

Über die innere Bewegung des Elektrons. III.

Von H. Hönl und A. Papapetrou.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Mai 1940.)

Es wird der korrespondenzmäßige Zusammenhang zwischen Dirac-Elektron und Pol-Dipol-Teilchen untersucht. Die korrespondenzmäßigen Parallelen lassen sich durch Unterscheidung der geraden und ungeraden Anteile der Operatoren des Dirac-Elektrons und durch Berechnung typischer Erwartungswerte für diese besonders deutlich verfolgen (Abschnitt 1). Die Methode wird angewandt auf die Einzelheiten der Makro- und Mikrobewegung (Zitterbewegung) des Elektrons (Abschnitt 2), des Eigenimpulsmoments (Abschnitt 3) und die Energiefunktion (Abschnitt 4). In allen Fällen zeigt sich eine sehr genaue Entsprechung, welche es nahelegt, das Pol-Dipol-Teilchen als das klassische Modell des Dirac-Elektrons anzusehen.

Der vorliegende dritte Teil der Untersuchung über die innere Bewegung des Elektrons verfolgt das Ziel, den korrespondenzmäßigen Zusammenhang des in den beiden ersten Teilen beschriebenen, als Pol-Dipol-Teilchen charakterisierten physikalischen Systems¹⁾ mit dem Diracschen Elektron im einzelnen nachzuweisen. Der einfache relativistische Massenpunkt kann jedenfalls *nicht* als korpuskulares Gegenstück zum Dirac-Elektron aufgefaßt werden, da er keine inneren Freiheitsgrade besitzt, welche dem Elektronenspin korrespondieren. Ganz anders verhält sich das Pol-Dipol-Teilchen, da es vermöge seiner inneren rotatorischen Bewegung ein Eigenimpulsmoment besitzt, das mit dem Elektronenspin in Parallele gesetzt werden kann. Es soll nun untersucht werden, wie weit diese Korrespondenz im Einzelfall reicht, d. h. inwiefern das Pol-Dipol-Teilchen überhaupt als klassisches Modell des Dirac-Elektrons gelten kann. *Die Aufgabe des Modells erblicken wir darin, ein korpuskulares Gegenbild zum Wellenbild der Diracschen Wellenmechanik des Spinelektrons darzustellen*, das sich zu diesem ähnlich verhält, wie der einfache (relativistische) Massenpunkt zur skalaren de Broglie-Schrödingerschen Materiewelle.

Wir wollen uns bei dem durchzuführenden Vergleich auf die *kräftefreie* Bewegung beschränken. — Das *Dirac-Elektron* wird in diesem Falle in bekannter Weise durch die Wellengleichung

$$H\psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

¹⁾ H. Hönl u. A. Papapetrou, Teil I: ZS. f. Phys. **112**, 512, 1939; Teil II: ebenda **114**, 478, 1939 (im folgenden als I und II zitiert).

mit dem Hamilton-Operator

$$H = c(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3) + \alpha_4 \mu_0 c^2, \quad (2)$$

beschrieben, wobei die Vertauschungsrelationen gelten:

$$P_k x_l - x_l P_k = \frac{\hbar}{i} \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (3a)$$

$$\alpha_x \alpha_\lambda + \alpha_\lambda \alpha_x = 2 \delta_{x\lambda} \quad (x, \lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (3b)$$

($E_0 = \mu_0 c^2$ Ruhenergie des Elektrons). Wie zuerst Breit¹⁾ bemerkt und Schrödinger²⁾ eingehend verfolgt hat, ist beim Dirac-Elektron der „triviale“, von der Mechanik der Punktmassen her bekannte Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit aufgehoben. Bildet man nämlich die zeitliche Ableitung der Koordinate x_k , so erhält man nach der allgemeinen Vorschrift über die Bildung der zeitlichen Ableitung eines Operators nach (2), (3a) und (3b):

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{i}{\hbar} (H x_k - x_k H) = c \alpha_k, \quad (4)$$

d. h. eine Größe, deren Eigenwerte $\pm c$ sind. Der Erwartungswert von dx_k/dt wird daher im allgemeinen ebenfalls die Größenordnung c besitzen. Dies gilt unabhängig von dem Erwartungswert für den Impuls, welcher für eine Wellengruppe mit hinreichend scharf definierter Makrogeschwindigkeit³⁾ mit dieser in dem gewöhnlichen, für die relativistischen Punktmassen gültigen Zusammenhang steht. Diese Diskrepanz zwischen Mikro- und Makrogeschwindigkeit hat Schrödinger „anschaulich“ dahin interpretiert, daß das Dirac-Elektron sich nicht geradlinig bewegt, sondern eine Art „Zitterbewegung“ ausführt, derart, daß sich der Schwerpunkt der Ladungswolke mit einer sehr kleinen berechenbaren Amplitude und mit Lichtgeschwindigkeit oszillatorisch hin und her bewegt und dabei im Zeitmittel mit einer unter Umständen viel geringeren Makrogeschwindigkeit fort-schreitet. Alle Einzelheiten dieser Zitterbewegung ergeben sich durch Integration von Gleichung (4) im Sinne des Operatorkalküls (Abschnitt 1).

Die Verhältnisse beim Dirac-Elektron zeigen nun eine auffallende Ähnlichkeit mit dem Verhalten des klassisch zu beschreibenden *Pol-Dipol-*

¹⁾ G. Breit, Proc. Amer. Acad. **14**, 553, 1928. — ²⁾ E. Schrödinger, Berl. Ber. **1930**, S. 418; **1931**, S. 63 (im folgenden als A und B zitiert). —

³⁾ Die „Makrogeschwindigkeit“ ist dann scharf definiert, wenn es sich um eine (monochromatische) Wellengruppe mit scharf definierten Impulskomponenten handelt. Wir vermeiden hierfür das Wort „Gruppengeschwindigkeit“, weil der Schwerpunkt der Wellengruppe gerade an der „Zitterbewegung“ teilnimmt.

Teilchens. Dieses Teilchen soll nach I durch das folgende Gleichungssystem charakterisiert werden¹⁾:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{P_\alpha}{c} \right) \equiv \frac{d}{ds} (m u_\alpha - 2 \dot{\pi}^\nu u_\nu \cdot u_\alpha + \dot{\pi}_\alpha) = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

$$\pi_\alpha \dot{u}_\beta - \pi_\beta \dot{u}_\alpha = 0, \quad (6)$$

P_α ist dabei der Energie-Impulsvektor und (5) bringt daher die Erhaltung von Energie und Impuls zum Ausdruck (kräftefreie Bewegung). Die u_α sind die Geschwindigkeitskomponenten dx_α/ds des Teilchens, wobei die Ableitungen der Koordinaten x_α nach der Eigenzeit s zu nehmen sind, so daß in jedem Punkte der Bahn $u^\alpha u_\alpha = 1$ wird (speziell ist $u_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, wenn $\beta = \frac{v}{c}$ die durch c dividierte Geschwindigkeit des Teilchens ist); entsprechend sind die durch einen Punkt bezeichneten Ableitungen als Ableitungen nach der Eigenzeit zu verstehen. Die innere Struktur des Teilchens wird durch seine Polmasse m (Skalar) und sein Dipolmoment π_α (Vierervektor) gekennzeichnet.

Wie nun in Teil I gezeigt wurde, besitzt das Gleichungssystem (5), (6) Lösungen, welche einer *Kreisbewegung* des Pol-Dipol-Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit entsprechen, während gleichzeitig der resultierende Impuls \vec{P} verschwindet (makroskopisch ruhendes Teilchen). Makroimpuls \vec{P} und innere (Mikro-)Geschwindigkeit des Teilchens sind demnach auch hierbei als weitgehend entkoppelt anzusehen. Überlagert man der Kreisbewegung des „ruhenden“ Teilchens eine Translation, so nimmt der *konstante* Impuls \vec{P} diejenige Größe an, welche zu seiner makroskopischen Geschwindigkeit im Sinne der relativistischen Mechanik der Punktmasse gehört (P_α Vierervektor). Es ist ferner bemerkenswert, daß die Formeln für die Kreisbewegung den *Grenzübergang: Mikrogeschwindigkeit $v \rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit c* zulassen, ohne daß hierbei die Ruhmasse und das Impulsmoment unendlich werden²⁾. Im folgenden soll stets dieser Grenzfall zum Vergleich mit dem Dirac-Elektron herangezogen werden.

