

Über die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle.

Von N. Akulov in Moskau.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 8. August 1928.)

Es werden hier die allgemeinen Formeln zur Berechnung der Ausdehnungsenergie der Dipolgitter sowie der Elektro- und Magnetostriktion beliebiger Kristalle angegeben. — Die nach diesen Formeln berechneten Kurven für die Magnetostriktion der Eisenkristalle werden dann mit den Experimentalkurven von K. Honda und Y. Mashiyama zusammengestellt. Nach der Lage der Maxima und Minima sowie nach den Vorzeichen und Perioden fallen die experimentellen und die theoretischen Kurven streng miteinander zusammen. Für die absolute Größe der Magnetostriktion ergibt die Berechnung dieselbe Größenordnung wie das Experiment. Es kann daraus also geschlossen werden, daß 1. die Ionen des Eisens kein merkliches elektrisches Dipolmoment haben; 2. die Ionen des Eisens bei der Berechnung der magnetischen Kopplungskräfte, mit welchen sie aufeinander einwirken, in erster Annäherung als einfache magnetische Dipole behandelt werden können.

Einleitung. Eines der wichtigsten Probleme des Ferromagnetismus ist die Berechnung der Kopplungs- und Orientierungskräfte, mit welchen die Ionen im ferromagnetischen Kristallgitter aufeinander einwirken.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert die Beantwortung folgender Grundfragen: 1. Hat das Ion des betrachteten Kristalls nur ein magnetisches Moment oder auch ein elektrisches, das wir nicht vernachlässigen dürfen? 2. Kann man bei der Berechnung der magnetischen Kräfte, mit welchen die Ionen aufeinander einwirken, diese als einfache Dipole behandeln? 3. Wie weit verändert sich die Größe des magnetischen Moments, des Ions wenn wir ihm eine andere Richtung relativ zu den Hauptachsen des Kristallgitters geben?

Die umfangreichen Magnetisierungsmessungen an Eiseneinkristallen, die im Laufe der letzten Jahre von verschiedenen Forschern* mitgeteilt wurden, ermöglichen unmittelbar die Beantwortung der letzten Frage. In der Tat spricht die Tatsache, daß die Sättigung für verschiedene Magnetisierungsrichtungen denselben Wert (1710 ± 8) erreicht, für die Unabhängigkeit der Größe des magnetischen Moments von seiner Richtung relativ zu den Hauptachsen des Kristallgitters.

Dagegen haben die zwei ersten Fragen bis jetzt noch keine bestimmte Lösung gefunden.

Die theoretische Bearbeitung der Magnetisierungskurven, die diese Lösung ergeben kann, ist durch die Notwendigkeit, die Verteilungs-

* W. Gerlach, ZS. f. Phys. **38**, 828, 1926. — K. Honda und S. Kaya, Scienc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. (1) **15**, 721, Nov. 1926, Nr. 6. — E. Dussler und W. Gerlach, ZS. f. Phys. **44**, 279, 1927.

funktion der Dipolmomente zu bestimmen, erschwert. Aber im Falle der hohen Feldstärken, wenn wir die Dipolmomente als parallel der Feldrichtung betrachten können, geben die Magnetisierungsmessungen selbstverständlich kein Material, das die Beantwortung der zwei ersten Fragen ermöglichen könnte. Anders steht es mit den Striktionsmessungen der Eiseneinkristalle bei hohen Feldstärken. Die Messungen von Webster* und von Honda und Mashiyama** zeigen, daß bei Magnetisierung in verschiedenen Richtungen die Eiseneinkristalle verschiedene Formveränderungen erleiden, wenn auch die Sättigung in allen Fällen erreicht wird.

Die Striktionsmessungen der Kristalle bei starken magnetischen Feldern liefern also umfangreiches Material, das leicht theoretisch bearbeitet werden und die Beantwortung der oben erwähnten und anderer Fragen des Ferromagnetismus ermöglichen kann.

Die Berechnung der Magnetostriktion der Eiseneinkristalle für relativ zu den Kristallachsen verschiedene Richtungen des äußeren Feldes ist das Ziel dieser Arbeit.

Die Ausgangsformeln. Für die Energiedichte eines einfachen Gitters von Dipolen beliebigen Moments p parallel \mathfrak{s} haben wir den folgenden, von H. Kornfeld*** aus bekannten Ewaldschen Potentialformeln abgeleiteten Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} U' &= \frac{1}{2} N p^2 [E_1(\mathfrak{s}) + E_2(\mathfrak{s})], \\ \text{wo } E_1'(\mathfrak{s}) &= \frac{4\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{q}^l)^2}{|\mathfrak{q}^l|^3} e^{-\frac{1}{4\epsilon^2} |\mathfrak{q}^l|^2} - \frac{4\epsilon^3}{3\sqrt{\pi}}, \\ E_2'(\mathfrak{s}) &= -\epsilon^5 \sum_l (\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{r}^l)^2 g_2(\epsilon |\mathfrak{r}^l|) + \epsilon^3 \sum_l g_1(\epsilon |\mathfrak{r}^l|). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierin sind die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} g_0(x) &= \frac{1}{x} [1 - \Phi(x)], \quad \text{wo } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha, \\ g_1(x) &= -\frac{1}{x} g_0'(x) = \frac{1}{x^2} \left[g_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right], \\ g_2(x) &= -\frac{1}{x} g_1'(x) = \frac{1}{x^2} \left[3g_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. **107**, 496, 1925; **109**, 570, 1925.

