Effekte bei Wismut und den Ferromagneten.

Ich möchte zum Schluß Herrn Prof. Heisenberg für Anregung und Hilfe bei dieser Arbeit auf das herzlichste danken, ebenso Herrn Dr. Bloch für viele interessante Diskussionen.

Theor.-physik. Institut der Universität Leipzig, 22. Dezember 1928.