¹⁾ Wir betrachten hierbei speziell dasjenige System von Gleichungen, das aus dem allgemeinen I, Gl. (43), durch Nullsetzen des Tensors $n_{\alpha\beta}$ entsteht; vgl. auch II, Abschnitt 3. Der dort eingeführte Vierervektor p_α ist hier durch π_α bezeichnet. — ²⁾ Dieser Grenzübergang wirft überdies ein eigenartiges Licht auf das Problem der *Selbstenergie* des Teilchens vermöge seiner elektrischen Ladung. Es zeigt sich nämlich, daß die unendliche Selbstenergie der Punktladung des Teilchens nicht nur mit einer endlichen Ruhmasse vereinbar ist, sondern daß das Unendlichwerden der Polmasse m sogar die Bedingung dafür ist, daß die innere (Mikro-) Geschwindigkeit des Teilchens die Lichtgeschwindigkeit (asymptotisch) erreicht (I, Abschnitt 2, 2).

Es wird somit an Hand unseres Modells folgende Auffassung der Schrödingerschen Zitterbewegung nahegelegt. Die nach Ablösung der Makrobewegung übrigbleibende Zitterbewegung der Koordinaten des Dirac-Elektrons wird im Modell durch einen periodischen Umlauf des Teilchens auf einer zunächst beliebig orientierten Kreisbahn repräsentiert; der Elektronenspin kommt durch den Umlauf des Teilchens mit Lichtgeschwindigkeit zustande. *Wir werden zeigen, daß diese modellmäßige Auffassung den Eigenschaften des Dirac-Elektrons bis in die verwickeltesten Einzelheiten hinein, die Schrödinger bei der kräftefreien Bewegung diskutiert, weitgehend gerecht wird.* Vorläufig wollen wir uns mit der Feststellung begnügen, daß das Modell für den Grenzfall $v \rightarrow c$ Frequenz $\left(= \frac{2\mu_0 c^2}{\hbar} \right)$ und Radius der Kreisbahn $\left(= \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \right)$ in Übereinstimmung mit Frequenz und Amplitude der Koordinatenschwankung beim Dirac-Elektron ergibt, falls man im Modell das innere Impulsmoment (Spin) als quantisiert vom Betrage $\frac{1}{2}\hbar$ annimmt (vgl. Abschnitt 2).

Das Modell geht in seiner konkreten Anschaulichkeit über die Diracsche Wellengleichung naturgemäß weit hinaus¹⁾. Dies kommt z. B. schon darin zum Ausdruck, daß die Meßwerte für jede Geschwindigkeitskomponente (Eigenwerte von $c\alpha_k$) beim Dirac-Elektron nur der Werte $\pm c$ fähig sind, während im Modell alle Zwischenwerte zwischen $+c$ und $-c$ möglich sind und die Extremwerte noch von der Orientierung der Bahnebene abhängen²⁾. Man sollte daher vielleicht erwarten, daß das Modell bei den Einzelheiten der Spinbewegung versagen müßte. Daß dies jedoch keineswegs der Fall ist, sondern daß sich im Gegenteil eine sehr weitgehende Korrespondenz herausstellt, wird aus den folgenden Abschnitten hervorgehen.

¹⁾ Die grundsätzliche Unmöglichkeit, die Aussagen des Modells durch das Experiment zu verifizieren, soll hier nicht zur Diskussion stehen. In diesem Zusammenhang ist es jedoch von großem Interesse, daß nach Schrödinger die geometrische Konfiguration eines Systems von der Ruhmasse μ_0 sich bestenfalls mit einer linearen Genauigkeit $l_0 = \frac{\hbar}{2\mu_0 c}$ beobachten läßt; ebenso ist jede Zeitangabe mindestens mit einer Zeitunschärfe $\tau_0 = \frac{\hbar}{2\mu_0 c^2}$ behaftet. Aus diesen Unschärfen geht hervor, daß jede konkrete Aussage über den Ablauf der inneren Bewegung des Elektrons unmöglich ist. — Vgl. hierzu E. Schrödinger, Berl. Ber. 1931, S. 238, insbesondere Gleichung (5) und (10); s. auch H. T. Flint u. O. W. Richardson, Proc. Roy. Soc. London (A) 117, 625 u. 637, 1928. — ²⁾ Nach dem Modell würde man die Korrespondenz erwarten:

$$c^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \rightarrow c^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2);$$

in Wirklichkeit gilt jedoch für jedes einzelne k : $\alpha_k^2 = 1$. Entsprechend ist beim Dirac-Elektron der Meßwert des Quadrates für jede Geschwindigkeitskomponente — und daher auch der Erwartungswert — stets c^2 .

Die durch (1), (2) und (3 a, b) einerseits, (5) und (6) andererseits definierten physikalischen Systeme scheinen auf den ersten Blick wenig Ähnlichkeit miteinander zu besitzen. Eliminiert man jedoch aus den Gleichungen (5) die π_α , so erhält man die Energie $\frac{c}{i} P_4$ in der Gestalt:

$$H^* = v_1 P_1 + v_2 P_2 + v_3 P_3 + \frac{u_0}{u_4} \mu_0 c^2, \quad (7)$$

worin u_0 den Wert von u_4 für das makroskopisch ruhende Teilchen darstellt [I, Gl. (70)]. Der Ausdruck (7) zeigt nun, wenn man (4) beachtet und u_0/u_4 mit α_4 in Parallele rückt, in der Tat eine auffallende Analogie mit dem Hamilton-Operator H des Dirac-Elektrons. Wir werden im letzten Abschnitt 4 näher ausführen, daß diese formale Analogie in einer tiefer liegenden Korrespondenz begründet ist. Entsprechende korrespondenzmäßige Beziehungen wird man auch bei anderen Operatoren — Lagekoordinaten, Spin — zu erwarten haben (Abschnitt 2 und 3).

Bei der folgenden Untersuchung spielen die Zustände *negativer Energie*, wie sie dem Dirac-Elektron eigentümlich sind, eine wesentliche Rolle. Sie erst ermöglichen — und zwar ohne Bezugnahme auf die Diracsche Positionentheorie — den korrespondenzmäßigen Vergleich des Dirac-Elektrons mit dem Modell des umlaufenden Massenpunktes in Einzelheiten durchzuführen. Obgleich die Auswahl gewisser spezieller repräsentativer Wellenfunktionen, welche wir dem Vergleich zugrunde legen werden, vielleicht a priori nicht als zwingend erscheinen mag, so lassen die Ergebnisse doch eine desto auffallendere Analogie zwischen dem Verhalten des Modells und dem Dirac-Elektron erkennen. — Der tiefere physikalische Grund für diese Korrespondenz dürfte vielleicht darin gesucht werden, daß das Relativitätspostulat, auf dessen Vereinigung mit den Prinzipien der Quantentheorie die Diracsche Theorie basiert, bereits ein so enges begriffliches Schema darstellt, daß jedes in sich widerspruchsfreie Elektronenmodell, welches dem Elektronenspin in relativistisch-invarianter Weise Rechnung trägt, in wesentlichen Zügen mit dem Dirac-Elektron übereinstimmen wird¹⁾.