** K. Honda und Y. Mashiyama, Scienc. Rep. Tôhoku Imp. Univ. (1) **15**, 755, Nov. 1926, Nr. 6.

*** H. Kornfeld, ZS. f. Phys. **22**, 27, 1924.

und dabei bedeuten: r^l den Fahrstrahl zu den Punkten des betrachteten durch die Translationsvektoren a_1, a_2, a_3 bestimmten Dipolgitters, also

$$r^l = \sum_i l_i a_i, \quad l_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

$$q^l = 2\pi \sum_i l_i b_i$$

das 2π -fache der Fahrstrahlen in dem Gitter mit den Translationsvektoren b_i , die mit a_i durch die Relationen

$$(a_i b_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \quad (3)$$

verknüpft sind; $\mathcal{V} = a_1 [a_2 a_3]$ das Volumen des Elementarparallelepipeds; ε einen reellen positiven Parameter, von dem die Größe U' in (1) unabhängig ist; N die Anzahl der Ionen in der Volumeneinheit des Gitters.

Dabei zeigt der Strich am Summenzeichen in (1) an, daß bei Summierung nach l der Fall $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ ausgeschlossen sein muß.

Die Verzerrungsenergie des Dipolgitters. Bei homogener Ausdehnung des Gitters erleidet jeder Punkt des Gitters r^l eine Verrückung mit den Komponenten

$$\delta r_i^l = \sum_k \frac{\partial \delta r_i^l}{\partial r_k^l} r_k^l, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Betrachtet man die Koeffizienten $\frac{\partial \delta r_i^l}{\partial r_k^l} = T_{ik}$ als die Komponenten eines asymmetrischen Tensors 2T , so können wir den Verrückungsvektor in tensorieller Schreibweise als skalares Produkt aus dem Tensor 2T und dem Vektor r^l darstellen:

$$\delta r^l = {}^2T r^l. \quad (4)$$

Als speziellen Fall aus (4) bekommen wir

$$\delta a_i = {}^2T a_i. \quad (5)$$

Die im Zusammenhang mit δa_i stehenden Verschiebungen δb_i , welche die zu a_i reziproken Translationsvektoren b_i erleiden, können aus (3) bestimmt werden. Es folgt aus (3)

$$b_i \delta a_k + a_k \delta b_i = 0. \quad (6)$$

Benutzt man (5) und die allgemeine Relation $a_k {}^2T b_i = b_i {}^2T^* a_k$, wo ${}^2T^*$ der zu 2T transponierte Tensor ist, so bekommen wir aus (6)

$$a_k (\delta b_i + {}^2T^* b_i) = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Da aber a_k keine komplanären Vektoren sind, erhalten wir aus (7)

$$\delta b_i = -{}^2T^* b_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Mit Benutzung von (4) und (8) bekommen wir leicht die Veränderungen der absoluten Größen der Fahrstrahlen r^l und q^l :

$$\left. \begin{aligned} \delta |r^l| &= \frac{1}{|r^l|} r^l \delta r^l = \frac{1}{|r^l|} {}^2T r^l r^l, \\ \delta |q^l| &= \frac{1}{|q^l|} q^l \delta q^l = -\frac{1}{|q^l|} {}^2T^* q^l q^l, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

die Veränderungen der Produkte $(r^l \mathfrak{s})$ und $(q^l \mathfrak{s})$:

$$\left. \begin{aligned} \delta (r^l \mathfrak{s}) &= {}^2T r^l \mathfrak{s}, \\ \delta (q^l \mathfrak{s}) &= {}^2T^* q^l \mathfrak{s} = -{}^2T \mathfrak{s} q^l \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und die relative Volumendilatation

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \operatorname{div} {}^2T r^l = \sum_i T_{ii} \quad (11)$$

bei homogener Gitterverzerrung.

Dabei ist die Richtung \mathfrak{s} als konstant anzusehen. Variiert man jetzt den Ausdruck (1) und benutzt dabei (9), (10) und (11), so bekommt man den Ausdruck für die Verzerrungsenergie des einfachen Dipolgitters als Funktion des Tensors 2T

$$\delta U' = \frac{1}{2} N p^2 (\delta E'_1 + \delta E'_2),$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \delta E'_1 &= -(\sum_i T_{ii}) \frac{4\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{(\mathfrak{s} q^l)^2}{|q^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|} \\ &\quad + \frac{8\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{(\mathfrak{s} q^l)^2}{|q^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2} \left(\frac{1}{|q^l|^2} + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right) {}^2T q^l q^l \\ &\quad - \frac{8\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{\mathfrak{s} q^l}{|q^l|^3} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2} {}^2T^* \mathfrak{s} q^l, \\ \delta E'_2 &= \varepsilon^7 \sum_l' (\mathfrak{s} r^l)^2 g_3(\varepsilon |r^l|) {}^2T r^l r^l - \varepsilon^5 \sum_l' g_2(\varepsilon |r^l|) {}^2T r^l r^l \\ &\quad - 2\varepsilon^5 \sum_l' (\mathfrak{s} r^l) g_3(\varepsilon |r^l|) {}^2T \mathfrak{s} r^l. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dabei ist eine zu (2) analoge Abkürzung eingeführt:

$$g_3 = -\frac{1}{x} g'_2 = \frac{1}{x^2} \left[5g_2 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right]. \quad (13)$$

Die Ausdrücke für $\delta E'_1$ und $\delta E'_2$ sind in den Tensorkomponenten linear und können also in folgender Weise dargestellt werden:

$$\delta E'_\alpha = \sum_{ij} \eta_{ij}^{(\alpha)} T_{ij} \quad (14)$$

Um den Koeffizienten $\eta_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial T_{ij}}$ eine zur Weiterberechnung bequemere Gestalt zu verleihen und sie als die exakten Funktionen der Vektorkomponenten \mathfrak{s}_i darzustellen, führen wir zwei symmetrische Tensoren ${}^2Q^l$ und ${}^2\kappa^l$ mit den Komponenten $Q_{ij}^l = r_i^l r_j^l$ und $\kappa_{ij}^l = q_i^l q_j^l$ ein. Mit Hilfe dieser Tensoren können wir die Summen $(\mathfrak{s} q^l)^2$ und $(\mathfrak{s} r^l)^2$ in (12) durch die skalaren Produkte ${}^2\kappa^l q^l q^l$ und ${}^2Q^l \mathfrak{s} \mathfrak{s}$ und die Summen $(\mathfrak{s} q^l) q_i^l$ und $(\mathfrak{s} r^l) r_i^l$ durch die Vektorkomponenten $({}^2\kappa \mathfrak{s})_i$ und $({}^2Q^l \mathfrak{s})_i$ ersetzen.

Dann bekommt man für die Koeffizienten in (14) die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ij}^{(1)} &= [{}^2Q^{(ij)} - \tau Q'] \mathfrak{s} \mathfrak{s} - 2 \mathfrak{s}_i ({}^2Q' \mathfrak{s})_j, & \tau &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \\ \eta_{ij}^{(2)} &= -R'_{ij} + {}^2R^{(ij)} \mathfrak{s} \mathfrak{s} - 2 \mathfrak{s}_i ({}^2R' \mathfrak{s})_j. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die hierin eingeführten Tensoren berechnet man dabei auf Grund der folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} Q^{(ij)} &= \frac{8\pi}{A} \sum_l {}^2\kappa^l e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2} \frac{1}{|q^l|^2} \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|q^l|^2} \right) q_i^l q_j^l, \\ {}^2Q' &= \frac{4\pi}{A} \sum_l {}^2\kappa^l e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2} \frac{1}{|q^l|^2}, \\ {}^2R' &= \varepsilon^5 \sum_l {}^2Q^l g_2(\varepsilon |r^l|), \\ R^{(ij)} &= \varepsilon^7 \sum_l {}^2Q^l g_2(\varepsilon |r^l|) r_i^l r_j^l. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Größe der durch (16) bestimmten Tensor­komponenten ändert sich nicht bei beliebiger Umstellung der Vektorkomponenten r_1^l, r_2^l, r_3^l und ebenso der Vektorkomponenten q_1^l, q_2^l, q_3^l .

Daher sind alle durch Indexumstellung gebildeten Tensor­komponenten gleich. Als einen speziellen Fall haben wir

$$\left. \begin{aligned} {}^2R' &= {}^2R^*, & R^{(ij)} &= R^{(ji)} = R^{*(ij)}, \\ {}^2Q' &= {}^2Q^*, & Q^{(ij)} &= Q^{(ji)} = Q^{*(ij)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Zerlegt man jetzt den Tensor 2T in einen symmetrischen und einen asymmetrischen Teil, von denen der erste der Deformationstensor ist, und faßt dann in (14) die Glieder mit Deformationskomponenten $\tau_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$

zusammen, so bekommt man für die Verzerrungsenergie den folgenden Ausdruck:

$$\delta U'_d = \sum_{ij} f'_{ij} \tau_{ij}, \quad (18)$$

wo

$$f'_{ij} = f'_{ji} = \frac{1}{2} p^2 N \left[\frac{1}{2} (\eta'_{ij}^{(1)} + \eta'_{ji}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\eta'_{ij}^{(2)} + \eta'_{ji}^{(2)}) \right]$$

oder nach (15) mit Benutzung von (17)

$$f'_{ij} = \frac{1}{2} p^2 N \left\{ -R'_{ij} - [({}^2Q' + {}^2R') \delta]_i \delta_j - [({}^2Q' + {}^2R') \delta]_j \delta_i + (Q'^{(ij)} + R'^{(ij)} - Q' \alpha) \delta_i \delta_j \right\}, \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (19)$$

Die Koeffizienten f'_{ij} können als Spannungskomponenten des Kristalls mit einfachem Gitter von Dipolen mit dem Moment p parallel δ betrachtet werden.

Die Verzerrungsenergie zweier einfacher Dipolgitter aufeinander. Wir wollen jetzt die Veränderung der Energiedichte zweier einfacher Dipolgitter aufeinander, die bei homogener Verzerrung des Kristalls entsteht, bestimmen.

Für die Dichte der Energie zweier Dipolgitter, deren Partikelmomente $p_1 \delta_1$ und $p_2 \delta_2$ sind, haben wir den folgenden Ausdruck:

$$U = N p_1 p_2 [E_1(\delta_1 \delta_2) + E_2(\delta_1 \delta_2)],$$

$$\left. \begin{aligned} E_1(\delta_1 \delta_2) &= \frac{4\pi}{A} \sum_l \frac{(\delta_1 q^l)(\delta_2 q^l)}{|q^l|^2} e^{-\frac{1}{4\epsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)}, \\ E_2(\delta_1 \delta_2) &= -\epsilon^5 \sum_l (\delta_1, r^l - r)(\delta_2, r^l - r) g_2(\epsilon |r^l - r|) \\ &\quad + \epsilon^3 \sum_l (\delta_1 \delta_2) g_1(\epsilon |r^l - r|). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Variiert man diese Teilsummen bei konstanten δ_1 und δ_2 und benutzt dabei die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \delta(q^l r) &= q^l {}^2T r - r {}^2T^* q^l = 0, \\ \delta(\delta_1 q^l)(\delta_2 q^l) &= -(\delta_1 q^l) {}^2T \delta_2 q^l - (\delta_2 q^l) {}^2T \delta_1 q^l \\ &= -\sum_{ij} [({}^2\kappa \delta_2)_j \delta_{1i} + ({}^2\kappa \delta_1)_j \delta_{2i}], \\ \delta(\delta_1, r^l - r)(\delta_2, r^l - r) &= \sum_{ij} [({}^2Q \delta_2)_i \delta_{1j} + ({}^2Q \delta_1)_i \delta_{2j}] \\ \text{und} \\ (\delta_1 q^l)(\delta_2 q^l) &= {}^2\kappa \delta_1 \delta_2, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