Dem im folgenden durchzuführenden Vergleich liegen die beiden zitierten Arbeiten von Schrödinger über die Quantendynamik des Elektrons zugrunde. Die gewonnenen Ergebnisse beruhen durchweg auf der dort eingeführten „Methode des zeitabhängigen Operators“, welche darin besteht, daß die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion ψ , Gleichung (1),

¹⁾ Diese Auffassung verdanken die Verfasser einer Diskussion mit Herrn Prof. W. Heisenberg.

auf die Operatoren „übergewälzt“ wird. Diese Methode hat für uns den großen Vorteil, daß sie von allen quantenmechanischen Methoden dem Standpunkt der Korpuskulartheorie am nächsten kommt.

1. *Allgemeine Überlegungen zur Schrödingerschen Zitterbewegung.
Gesichtspunkte für den Vergleich mit dem Modell.*

1. Die „Bewegungsgleichung“ für den beliebigen Operator A

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dA}{dt} = HA - AH, \quad (8)$$

läßt sich im Sinne des Operatorkalküls allgemein integrieren¹⁾:

$$A(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A(o) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \quad (9)$$

H ist in (9) ebenso wie in (8) als Operator aufzufassen; t ist c -Zahl. $A(t)$ geht demgemäß aus $A(o)$ durch eine spezielle unitäre Transformation hervor — ganz analog, wie in der klassischen Dynamik die Bewegung als durch eine Folge infinitesimaler Berührungstransformationen entstanden gedacht werden kann. Der Erwartungswert \bar{A}_t von A zur Zeit t ist dann

$$\bar{A}_t = \int \psi^*(o) A(t) \psi(o) dx, \quad (10)$$

worin $\psi(o)$ die als normiert vorauszusetzende Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ bedeutet:

$$\int \psi^*(o) \psi(o) dx = 1. \quad (10')$$

[Integration über den Koordinatenraum x_1, x_2, x_3 ; die Summation über die Spinindizes ist bei der Schreibweise (10) und (10') unterdrückt.]

Bei dieser Methode des zeitabhängigen Operators spielt nun die Unterscheidung von „geraden“ und „ungeraden“ Operatoren eine grundlegende Rolle, welche an die Existenz von Zuständen mit positiver und negativer Energie beim Dirac-Elektron geknüpft ist²⁾. — Unter geradem Operator G soll verstanden werden: ein solcher, der eine Wellenfunktion ψ^+ , welche aus einem Aggregat von Eigenfunktionen mit *nur* positiver Energie besteht, wieder in eine solche überführt, und ebenso eine Wellenfunktion ψ^- aus Eigenfunktionen mit *nur* negativer Energie in eine ebensolche verwandelt. Ein ungerader Operator U führt dagegen ψ^+ in ψ^- und ψ^- in ψ^+ über; in Formeln:

$$G\psi^+ = \psi^+, \quad G\psi^- = \psi^-; \quad U\psi^+ = \psi^-, \quad U\psi^- = \psi^+. \quad (11)$$

Es ist leicht zu sehen, daß jeder beliebige Operator A *eindeutig* in einen geraden und einen ungeraden Bestandteil gespalten werden kann:

$$A = G + U. \quad (12)$$

¹⁾ E. Schrödinger, A, § 2. — ²⁾ E. Schrödinger, B, § 2.

Stellt man nämlich den Operator A durch ein Matrixfeld $A(E, E')$ dar, dessen „Elemente“ nach den Eigenwerten E, E' der Energiefunktion H geordnet sind, so zerfällt dieses in vier getrennte Gebiete I, II, III, IV, da $|E|$ bzw. $|E'|$ stets $\geq \mu_0 c^2$ ist (Fig. 1): das Matrixfeld I und III für sich allein ergibt die Darstellung von G , II und IV für sich die Darstellung von U .

Eine hinreichende, wenn auch nicht notwendige Bedingung dafür, daß ein Operator A dem geraden oder ungeraden Typus angehört, ist nun, daß es mit H kommutiert bzw. antikommutiert¹⁾:

$$HG - GH = 0; \quad HU + UH = 0. \quad (13)$$

Da die Darstellung von H im Eigensystem nur Diagonalelemente enthält, was wir symbolisch durch

$$H(E, E') = E \cdot \delta(E - E')$$

zum Ausdruck bringen können (Diracsche δ -Funktion), so ergibt sich aus (13)

$$\left. \begin{aligned} G(E, E')(E - E') &= 0; \\ U(E, E')(E + E') &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

$G(E, E')$ kann also nur für $E' = E$, $U(E, E')$ nur für $E' = -E$ nichtverschwindende Elemente besitzen, im Einklang mit unsrer Behauptung. — Somit folgt aus (9) für alle geraden bzw. ungeraden Operatoren, welche mit H kommutieren bzw. antikommutieren:

$$\text{bzw.} \quad G(t) = G(o) = \text{const} \quad (14a)$$

$$U(t) = e^{+i \frac{2Ht}{\hbar}} U(o) = U(o) e^{-i \frac{2Ht}{\hbar}}. \quad (14b)$$

Das Ergebnis (14a) ist selbstverständlich; für U ergibt sich aber nach (14b) eine universelle, augenscheinlich „periodische“ Zeitabhängigkeit des Operators mit der „Frequenz“ $2H/\hbar$.

¹⁾ Die notwendige Bedingung dafür, daß ein Operator A gerade oder ungerade ist, ist nach Schrödinger (B), daß ein *endlicher* Kommutator bzw. Antikommutator von A verschwindet. Dabei ist der erste Kommutator von A : $K_1 = HA - AH$, der zweite $K_2 = HK_1 - K_1H$ usw.; entsprechend ist der erste, zweite usw. Antikommutator von A definiert. — Eine allgemeine analytische Vorschrift, einen Operator in seinen geraden und ungeraden Anteil zu spalten, wird von W. Pauli, Handb. d. Phys. XXIV/1, S. 229, angegeben; für die Berechnung der Erwartungswerte ist jedoch eine derartige Zerlegung nicht erforderlich; vgl. das folgende.

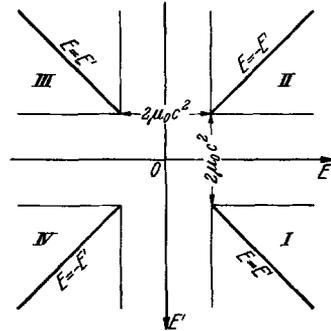


Fig. 1. Matrixfeld $A(E, E')$ für einen beliebigen Operator $A = G + U$. Die Diagonalen $E = E'$ bzw. $E = -E'$ entsprechen der Darstellung eines mit H kommutierenden bzw. antikommutierenden Operators. (Die Stellen im Innern des zentralen Kreuzes mit der Balkenbreite $2\mu_0 c^2$ sind bedeutungslos.)

Die in der Einleitung erwähnte „Zitterbewegung“ der Lagekoordinaten x_k des Dirac-Elektrons beruht nun darauf, daß sich von x_k ein Anteil (im folgenden ξ_k) vom ungeraden Typus abspalten läßt, welcher mit H antikommutiert; demgemäß ist dessen Zeitabhängigkeit von der Art (14b). Die Überlegungen dieses Abschnittes zeigen aber, daß jede dynamische Variable eine entsprechende Zitterbewegung ausführt, welche einen mit H antikommutativen Bestandteil besitzt, d. h. im allgemeinen jede, welche keine Konstante der Bewegung ist. Um aber die Beschaffenheiten dieser Zitterbewegung genauer zu erkennen, ist es aufschlußreich, vom Operator zu dessen Erwartungswert überzugehen. Dies soll nunmehr in allgemeiner Weise geschehen.

2. Wir nehmen für das folgende an, daß U hermitisch ist und mit H antikommutiert (welche beiden Bedingungen bei allen im folgenden zu betrachtenden Operatoren erfüllt sind). — Nun ist zunächst zu bemerken, daß der Erwartungswert von U immer dann verschwindet, wenn U auf eine „rein positive“ (ψ^+) oder „rein negative“ Wellenfunktion (ψ^-) angewandt wird, da nach (11) $U\psi$ dann den entgegengesetzten Charakter wie ψ besitzt und Wellenfunktionen ψ^+ und ψ^- zueinander orthogonal sind. Einen von Null verschiedenen zeitabhängigen Erwartungswert kann U daher nur für eine „gemischte“ Wellenfunktion $\psi = \psi^+ + \psi^-$ besitzen.

Da sich die Eigenfunktionen des kräftefrei bewegten Teilchens durch

$$a_{\varrho}^{\pm}(p_1, p_2, p_3) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x})}$$

darstellen lassen, worin \vec{p} (p_1, p_2, p_3) einen Eigenvektor des Impulses bedeutet und die Amplituden a_{ϱ}^+ zu einem Zustand positiver, die Amplituden a_{ϱ}^- zu einem Zustand negativer Energie gehören sollen ($\varrho = 1, 2, 3, 4$), setzen wir im allgemeinen Überlagerungsfall:

$$\psi_{\varrho}(x) = \int \{a_{\varrho}^+(p) + a_{\varrho}^-(p)\} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x})} dp, \quad (15)$$

worin x und p je ein Wertetripel x_1, x_2, x_3 bzw. p_1, p_2, p_3 bedeuten und die Integration über den ganzen Impulsraum zu erstrecken ist ($dp = dp_1 dp_2 dp_3$). Mit der Abkürzung

$$\psi(p) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (16)$$

wird gemäß (10) der Erwartungswert \bar{U}_{ϱ} :

$$\bar{U}_{\varrho} = \sum_{\varrho} \iiint \{a_{\varrho}^{+*}(p) + a_{\varrho}^{-*}(p)\} \psi^*(p) dp \cdot U \{a_{\varrho}^+(p') + a_{\varrho}^-(p')\} \psi(p') dp' dx. \quad (17)$$

Nun ist, da U ungerade,

$$\sum_{\varrho} \int \alpha_{\varrho}^{+*}(p) \psi^*(p) U \alpha_{\varrho}^+(p') \psi(p') dx = \sum_{\varrho} \int \alpha_{\varrho}^{-*}(p) \psi^*(p) U \alpha_{\varrho}^-(p') \psi(p') dx = 0$$

und wegen der Hermitizität von U , vgl. (16):

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho} \int \alpha_{\varrho}^{-*}(p) \psi^*(p) U \alpha_{\varrho}^+(p') \psi(p') dx \\ = \left[\sum_{\varrho} \int \alpha_{\varrho}^{+*}(p') \psi(p') U \alpha_{\varrho}^-(p) \psi(p) dx \right]^*. \end{aligned}$$

Daher wird (17):

$$\bar{U}_t = \sum_{\varrho} \iiint \alpha_{\varrho}^{+*}(p) \psi^*(p) dp U \alpha_{\varrho}^-(p') \psi(p') dp' dx + \text{konj. Gl.} \quad (17')$$

Berücksichtigen wir nunmehr (14b) (Schiefvertauschbarkeit von U mit H), sowie die Tatsache, daß $\alpha_{\varrho}^-(p') \psi(p')$ Eigenfunktion von H mit dem Eigenwert $-\varepsilon(p')$ ist, wenn die Eigenwerte von H durch

$$E = \pm c \sqrt{\mu_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \pm \varepsilon(p)$$

bezeichnet werden, so wird (17'):

$$\bar{U}_t = \sum_{\varrho} \iiint \alpha_{\varrho}^{+*}(p) \psi^*(p) dp U(o) \alpha_{\varrho}^-(p') \psi(p') e^{\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon(p')t} dp' dx + \left. \begin{array}{l} \\ + \text{konj. Gl.} \end{array} \right\} \quad (17'')$$

Da der Operator $U(o)$ auf die Spinvariable ϱ einwirkt, läßt er sich durch eine Matrix $U_{\varrho\varrho'}^0$ darstellen, so daß

$$\bar{U}_t = \sum_{\varrho} \sum_{\varrho'} \iiint \alpha_{\varrho}^{+*}(p) \psi^*(p) dp U_{\varrho\varrho'}^0 \alpha_{\varrho'}^-(p') \psi(p') e^{\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon(p')t} dp' dx + \left. \begin{array}{l} \\ + \text{konj. Gl.} \end{array} \right\} \quad (17''')$$

An dieser Stelle wollen wir die Annahme machen, daß der Operator U nur von den Größen α_x und P_k abhängt (nicht von den x_k)¹⁾ — eine Annahme, welche bei allen im folgenden zu betrachtenden speziellen Operatoren U erfüllt sein wird. Dann lassen sich wegen der Orthogonalitätsrelation

$$\int \psi^*(p) \psi(p') dx = (2\pi\hbar)^3 \cdot \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_3 - p'_3) \quad (16')$$

1) Genauer: In Form einer Summe von Potenzprodukten

$$\prod_x \alpha_x^{n_x} \cdot \prod_k P_k^{m_k},$$

deren Matrixelemente durch

$$\left(\prod_x \alpha_x^{n_x} \right)_{\varrho\varrho'} \cdot \prod_k p_k'^{m_k} \delta(p_k' - p_k'')$$

dargestellt werden (p -Darstellung). Bei Einführung dieser Darstellung an Stelle von $U_{\varrho\varrho'}^0$ in (17''') ist eine weitere Integration nach p'' erforderlich. (Man hat dabei in dem Teil des Integranden von (17'''), der auf $U_{\varrho\varrho'}^0$ folgt, p'' statt p' zu schreiben).

die Integrationen nach x und p' in (17''') unmittelbar ausführen. Man erhält so¹⁾:

$$\bar{U}_t = (2\pi\hbar)^3 \sum_{\varrho} \sum_{\varrho'} \int a_{\varrho}^{+*}(p) U_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^-(p) e^{\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon(p)t} dp + \text{konj. Gl.}, \quad (18)$$

wobei sich die Abhängigkeit der Matrixelemente $U_{\varrho\varrho'}^0(p)$ von den p_k ergibt, wenn man in U jedes P_k durch seinen Eigenwert p_k ersetzt.

Eine analoge Überlegung führt bei dem geraden Anteil G zu dem Ergebnis:

$$\bar{G} = (2\pi\hbar)^3 \sum_{\varrho} \sum_{\varrho'} \int \{a_{\varrho}^{+*}(p) G_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^+(p) + a_{\varrho}^{-*}(p) G_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^-(p)\} dp, \quad (19)$$

wobei $G_{\varrho\varrho'}^0(p)$ in entsprechender Weise wie $U_{\varrho\varrho'}^0(p)$ definiert ist (auch hier soll vorausgesetzt werden, daß G nur von α_x und P_k abhängt).

Die Ausdrücke (18) und (19) lassen eine Erweiterung zu, von der wir im folgenden häufig Gebrauch machen werden. Sei ein Operator $A = G + U$ gegeben, dessen Anteile G und U nur von α_x und P_k abhängen, so lassen sich die Erwartungswerte \bar{G} und \bar{U}_t in der Weise berechnen, daß man das Schema der Formeln (18) und (19) einfach auf A statt auf G bzw. U anwendet²⁾:

$$\bar{G} = \bar{A}^g = (2\pi\hbar)^3 \sum_{\varrho} \sum_{\varrho'} \int \{a_{\varrho}^{+*}(p) A_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^+(p) + a_{\varrho}^{-*}(p) A_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^-(p)\} dp, \quad (20a)$$

$$\bar{U}_t = \bar{A}^u = (2\pi\hbar)^3 \sum_{\varrho} \sum_{\varrho'} \int a_{\varrho}^{+*}(p) A_{\varrho\varrho'}^0(p) a_{\varrho'}^-(p) e^{\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon(p)t} dp + \text{konj. Gl.}, \quad (20b)$$

(mit der entsprechenden Bedeutung der Matrizen $A_{\varrho\varrho'}^0$, wie $G_{\varrho\varrho'}^0$ bzw. $U_{\varrho\varrho'}^0$). Wir wollen die so gebildeten Erwartungswerte von A kurz als *geraden und ungeraden Erwartungswert* bezeichnen. Falls also A nur von den α_x und P_k abhängt (nicht dagegen von den x_k), lassen sich diese Erwartungswerte ohne algebraische Zerlegung von A in $G + U$ berechnen³⁾.