in welchen der Hilfstensor ${}^2\varrho$ die Komponenten $\varrho_{ij} = (r^l - r)(r^l - r)_j$ hat, so bekommt man

$$\delta U = N p_1 p_2 [\delta E_1(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) + \delta E_2(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)],$$

wo

$$\delta E_1(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) = -\frac{4\pi}{\mathcal{A}} \left(\sum_j T_{jj} \right) \sum_l \frac{{}^2\kappa \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2}{|q^l|^2} e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)}$$

$$+ \frac{8\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{{}^2\kappa \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2}{|q^l|^2} \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|q^l|^2} \right) e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)} {}^2\mathcal{T} q^l q^l$$

$$- \frac{4\pi}{\mathcal{A}} \sum_l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)}}{|q^l|^2} \sum_{ij} [({}^2\kappa^l \mathfrak{s}_2)_j \mathfrak{s}_{1i}$$

$$+ ({}^2\kappa^l \mathfrak{s}_1)_j \mathfrak{s}_{2i}] T_{ij},$$

$$\delta E_2(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) = \varepsilon^7 \sum_l {}^2\varrho \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 g_3(\varepsilon |r^l - r|) {}^2\mathcal{T}(r^l - r)(r^l - r)$$

$$- (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) \varepsilon^5 \sum_l g_2(\varepsilon |r^l - r|) {}^2\mathcal{T}(r^l - r)(r^l - r)$$

$$- \varepsilon^5 \sum_l g_2(\varepsilon |r^l - r|) \sum_{ij} [({}^2\varrho^l \mathfrak{s}_2)_i \mathfrak{s}_{1j}$$

$$+ ({}^2\varrho^l \mathfrak{s}_1)_i \mathfrak{s}_{2j}] T_{ij}.$$

Die gesamte Energiedichteänderung δU hat also den folgenden Ausdruck:

$$\delta U = N p_1 p_2 \sum_{ij} (\eta_{ij}^{(1)} + \eta_{ij}^{(2)}) T_{ij}, \tag{23}$$

wo die Koeffizienten $\eta_{ij}^{(1)}$ und $\eta_{ij}^{(2)}$ durch die folgenden Formeln bestimmt werden:

$$\eta_{ij}^{(1)} = [{}^2\mathcal{Q}^{(ij)} - \tau \mathcal{Q}] \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 - [({}^2\mathcal{Q} \mathfrak{s}_2)_j \mathfrak{s}_{1i} + (\mathcal{Q} \mathfrak{s}_1)_j \mathfrak{s}_{2i}],$$

$$\eta_{ij}^{(2)} = -(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2) R_{ij} + {}^2R_{ij}^{(ij)} \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 - [({}^2R \mathfrak{s}_2)_i \mathfrak{s}_{1j} + ({}^2R \mathfrak{s}_1)_i \mathfrak{s}_{2j}].$$

Die hierin eingeführten Tensoren berechnet man dabei nach (16) analogen Ausdrücken:

$$\mathcal{Q}^{(ij)} = \mathcal{Q}^{(ji)} = \frac{8\pi}{\mathcal{A}} \sum_l {}^2\kappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)}}{|q^l|^2} \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{|q^l|^2} \right) q_i^l q_j^l,$$

$$\mathcal{Q} = \frac{4\pi}{\mathcal{A}} \sum_l {}^2\kappa^l \frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2} |q^l|^2 + i(q^l r)}}{|q^l|^2},$$

$$R = \varepsilon^5 \sum_l {}^2\varrho^l g_2(\varepsilon |r^l - r|),$$

$$R^{(ij)} = R^{(ji)} = \varepsilon^7 \sum_l {}^2\varrho^l g_3(\varepsilon |r^l - r|) \varrho_{ij}.$$

Setzt man in (23) $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ ein, und faßt die Glieder mit Deformationskomponenten $\tau_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ zusammen, so bekommt man die Verzerrungsenergie zweier Dipolgitter aufeinander:

$$\delta U_d = N p_1 p_2 \sum_{ij} \left[\frac{1}{2} (\eta_{ij}^{(1)} + \eta_{ji}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\eta_{ij}^{(2)} + \eta_{ji}^{(2)}) \right] \tau_{ij} = \sum_{ij} f_{ij} \tau_{ij}. \quad (26)$$

Nach Formeln (18) und (26) kann die Verzerrungsenergie eines beliebigen Gitters, das aus mehreren einfachen Dipolgittern zusammengesetzt ist, berechnet werden.

Die Verzerrungsenergie des Kristalls mit regulärem, körperzentriertem Dipolgitter. Nimmt man für die Koordinatenachsen i_1, i_2, i_3 die Hauptachsen des Gitters, so bekommt man

$$\begin{aligned} r^i &= h \sum_k l_k i_k, \\ q^i &= \frac{2\pi}{h} \sum_k l_k i_k, \\ r &= \frac{h}{2} (i_1 + i_2 + i_3), \end{aligned}$$

wo h der Hauptparameter des Gitters ist. Setzt man diese Werte in (16) ein, so findet man, daß die Hauptkomponenten des Tensors ${}^2Q'$ gleich sind und die Nebenkomponten verschwinden. Dies gilt auch für die Komponenten des Tensors ${}^2R'$. Also ist ${}^2Q' = Q'_{11} E$ und ${}^2R' = R'_{11} E$, wo E den Einheitstensor bedeutet.

Für die Tensorkomponenten ${}^2Q'_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$ haben wir dabei folgende Relationen:

$$\begin{aligned} Q'_{11}^{(11)} &= Q'_{22}^{(22)} = Q'_{33}^{(33)}, \\ Q'_{11}^{(22)} &= Q'_{11}^{(33)} = Q'_{22}^{(33)}. \end{aligned}$$

Alle Tensorkomponenten ${}^2Q'_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$, in denen die Zahl des Vorkommens eines beliebigen Indexes eine ungerade Zahl ist, verschwinden. Dasselbe gilt auch für die Komponenten ${}^2R'_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$. Mit Benutzung dieser Beziehungen erhält man aus (19)

$$\left. \begin{aligned} f'_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{N p^2}{h^3} (c'_0 + c'_1 s_j^2), \\ f'_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{N p^2}{h^3} c'_2 s_i s_j \quad (i \neq j), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wo c'_0, c'_1 und c'_2 die drei dimensionslosen Zahlen sind:

$$\begin{aligned} c'_0 &= h^3 (Q'_{22}^{(11)} + R'_{22}^{(11)} - Q'_{11} - R'_{11}), \\ c'_1 &= h^3 (-2 Q'_{11} - 2 R'_{11} + Q'_{11}^{(11)} + R'_{11}^{(11)} - Q'_{22}^{(11)} - R'_{22}^{(11)}), \\ c'_2 &= h^3 \cdot 2 (Q'_{11}^{(22)} + R'_{11}^{(22)} - Q'_{11} - R'_{11}). \end{aligned}$$

Nach den Formeln (16) bekommt man für diese Koeffizienten die Zahlenwerte, die in Tabelle 1 angegeben sind.

Tabelle 1.

ε	c'_0	c'_1	c'_2	c_0	c_1	c_2
$\frac{2}{h}$	-2,191	19,08	-4,391	10,06	-17,71	20,26
$\frac{\sqrt{2}}{h}$	-2,187	19,02	-4,383	10,04	-17,69	20,20
Mittelwerte	-2,189	19,05	-4,387	10,050	-17,70	20,23

Nach analogen Berechnungen erhalten wir mit Benutzung von (26), (24) und (25)

$$\left. \begin{aligned} f_{jj} &= \frac{N p^2}{h^3} (c_0 + c_1 s_i^2), \\ f_{ij} &= \frac{N p^2}{h^3} c_2 s_i s_j \quad (i \neq j). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die Zahlenwerte der Koeffizienten c_0, c_1, c_2 sind ebenfalls in Tabelle 1 angegeben.

Für die Verzerrungsenergie δU_d des körperzentrierten Gitters, die der Summe $\delta U_d + 2 \delta U_a$ gleich ist, bekommen wir

$$\left. \begin{aligned} \delta U_d &= \sum_{ij} \Phi_{ij} \tau_{ij} = \sum_{ij} (2 f'_{ij} + f_{ij}) \tau_{ij}, \\ \Phi_{ij} &= \frac{N p^2}{h^3} (c_0 + c_1 s_j^2), \\ \Phi_{ij} &= \frac{N p^2}{h^3} c_2 s_i s_j \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

wo

$$\begin{aligned} c_0 &= c'_0 + c_0 = 7,86, \\ c_1 &= c'_1 + c_1 = 1,35, \\ c_2 &= c'_2 + c_2 = 15,84. \end{aligned}$$

und

Berechnung des Striktionstensors des Kristalls mit homöopolarem, regulärem, körperzentriertem Gitter. Die Polarisation des Kristalls mit homöopolarem Kristallgitter kann im allgemeinen durch folgende beiden Ursachen bedingt werden: 1. Durch die quasielastischen Deformationen der Ionen, die keine natürlichen „remanenten“ Dipolmomente haben, und 2. durch die Orientierung der Partikeln mit natürlichen Dipolmomenten. Wir berechnen zuerst die Gestaltveränderung des Kristalls bei der Polarisation erster Art.

Für das elastische Potential des zum regulären System gehörenden Kristalls haben wir den folgenden Ausdruck:

$$\omega = a_{11} \sum_j \tau_{jj} + 2 a_{12} (\tau_{11} \tau_{22} + \tau_{22} \tau_{33} + \tau_{33} \tau_{11}) + a_{44} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2). \quad (30)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen können folgenderweise dargestellt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} (\delta U_d + \omega) = 0. \quad (31)$$

Setzt man hierin (29) und (30) ein, so bekommt man die in τ_{ij} linearen Gleichungen. Nach leichter Umformung erhält man aus diesen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{jj} &= \kappa_0 - \kappa_1 s_j^2, \\ \tau_{ij} &= -\kappa_2 s_i s_j, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_1 a_{12} - c_0 (a_{11} - a_{12})}{2 (2 a_{12} + a_{11}) (a_{11} - a_{12})}, \\ \kappa_1 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_1}{2 (a_{11} - a_{12})}, \\ \kappa_2 &= \frac{N p^2}{h^3} \frac{c_2}{a_{44}}. \end{aligned} \right\} \quad (32 a)$$

Betrachten wir den kugelförmigen Kristallteil, dessen Radius v die Größe 1 hat und dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Bei der Polarisation des Kristalls in beliebiger Richtung (s) erleidet jeder Punkt dieser Sphäre eine Verschiebung, die durch das Produkt ${}^2\tau v$ bestimmt ist. Die Projektion dieses Verschiebungsvektors auf den Radiusvektor v ergibt die relative Längenveränderung des Kristalls in der Richtung v :

$$\left(\frac{\delta l}{l} \right)_{sv} = \frac{1_s}{|v|^2} \tau v v. \quad (33)$$

Oder nach (32)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta l}{l} \right)_{sv} &= \kappa_0 - \kappa_1 (s_1^2 v_1^2 + s_2^2 v_2^2 + s_3^2 v_3^2) \\ &\quad - \kappa_2 (s_1 v_1 s_2 v_2 + s_2 v_2 s_3 v_3 + s_3 v_3 s_1 v_1). \end{aligned} \quad (33 a)$$

Was ferner die Polarisation zweiter Art anbetrifft, so können wir sie in folgender Weise formell auf die Polarisation erster Art zurückführen. Betrachten wir wieder den kugelförmigen Teil des „unpolarisierten“ Kristalls, dessen Dipolgitter, wie dabei angenommen ist, die kubischen Symmetrieeigenschaften hat.