An den Ausdrücken (18) und (20b) lassen sich nun die allgemeinen Züge der Zitterbewegung ohne weiteres ablesen. Zunächst ist zu sehen,

¹⁾ Genauer: durch Integration nach x , p' und p'' , vgl. Anm. 1 S. 161. — ²⁾ Es gilt ja allgemein für $A = G + U$ mit $\psi = \psi^+ + \psi^-$:

$$\int \psi^* G \psi dx = \int (\psi^{+*} G \psi^+ + \psi^{-*} G \psi^-) dx = \int (\psi^{+*} A \psi^+ + \psi^{-*} A \psi^-) dx,$$

$$\int \psi^* U \psi dx = \int (\psi^{+*} U \psi^- + \psi^{-*} U \psi^+) dx = \int (\psi^{+*} A \psi^- + \psi^{-*} A \psi^+) dx,$$

woraus die Behauptung unmittelbar hervorgeht. — ³⁾ Es ist leicht zu sehen, daß für Operatoren A , welche nur von α_x und P_k (in der Form von Potenzprodukten) abhängen, die Bedingungen (13) stets erfüllt sind und daher (14a) und (14b) gilt.

daß \bar{U}_t bzw. \bar{A}_t^u immer dann verschwindet, wenn sich nicht die positiven und negativen Spektralbereiche $a^+(p) \neq 0$ und $a^-(p) \neq 0$ *wenigstens teilweise* überdecken¹⁾. Ferner ist die Zeitabhängigkeit von U_t im allgemeinen Falle ersichtlich *fast-periodisch*, da ja über den Zeitfaktor des Integranden nach p integriert wird. Nur in dem *Grenzfall*, daß es sich um die Überlagerung zweier *monochromatischer Wellensysteme entgegengesetzt gleicher Energie* handelt, wird \bar{U}_t *streng periodisch*, und zwar mit derjenigen Frequenz, welche dem *doppelten* Betrage der Energie der Wellensysteme entspricht. In jedem Einzelfall wird die Form der Zitterbewegung aber je nach der Zusammensetzung der Wellengruppe noch sehr verschieden ausfallen können.

3. Wir wollen uns jetzt der Anwendung dieser allgemeinen Überlegungen auf den durchzuführenden Vergleich zwischen Dirac-Elektron und Modell zuwenden. Man wird zunächst erwarten dürfen, daß allgemein eine Analogie zwischen den analytischen Ausdrücken, welche die dynamischen Zustandsgrößen des Modells kennzeichnen, und den entsprechenden Operatoren des quantenmechanischen Systems besteht, in ähnlicher Weise, wie sich die dynamischen Variablen vieler Systeme unmittelbar in die Quantenmechanik übertragen lassen (z. B. Bohrsches Atommodell). Geht man jedoch von den Operatoren zu deren Erwartungswerte über, so stößt man zunächst auf die grundsätzliche Schwierigkeit, daß der Begriff einer bestimmten physikalischen Situation, wie er in der Quantenmechanik durch die Wellenfunktion ψ repräsentiert wird, der klassischen Dynamik fremd ist. Man wird daher von einem Modell nur erwarten dürfen, daß es die charakteristischen Züge von bestimmten *typischen* Situationen in einer gewissen Annäherung richtig wiedergibt. Hieraus ergibt sich für die folgende Untersuchung an allgemeinen Gesichtspunkten:

Eine jede dynamische Veränderliche $A^*(t)$ unseres Modells²⁾ — Koordinate, Eigenimpulsmoment, Terme der Energiefunktion — ergibt sich bei einem beliebig translatorisch bewegten Teilchen als eine Zeitfunktion, von welcher sich wegen der inneren rotatorischen Bewegung des Teilchens ein gewisser periodisch schwankender Anteil abspalten läßt. Man darf vermuten, daß diese Spaltung von $A^*(t)$ ihr quantenmechanisches Analogon in der erwähnten Spaltung des korrespondierenden Operators A in einen geraden und einen ungeraden Anteil besitzt, und wird daher versuchen, diese Abtrennung in möglichst genauer Analogie hierzu vorzunehmen. Die Abtrennung des periodisch schwankenden Anteils von $A^*(t)$ wird nun

¹⁾ Vgl. hierzu L. de Broglie, L'électron magnétique. Paris 1934, S. 299.
 — ²⁾ Die auf das Modell bezüglichen Größen sind im folgenden durch * gekennzeichnet.

in den untersuchten Fällen dadurch *eindeutig*, daß die Korrespondenz mit dem geraden und ungeraden Teil von A tatsächlich eine sehr genaue ist. Als *Eindeutigkeitskriterium* soll hierbei gelten, daß der nach Abspaltung des periodischen Anteils von A^* übrigbleibende „gerade“ Teil G^* mit dem korrespondierenden Erwartungswert \bar{G} für das Dirac-Elektron für eine Wellengruppe mit hinreichend scharf definiertem Impuls und scharf definierter (positiver) Energie *exakt* übereinstimmt. Eine solche Aufteilung von A^* wird aber andererseits schon durch die Form des korrespondierenden Operators A nahegelegt und läßt sich daher in jedem Falle völlig zwanglos durchführen¹⁾.

Da andererseits die Zeitfunktion \bar{U}_t des Erwartungswertes von $U(t)$, wie wir gesehen haben, ganz wesentlich von der zugrundegelegten Wellenfunktion ψ abhängt, hat es im allgemeinen keinen eindeutigen Sinn, von einer „Amplitude“ von $U(t)$ zu sprechen. Man wird sich hierbei in der Weise helfen können, daß man von $U(t)$ zu dessen Quadrat U^2 übergeht, das gerade und zeitunabhängig ist; die Berechnung von U^2 für eine Wellengruppe mit scharfem Impuls gibt dann offenbar ein Maß für die „Amplitude“ von $U(t)$ ab. Aber U^2 enthüllt noch nicht die Einzelheiten des Verhaltens von \bar{U}_t (charakteristischerweise ist ja die Zeitabhängigkeit von $U(t)$ bei der Bildung von U^2 herausgefallen, wozu beim klassischen Modell kein Analogon existiert!). Man wird daher beim Vergleich mit der modellmäßigen Größe $U^*(t)$ eine Wellenfunktion zu wählen haben, welche zu einem möglichst repräsentativen Erwartungswert \bar{U}_t führt. Als solchen wollen wir den oben betrachteten zeitlich streng periodischen Grenzfall ansehen, welcher bei der Überlagerung von zwei monochromatischen Wellenzügen mit *gleichem Impuls und entgegengesetzt gleicher Energie* entsteht. Mit dieser Festsetzung ist die Wahl der Wellenfunktion allerdings noch nicht eindeutig festgelegt und wir werden später eine noch engere Auswahl treffen müssen (Abschnitt 2).

Tatsächlich zeigt sich nun, daß sich für eine geeignet gewählte spezielle Wellenfunktion in den untersuchten wichtigsten Spezialfällen bei *kleiner*

¹⁾ Dagegen dürfte es von vornherein nicht als gerechtfertigt erscheinen, die Abtrennung des periodisch schwankenden Anteils U^* von A^* in solcher Weise vorzunehmen, daß dessen *zeitlicher* Mittelwert verschwindet, da hierzu in der Quantendynamik kein genaues Analogon existiert. Da \bar{U}_t im allgemeinen nur *fast-periodisch* ist, so braucht der zeitliche Mittelwert von \bar{U}_t nicht zu verschwinden (die Folge der Integrationen nach p und t ist im allgemeinen nicht beliebig). Die *Operatorschreibweise* (14b) erweckt nur den *Anschein*, als ob der „zeitliche Mittelwert von $U(t)$ “ verschwinden müßte.