Wenn wir die absoluten Größen der Dipolmomente der Ionen * bis Null vermindern, verändert sich der Radius der betrachteten Sphäre und

wir erhalten eine neue, deren Radius mit $\bar{v} = v(1 + \alpha)$ bezeichnet wird. Wenn wir jetzt die Dipolmomente wieder bis zu den ursprünglichen Werten vergrößern und sie alle dabei parallel s richten, nimmt die absolute Größe des Radiusvektors die durch (33) bestimmte Vergrößerung an.

Wir bekommen also für die relative Längenveränderung des Kristalls parallel v bei der Polarisation, bis zur Sättigung in der Richtung s , den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} = \frac{|\bar{v}| - |v|}{|\bar{v}|} + \frac{1}{|\bar{v}|^2} {}^2\bar{\tau}_{(s)} \bar{v} \bar{v} = \alpha + \frac{1}{|\bar{v}|^2} {}^2\bar{\tau}_{(s)} v v. \quad (34)$$

Wir betrachten den Fall, in dem die Polarisationskräfte im Vergleich zu den anderen Kräften, mit welchen die Ionen zusammengehalten werden, sehr klein sind.

Das gilt z. B. für die magnetischen Kräfte im Gitter des beliebigen ferromagnetischen Kristalls, die auch im Vergleich mit den elektrischen sehr klein sind.

Die Elastizitätskoeffizienten des Kristalls können sich zwar auch in diesem Falle bei irgendwelcher Richtungsänderung der Dipolmomente oder bei Rückführung auf Null der Momentengröße der Ionen verändern, doch muß diese Veränderung klein bleiben.

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung erhalten wir also aus (34)

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s_0 v_0} = {}^2\tau_{(s)} v v - {}^2\tau_{(s_0)} v_0 v_0, \quad (35)$$

wo s, s_0, v, v_0 vier Einheitsvektoren sind.

Die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle. Wir können die Formel (35) des vorigen Paragraphen auf die Untersuchung der Magnetostriktion der Eisenkristalle anwenden. Wir betrachten dabei zwei Grundfälle:

a) $s = v$, d. h. die relative Längenveränderung des Kristalls ist in der Magnetisierungsrichtung gemessen (der „Longitudinaleffekt“);

b) $s \perp v$, d. h. die relative Ausdehnung des Kristalls ist in der zur Magnetisierungsrichtung senkrechten Richtung gemessen (der „Transversaleffekt“).

Setzt man in (35) $s = v$ und $s_0 = v_0$ ein und benutzt dabei die Relation $\sum_{ij} s_i^2 s_j^2 = 1$, so ergibt sich für den Longitudinaleffekt die folgende Formel:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{sv} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{s_0 v_0} \\ &= 2 \kappa [(s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2) - (s_{01}^2 s_{02}^2 + s_{02}^2 s_{03}^2 + s_{03}^2 s_{01}^2)], \quad (36) \end{aligned}$$

wo

$$\kappa = \kappa_2 - \kappa_1 = \left(\frac{c_2}{a_{44}} - \frac{c_1}{2(a_{11} - a_{22})} \right) \frac{Np^2}{h^3}. \quad (37)$$

Für den Transversaleffekt bekommt man mit Benutzung der aus der Bedingung $v \cdot s = 0$ erhaltenen Beziehung $\sum_{ij} s_i v_i \cdot s_j v_j = 0$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta l}{l} \right)_{sv} - \left(\frac{\delta l}{l} \right)_{s_0 v_0} \\ &= \kappa [(s_1^3 v_1^2 + s_2^3 v_2^2 + s_3^3 v_3^2) - (s_{01}^3 v_{01}^2 + s_{02}^3 v_{02}^2 + s_{03}^3 v_{03}^2)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Wir wollen jetzt den Zahlenwert des Faktors κ berechnen.

Da in der Literatur keine Angaben über Elastizitätskoeffizienten der Eiseneinkristalle zu finden sind, benutzen wir die Elastizitätskoeffizienten des Elektrolyteisens oder des Stahles und werden dabei den Eiseneinkristall als elastisch-isotrop betrachten.

Benutzt man dann die Beziehungen

$$a_{11} - a_{12} = 2 a_{44} = \mu; \quad 2\mu = \frac{E}{1 + \sigma},$$

wo σ der Poissonsche und E der Elastizitätsmodul sind, so erhalten wir aus (37):

$$\kappa = c \frac{1 + \sigma}{E} \frac{Np^2}{h^3}, \quad (37a)$$

wo

$$c = 4c_2 - c_1 = 62,01.$$

Bei Berechnung des Zahlenwertes des Faktors $\frac{Np^2}{h^3}$ können wir ihn durch $\frac{1}{4} J_m^2$ ersetzen, wo J_m den Sättigungswert der Magnesisierungsintensität darstellt.

Nimmt man an, daß

$$\begin{aligned} J_m &= 1710, \\ E &= 22\,000 \cdot 981 \cdot 10^5, \\ \sigma &= 0,3, \end{aligned}$$

so findet man

$$\kappa = 0,265 \cdot 10^{-4}. \quad (37b)$$

Die Formeln (36) und (38) beziehen sich auf den Fall, wenn der Kristall bis zur Sättigung magnetisiert ist.

Der Longitudinaleffekt in der (100)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und s_0 liegen in diesem Falle in der (100)-Ebene. Für den

Hauptparameter in (36) nehmen wir den Winkel zwischen s und s_0 und richten dabei den Vektor s_0 einer der tetragonalen Kristallachsen parallel.