Teilchengeschwindigkeit v' (genauer bis zu den in $\beta' = v'/c$ linearen Gliedern)¹⁾ genaue Übereinstimmung im Verhalten von \bar{U}_t und der modellmäßigen Größe $U^*(t)$ ergibt [vorausgesetzt, daß man beim Modell zu dem in der Einleitung erwähnten Grenzfall übergeht, daß die innere (Mikro-)Geschwindigkeit des Teilchens die Lichtgeschwindigkeit erreicht]. Merkbliche Abweichungen treten erst bei größeren Teilchengeschwindigkeiten auf und nehmen mit wachsender Teilchengeschwindigkeit zu, bis endlich bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit die Korrespondenz mehr und mehr verlorengeht²⁾.

2. Makro- und Mikrobewegung. Koordinatenschwankung.

1. Die Breitsche Beziehung (4)

$$\frac{dx_k}{dt} = c\alpha_k \quad (4)$$

läßt sich nach Schrödinger integrieren auf Grund der Bemerkung, daß zwar nicht die α_k selbst, wohl aber, wie man unmittelbar bestätigt, die Größen

$$\eta_k = \alpha_k - cH^{-1}P_k \quad (21)$$

mit H schiefvertauschbar sind:

$$H\eta_k + \eta_k H = 0. \quad (21')$$

Daher ist

$$\eta_k = \eta_k^0 e^{-i\frac{2Ht}{\hbar}} = e^{+i\frac{2Ht}{\hbar}} \eta_k^0, \quad (22)$$

wobei η_k^0 den „Anfangswert“ des Operators η_k zur Zeit $t = 0$ bedeutet (Integrationskonstante). Durch Einsetzen von (22) in (21) ergibt sich hieraus durch nochmalige Integration:

$$x_k = a_k + c^2 H^{-1} P_k t - \frac{c\hbar}{2i} \eta_k^0 H^{-1} e^{-i\frac{2Ht}{\hbar}} \quad (23)$$

mit a_k als weiterer Integrationskonstanten. Es ist bezeichnend, daß in (23) keine Integrationskonstante auftritt, welche dem Impuls des Teilchens entspräche. Vielmehr wird der Erwartungswert des Impulses zur Zeit $t = 0$ durch die anfängliche Wellenfunktion $\psi = \psi(0)$ bestimmt.

¹⁾ Die „Teilchengeschwindigkeit“ v' ist die zum Erwartungswert des Impulses p' gehörige Geschwindigkeit (der Erwartungswert der Makrogeschwindigkeit wäre bei der angenommenen speziellen Wellenfunktion gleich 0, vgl. Abschnitt 2). — ²⁾ Man möchte vielleicht geneigt sein, in dem mit wachsender Teilchengeschwindigkeit sich bemerkbar machenden Mangel an Korrespondenz einen Widerspruch gegen das Relativitätspostulat zu erblicken; vgl. jedoch die Schlußbemerkungen von Abschnitt 2.

Nach (23) läßt sich die Koordinate x_k somit in zwei Bestandteile von wesentlich verschiedenem Charakter zerlegen:

$$x_k = \tilde{x}_k + \xi_k; \quad (24)$$

$$\tilde{x}_k = a_k + c^2 H^{-1} P_k t, \quad (24a)$$

$$\xi_k = -\frac{c\hbar}{2i} \eta_k^0 H^{-1} e^{-i \frac{2Ht}{\hbar}} = -\frac{c\hbar}{2i} \eta_k H^{-1} = \frac{c\hbar}{2i} H^{-1} \eta_k. \quad (24b)$$

Diese Zerlegung entspricht der Spaltung von x_k in einen geraden und einen ungeraden Anteil. Der gerade Teil¹⁾ \tilde{x}_k wächst linear in der Zeit an und zwar mit der Makrogeschwindigkeit $\tilde{v}_k = c^2 H^{-1} P_k$ des Teilchens. Man ersieht dies am einfachsten aus der ursprünglichen Definition (10) des Erwartungswertes; hiernach erhält man für eine Welle mit scharf definiertem Ausbreitungsvektor (Impuls) und positiver Energie:

$$\overline{c^2 H^{-1} P_k} = c^2 \frac{\sqrt{1-\beta'^2}}{\mu_0 c^2} \cdot \frac{\mu_0 v'_k}{\sqrt{1-\beta'^2}} \int \psi^* \psi dx = v'_k \quad (25)$$

und entsprechend

$$\overline{x_k}^g = a'_k + v'_k t. \quad (25')$$

Die Berechnung des im Grenzfall streng periodischen Erwartungswertes $\overline{x_k}^u = \overline{\xi_k}$ erfordert jedoch eine besondere Untersuchung.

Zunächst läßt sich die „Amplitude“ der Schwankung ξ_k abschätzen, indem man von ξ_k zu dessen Quadrat ξ_k^2 übergeht, das gerade ist, und hierfür den Erwartungswert mit der Wellenfunktion des ruhenden Teilchens berechnet. Man erhält so, da für die Ruhbewegung η_k durch α_k ersetzt werden kann, aus (24b), (21') und (3b) unmittelbar:

$$\overline{\xi_k^2} = \left(\frac{c\hbar}{2i}\right)^2 \overline{\eta_k H^{-1} \eta_k H^{-1}}^g = \left(\frac{c\hbar}{2}\right)^2 \overline{\alpha_k^2 H^{-2}}^g = \left(\frac{\hbar}{2\mu_0 c}\right)^2. \quad (26)$$

Die zugehörige Frequenz ist nach (22) bzw. (24b)

$$\omega = \frac{2E_0}{\hbar} = \frac{2\mu_0 c^2}{\hbar}, \quad (26')$$

wenn $E_0 = \mu_0 c^2$ die Ruhenergie des Teilchens ist.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Ausdrücke (26) und (26') für Frequenz und Erwartungswert des Amplitudenquadrates der Koordinatenschwankung mit den korrespondierenden Ausdrücken des Modells genau

¹⁾ Man bestätigt leicht, daß der *zweite* Kommutator von \tilde{x}_k verschwindet, \tilde{x}_k nach der Definition von Anm. 1, S. 159 also gerade ist. Der *erste* Kommutator von \tilde{x}_k ist bis auf den Faktor \hbar/i die makroskopische Geschwindigkeitskomponente \tilde{v}_k des Teilchens.

übereinstimmen¹⁾. In der Tat ist nach I, (91) der Betrag des Impulsmoments $\mu_0 c R$, wenn R den Radius der Kreisbahn bezeichnet. Für ein Teilchen mit quantisiertem Impulsmoment vom Betrage $\frac{1}{2} \hbar$ wird daher:

$$R = \frac{\hbar}{2\mu_0 c}, \quad \omega = \frac{c}{R} = \frac{2\mu_0 c^2}{\hbar}. \quad (27)$$

2. Wir wollen nunmehr die genauere Diskussion des korrespondenzmäßigen Zusammenhanges zwischen Dirac-Elektron und Modell an die Formeln (20a) und (20b) für den geraden und ungeraden Erwartungswert eines Operators anschließen. Hierbei wird die Wahl einer zweckmäßig dem Modell angepaßten Lösung der Wellengleichungen entscheidend sein.

Wir notieren zunächst die im folgenden benötigten Lösungen der Diracschen Wellengleichung. Machen wir den Ansatz *ebener Wellen*:

$$\psi_0(x, t) = a_0 \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 - Et)} \quad (28)$$

und benutzen wir für die Matrizen α_x die gewöhnliche Darstellung:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} & & & i \\ & & -i & \\ & i & & \\ -i & & & \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

so gehört zu der Dirac-Gleichung (1), (2) in bekannter Weise ein Gleichungssystem für die Amplituden a_0 , welches dann und nur dann von Null verschiedene Lösungen besitzt, wenn der Energieparameter einen der Eigenwerte

$$E = \pm c \sqrt{\mu_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \pm \varepsilon$$

annimmt. Von den Koeffizienten a_0 sind je zwei frei verfügbar (im folgenden durch große Buchstaben bezeichnet), die anderen beiden durch diese bestimmt. Es ergeben sich die Fälle:

a) *positive Energie*: $E > 0$ ($\varepsilon = E$)

$$\begin{aligned} a_1 &= A, & a_2 &= B; \\ a_3 &= \frac{p_3 A + (p_1 + i p_2) B}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}, & a_4 &= \frac{(p_1 - i p_2) A - p_3 B}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}; \end{aligned} \quad (30a)$$

¹⁾ Es ist dabei allerdings zu beachten, daß sich der Erwartungswert (26) für ξ_k^2 als unabhängig vom Index k herausstellt. Dieser Zug kann natürlich nicht durch das Modell anschaulich gedeutet werden. Vgl. jedoch im folgenden die Verschärfung der Korrespondenz beim Vergleich der *ungeraden* Erwartungswerte $\bar{\xi}_k$ und $c \bar{x}_k^u$ mit den Größen des Modells.

b) *negative Energie*: $E < 0$ ($\varepsilon = -E$)

$$a_3 = C, \quad a_4 = D;$$

$$a_1 = -\frac{p_3 C + (p_1 + i p_2) D}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}, \quad a_2 = -\frac{(p_1 - i p_2) C - p_3 D}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}. \quad (30b)$$

Schließlich notieren wir noch die Eigenwerte der Energie, der x_3 -Komponente des Impulsmomentes J und des magnetischen Momentes M für ein ruhendes Teilchen, für welches je nur einer der Koeffizienten A, B, C, D von Null verschieden ist:

Eigenfunktion	E	J_3	M_3
$\psi_1 (A \neq 0) \dots$	$+\mu_0 c^2$	$-\frac{1}{2}\hbar$	$+\frac{c\hbar}{2\mu_0 c}$
$\psi_2 (B \neq 0) \dots$	$+$	$+$	$-$
$\psi_3 (C \neq 0) \dots$	$-$	$-$	$-$
$\psi_4 (D \neq 0) \dots$	$-$	$+$	$+$

Wir gehen jetzt zur Bildung des *ungeraden* Erwartungswertes der Mikrogeschwindigkeit $c\vec{\alpha}$ über, welche für kleine Impulse nach (21) vorwiegend dem ungeraden Typus angehört. Allgemein ist nach (21) und (21'), da der Operator der Makrogeschwindigkeit $c^2 H^{-1} P_k$ gerade ist:

$$\overline{\alpha_k} = \overline{\eta_k}. \quad (31)$$

Die Auswahl der *speziellen Wellenfunktion* soll nunmehr derart erfolgen, daß man Lösungen der Dirac-Gleichungen positiver und negativer Energie überlagert (Abschnitt 1), welche Teilchen mit gleichem Umlaufssinn entsprechen, d. h. (bei gleichem Vorzeichen der Ladung) ein *gleichgerichtetes magnetisches Moment* besitzen. Es erweist sich nämlich, daß gerade bei dieser Wahl der Wellenfunktion eine besonders auffallende Analogie zwischen Dirac-Elektron und dem Modell des umlaufenden Massenpunktes erkennbar wird¹⁾.

¹⁾ Als Begründung für diese *spezielle* Wahl der Wellenfunktion kann etwa angeführt werden, daß man sich das klassische Modell („Pol-Dipol-Teilchen“) als aus einer positiven und negativen Masse zusammengesetzt denken kann, welche in gleichem Sinne rotieren (vgl. Teil II). Doch möchten wir auf dieses Argument kein entscheidendes Gewicht legen, da der physikalische Sinn der Überlagerung von Zuständen positiver und negativer Energie wenig klar ist; auch dürfte die Begründung in anderer Hinsicht wenig zwingend erscheinen. — Bei der Überlagerung anderer spezieller Eigenlösungen entgegengesetzt gleicher Energie erhält man z. T. recht absonderliche Ergebnisse (z. B. lineare statt zirkuläre Schwingungsformen).

Für ein makroskopisch *ruhendes* Teilchen und positiven Umlaufssinn wird die Wellenfunktion demnach durch die Überlagerung der speziellen Zustände a_q^+ und a_q^- bestimmt (vgl. Tabelle 1):

$$\left. \begin{aligned} a_q^+ &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{2}} (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0) \cdot \{\delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3)\}^{1/2}, \\ a_q^- &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{2}} (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1) \cdot \{\delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3)\}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wobei die Normierung in solcher Weise vorgenommen ist, daß

$$(2\pi\hbar)^3 \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{|a_q^+(p)|^2 + |a_q^-(p)|^2\} dp_1 dp_2 dp_3 = 1 \quad (33)$$

wird¹⁾. Hiernach ergibt sich unmittelbar aus (20b) und (32), wenn man noch beachtet, daß nur je das Element (1,4) der Matrizen α_z einen Beitrag liefert:

$$\left. \begin{aligned} \overline{c\alpha_1}^u &= \frac{1}{2} c \left(e^{i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} + e^{-i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} \right) = c \cdot \cos \frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}, \\ \overline{c\alpha_2}^u &= \frac{1}{2} c \left(i e^{i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} - i e^{-i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} \right) = -c \sin \frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}, \\ \overline{c\alpha_3}^u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34a)$$

Gleichzeitig verschwinden die Erwartungswerte vom geraden Typus:

$$\overline{c\alpha_1}^g = \overline{c\alpha_2}^g = \overline{c\alpha_3}^g = 0. \quad (34b)$$

Die Erwartungswerte (34a) der Mikrogeschwindigkeit $c\vec{\alpha}$ korrespondieren demnach für die spezielle Wellenfunktion (28), (32) einer in der (x_1, x_2) -Ebene erfolgenden Kreisbewegung eines Teilchens, welches in allen Punkten der Bahn Lichtgeschwindigkeit besitzt.

Wir wollen in entsprechender Weise auch die Erwartungswerte für den ungeraden Operator der Koordinatenschwankung ξ_k explizit berechnen. Da wir bei der Ruhbewegung η_k durch α_k und H durch $\mu_0 c^2 \alpha_4$ ersetzen dürfen, haben wir nach (24b):

$$\xi_k = \frac{c\hbar}{2i} H^{-1} \eta_k \rightarrow \frac{c\hbar}{2i} \frac{\alpha_4^{-1}}{\mu_0 c^2} \alpha_k = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \frac{\alpha_4 \alpha_k}{i}. \quad (35)$$

¹⁾ Die Normierungsbedingung (33) ist gleichwertig mit der Normierung (10') der ψ -Funktion, wie man bei Beachtung von (15), (16) und (16') leicht bestätigt.

Nun ist gemäß der Matrizendarstellung (29):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 \alpha_1 &= i \begin{pmatrix} & & -i \\ & i & \\ i & & \end{pmatrix}, & \alpha_4 \alpha_2 &= i \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}, \\ \alpha_4 \alpha_3 &= i \begin{pmatrix} & & -i \\ & & \\ i & & \\ & -i & \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Somit wird nach (24b), (32) und (35):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \cdot \frac{1}{2} (-i e^{i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} + i e^{-i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}}) = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \cdot \sin \frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}, \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \cdot \frac{1}{2} (e^{i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}} + e^{-i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}}) = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \cdot \cos \frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}, \\ \bar{\xi}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Diese Erwartungswerte korrespondieren wiederum genau dem Modell. Offensichtlich gilt, vgl. (34a), (34b) und (37):

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \frac{d\bar{\xi}_k}{dt} = \frac{u}{c\alpha_k}, \quad \frac{d\bar{x}_k^g}{dt} = 0. \quad (38)$$

Die Breitsche Beziehung (4) ist hierbei in vollem Einklang mit dem Modell.