Wenn als Koordinatenachsen die Hauptachsen des Kristalls genommen sind, so haben wir:

$$\begin{aligned} s_{01} &= 1, & s_{02} &= s_{03} = s_3 = 0, \\ s_1 &= \cos \varphi, & s_2 &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (36) ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = -\frac{1}{4} \kappa (1 - \cos 4\varphi). \quad (a)$$

Das ist die einfache Sinusoide mit der Periode $\varphi_0 = 90^\circ$, mit der Amplitude $\frac{1}{2} \kappa$ und der Lage unterhalb der Abszissenachse. Die nach dieser

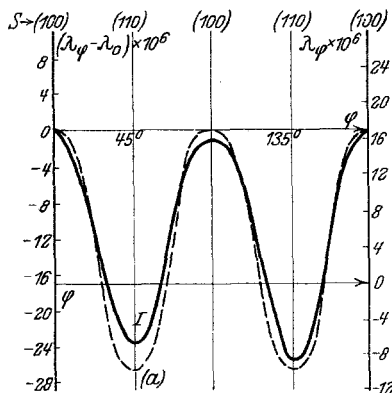


Fig. 1.

(a) ist die berechnete Kurve ($\kappa = 0,53 \cdot 10^{-4}$); I ist die experimentelle Kurve, die von Honda und Mashiyama bei der effektiven Feldstärke $H = 614$ Gauß erhalten wurde.

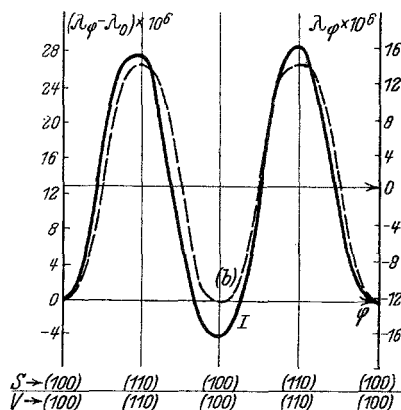


Fig. 2.

(b) berechnete Kurve ($\kappa = 0,53 \cdot 10^{-4}$); I experimentelle Kurve ($H = 25,0$ Gauß).

Formel (a) berechnete sowie die experimentelle Kurve von Honda und Mashiyama* sind in Fig. 1 gegeben**.

* I. c., Anm. ** auf S. 390.

** Zum anschaulichen Vergleich der theoretischen Kurven mit dem Experiment wurde $\kappa = 0,53 \cdot 10^{-4}$ gewählt. Dagegen ergibt die Formel (37 b) für κ den Wert $0,265 \cdot 10^{-4}$. Somit erhält man aus der Theorie bei den angenommenen Werten von E und σ eine zwar zweimal kleinere Magnetostraktion als die beobachtete, aber doch von richtiger Größenordnung. Andere Abweichungen des Experiments von der Theorie können durch die Beobachtungsfehler oder durch den Umstand, daß die Sättigung der Magnetisierung in diesen Experimenten nicht immer erreicht wurde, erklärt werden.

Der Transversaleffekt in der (100)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und v liegen in der 100-Ebene. Für den Hauptparameter ist der Winkel zwischen s und einer der tetragonalen Achsen s_0 gewählt.

Setzt man in (38)

$$\begin{aligned} s_1 &= \cos \varphi, & s_2 &= \sin \varphi, \\ v_1 &= \cos(90^\circ + \varphi), & v_2 &= \sin(90^\circ + \varphi), \\ s_{01} &= 1, & v_{02} &= 1 \quad \text{und} \quad s_{02} = s_{03} = v_{01} = v_{03} = 0, \end{aligned}$$

so bekommt man nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_\varphi - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = \frac{1}{4} \kappa (1 - \cos 4\varphi). \tag{b)}$$

Es ergibt sich also wieder die Sinusoide mit derselben Amplitude und Periode, wie im Falle des Longitudinaleffekts, aber mit positiven

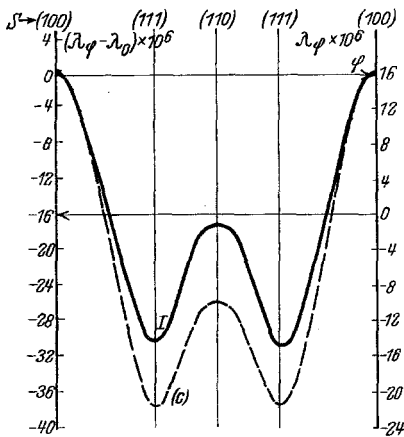


Fig. 3.

(c) berechnete Kurve ($\kappa = 0,53 \cdot 10^{-4}$);
I experimentelle Kurve ($H = 630$ Gauß).

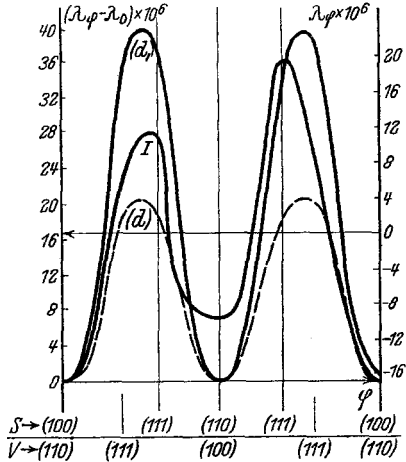


Fig. 4.

(d) berechnete Kurve ($\kappa = 0,53 \cdot 10^{-4}$);
I experimentelle Kurve ($H = 250$ Gauß);
(d₁) berechnete Kurve ($\kappa = 1,06 \cdot 10^{-4}$).

Ordinaten. In Fig. 2 ist die experimentelle* und die berechnete Kurve eingetragen.

Der Longitudinaleffekt in der (110)-Ebene. Liegt der Einheitsvektor s in der (110)-Ebene, so haben wir

$$s_1 = \cos \varphi, \quad s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \quad s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \tag{39}$$

und

$$s_{01} = 1, \quad s_{02} = 0, \quad s_{03} = 0.$$

* l. c., Anm. ** auf S. 390.

Setzt man diese Werte in (36) ein, so bekommt man nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{\varphi} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = -\frac{1}{4}\kappa \left[\frac{7}{4} - \cos 2\varphi - \frac{3}{4} \cos 4\varphi \right]. \quad (c)$$

Wir erhalten also die Kurve, die aus zwei Sinusoiden mit den Perioden 90 und 180° und verschiedenen Amplituden zusammengesetzt ist. Die nach dieser Formel berechnete sowie die experimentelle Kurve sind in Fig. 3 gegeben.

Der Transversaleffekt in der (110)-Ebene. Die Vektoren s und v liegen in der (110)-Ebene.

Für die Komponenten des Vektors s haben wir dieselben Werte wie im Falle des Longitudinaleffekts (39).

Ersetzt man in (39) φ durch $\varphi + 90^\circ$, so erhalten wir die Komponenten des Vektors v :

$$v_1 = -\sin \varphi, \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, \quad v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi.$$

Setzt man diese Werte in (38) ein, so finden wir nach leichter Umformung

$$\left(\frac{\delta l}{l}\right)_{\varphi} - \left(\frac{\delta l}{l}\right)_0 = \frac{3}{16}\kappa (1 - \cos 4\varphi). \quad (d)$$

Wir erhalten also wieder die einfache Sinusoide mit der Periode $\varphi_0 = 90^\circ$ und der Amplitude $\frac{3}{8}\kappa$.

Die nach der Formel (38) berechnete sowie die experimentelle* Kurve sind in Fig. 4 gegeben.

Der Longitudinaleffekt in der (111)-Ebene. Stellen wir uns den kubischen Kristallteil vor, dessen Kanten den Hauptachsen des Gitters parallel sind.

Der Einheitsvektor s_0 , der vom Zentrum einer der Würfelflächen nach einem der Endpunkte der gegenüberliegenden Fläche gerichtet ist, fällt mit einer der (111)-Ebenen zusammen.

* l. c. Anm. ** auf S. 390.

Liegt der Einheitsvektor s in derselben (111)-Ebene und bildet mit s_0 den Winkel φ , so haben wir

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{\sqrt{6}} \cos \varphi, & s_2 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \\ \text{und} & & s_3 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Setzt man diese Werte in (36) ein, so bekommt man

$$\left(\frac{\delta l}{l} \right)_{\varphi} - \left(\frac{\delta l}{l} \right)_0 = 0. \quad (e)$$

Die experimentelle Kurve* ist in Fig. 5 gegeben. Die theoretische Kurve ist nach (e) eine der Abszissenachse parallele Gerade**.

Der Transversaleffekt in der (111)-Ebene. Die Einheitsvektoren s und v liegen in der (111)-Ebene. Die Komponenten des Vektors s

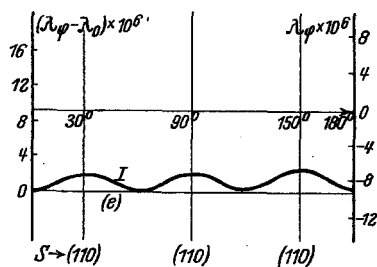


Fig. 5.

(e) berechnete Kurve;
I experimentelle Kurve ($H = 455$ Gauß).

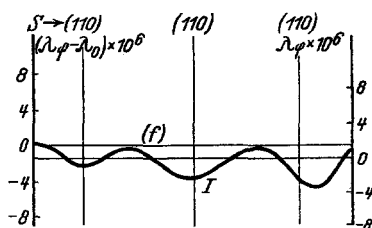


Fig. 6.

(f) berechnete Kurve;
I experimentelle Kurve ($H = 350$ Gauß).

sind durch (40) bestimmt. Ersetzt man in (40) den Winkel φ durch den Winkel $\varphi + \frac{\pi}{2}$, so finden wir die Komponenten des Vektors v .

Setzt man die Ausdrücke für s und v in (38) ein, so bekommt man

$$\left(\frac{\delta l}{l} \right)_{\varphi} - \left(\frac{\delta l}{l} \right)_0 = 0. \quad (f)$$

* l. c., Anm. ** auf S. 390.

** Aus den umfangreichen Messungen von Honda und Mashiyama kann man folgende Schlüsse ziehen. Im Falle des Longitudinal- und auch des Transversaleffekts in der (111)-Ebene nimmt die Amplitude der Striktionsänderungen beim Wachsen der Feldstärke zuerst zu und nähert sich dann asymptotisch dem Nullwert. In anderen Fällen strebt die Amplitude von Null verschiedenen Endwerten zu.

Die experimentelle Kurve ist in Fig. 6 dargestellt. Die theoretische Kurve ist wie im Falle des Longitudinaleffekts eine Gerade, die der Abszissenachse parallel verläuft. Es folgt also aus (e) und (f), daß bei der Drehung des Eiseneinkristalls im starken Magnetfeld um eine seiner trigonalen Achsen dieser Kristall keine Formveränderung erleidet.

Betrachten wir jetzt alle berechneten und experimentellen Kurven, so sehen wir, daß sie nach den Vorzeichen sowie nach der Lage und Zahl der Maxima und Minima und nach ihren Perioden einander genau entsprechen.

Für die absolute Größe der Magnetostriktion ergibt die Berechnung dieselbe Größenordnung wie das Experiment. Es folgt daraus also: 1. daß die Ionen des Eisens kein merkliches elektrisches Dipolmoment haben, und 2. daß diese Ionen bei der Berechnung der magnetischen Kopplungskräfte in erster Annäherung als einfache Dipole behandelt werden können.

Moskau, Magnetisches Laboratorium, August 1928.