3. Es soll hieran anschließend analog die Koordinatenschwankung beim *translatorisch bewegten* Teilchen untersucht werden. Man findet nach einfacher Rechnung für das Quadrat von ξ_k^2 :

$$\xi_k^2 = \left(\frac{\hbar c}{2}\right)^2 H^{-2} (1 - c^2 H^{-2} P_k^2). \quad (39)$$

Der zugehörige (gerade) Erwartungswert für eine Welle mit scharf definiertem Impuls wird

$$\bar{\xi}_k^2 = \left(\frac{\hbar}{2\mu_0 c}\right)^2 (1 - \beta'^2) (1 - \beta_k'^2), \quad (39')$$

wenn $\beta' = v'/c$ und $\beta_k' = v_k'/c$ die makroskopische Geschwindigkeit bzw. Geschwindigkeitskomponente des Teilchens ist. Offensichtlich nimmt $\bar{\xi}_k^2$ mit wachsender translatorischer Geschwindigkeit des Teilchens nach *allen* Raumrichtungen hin ab, am stärksten allerdings in Richtung der Translation selbst.

Um die bei der Translation auftretenden Verhältnisse genauer zu übersehen, betrachten wir wieder die *ungeraden* Erwartungswerte von α_k

¹⁾ E. Schrödinger, A, Gl. (18) ff.

bzw. die Erwartungswerte von ξ_k . Wir überlagern dementsprechend wieder Zustände positiver und negativer Energie mit scharf definiertem Impuls und gleichem (positiven) Umlaufsinn in der (x_1, x_2) -Ebene. Erfolge die Translation zunächst in der x_1 -Richtung ($p_1 \neq 0$), so können wir nach (30a) und (30b) analog (32) setzen:

$$\left. \begin{aligned} a_q^+ &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{N}} \left(1, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{p_1}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c} \right) \cdot \{ \delta(p_1 - p_1') \delta(p_2) \delta(p_3) \}^{1/2}, \\ a_q^- &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{N}} \left(\frac{-p_1}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}, \quad 0, \quad 0, \quad 1 \right) \cdot \{ \delta(p_1 - p_1') \delta(p_2) \delta(p_3) \}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

wobei wegen (33)

$$N = 2 \left(1 + \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2} \right), \quad \varepsilon' = c \sqrt{\mu_0^2 c^2 + p_1'^2}. \quad (40')$$

Hiermit folgt aus der Matrizendarstellung (29):

$$\begin{aligned} \overline{c\alpha_1}^u &= \frac{1}{N} \cdot c \left(1 - \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2} \right) e^{i \frac{2\varepsilon t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.}, \\ \overline{c\alpha_2}^u &= \frac{1}{N} \cdot c i \left(1 + \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2} \right) e^{i \frac{2\varepsilon t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.}, \\ \overline{c\alpha_3}^u &= 0. \end{aligned}$$

Nach einfacher Zwischenrechnung wird

$$\frac{1 - \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2}}{1 + \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2}} = \sqrt{1 - \beta'^2}, \quad (41)$$

wenn β' die zu p_1' gehörige, durch c dividierte Geschwindigkeit ist. Somit erhält man:

$$\overline{c\alpha_1}^u = c \sqrt{1 - \beta'^2} \cdot \cos \frac{2\varepsilon' t}{\hbar}, \quad \overline{c\alpha_2}^u = c \cdot \sin \frac{2\varepsilon' t}{\hbar}, \quad \overline{c\alpha_3}^u = 0. \quad (42)$$

Die Translation nach der x_2 -Richtung ergibt nichts Neues (bis auf den selbstverständlichen Unterschied, daß $\sqrt{1 - \beta'^2}$ als Faktor bei $\overline{c\alpha_2^u}$ statt bei $\overline{c\alpha_1^u}$ auftritt). Dagegen ist die Translation nach der x_3 -Richtung ($p_3 \neq 0$), welche also „senkrecht zur Bahnebene“ erfolgt, von Interesse. Wir setzen gemäß (30a) und (30b):

$$\left. \begin{aligned} a_e^+ &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{N}} \left(1, \quad 0, \quad \frac{p_3}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}, \quad 0 \right) \cdot \{ \delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3 - p_3') \}^{1/2}, \\ a_e^- &= \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2}}{\sqrt{N}} \left(0, \quad \frac{p_3}{\frac{\varepsilon}{c} + \mu_0 c}, \quad 0, \quad 1 \right) \cdot \{ \delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3 - p_3') \}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

mit der entsprechenden Bedeutung von N und ε' wie in (40'). Aus der Matrizendarstellung (29) folgt dann, da sich der Normierungsfaktor N jedesmal heraushebt:

$$\overline{c\alpha_1^u} = c \cos \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{c\alpha_2^u} = -c \sin \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{c\alpha_3^u} = 0. \quad (44)$$

Die Amplituden der ungeraden Erwartungswerte $\overline{c\alpha_k^u}$ ($k = 1, 2, 3$) werden also durch die Translation senkrecht zur Bahnebene nicht beeinflusst.

Die explizite Berechnung der Erwartungswerte $\overline{\xi_k}$ kann hier unterbleiben, da nach (4) und (24) ganz allgemein

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \overline{c\alpha_k^u} \quad (38')$$

gilt [vgl. (38)]. Es wird damit bei Benutzung der speziellen Wellenfunktionen (40) und (43) für die Translation parallel x_1 :

$$\overline{\xi_1} = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} (1 - \beta'^2) \sin \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{\xi_2} = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \sqrt{1 - \beta'^2} \cos \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{\xi_3} = 0, \quad (45 \text{ a})$$

und parallel x_3 :

$$\overline{\xi_1} = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \sqrt{1 - \beta'^2} \sin \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{\xi_2} = \frac{\hbar}{2\mu_0 c} \sqrt{1 - \beta'^2} \cos \frac{2\varepsilon't}{\hbar}, \quad \overline{\xi_3} = 0. \quad (45 \text{ b})$$

[vgl. hierzu die geraden Erwartungswerte $\overline{\xi_k^2}$, Gleichung (39')].

Der gerade Erwartungswert $\frac{d\alpha_k^g}{dt}$ verschwindet auch im Falle der Translation, da die Zustände positiver und negativer Energie entgegengesetzt gleiche Beiträge liefern (bei den Zuständen negativer Energie sind Impuls und Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet).

4. Es ist von besonderem Interesse, auf die Unterschiede gegenüber dem klassischen Modell hinzuweisen. Gemäß (45a) und (45b) ist die Frequenz

der Koordinatenschwankung beim Dirac-Elektron $2 \varepsilon' / \hbar$, sie ist also gegenüber einem ruhenden Teilchen um den Faktor $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ vergrößert¹⁾. Andererseits ist aber das anschauliche Modell mit einer translatorisch bewegten Uhr vergleichbar und demgemäß ist seine Frequenz um den Faktor $\sqrt{1-\beta'^2}$ gegenüber einem ruhenden klassischen Teilchen verlangsamt (Zeitdilatation). Offensichtlich hängt diese Diskrepanz unmittelbar mit dem fundamentalen Dualismus Welle-Korpuskel zusammen und kann durch keine Abänderung des Modells beseitigt werden. Ebenso besitzt das Dirac-Elektron nach (45a) und (45b) auch keine „normale“ Lorentz-Kontraktion wie das anschauliche Kreisbahnmodell. Beiderlei Abweichungen liegen in der Größenordnung β'^2 und man gelangt somit zu der Feststellung, daß der korrespondenzmäßige Zusammenhang (im engeren Sinne) zwischen Dirac-Elektron und anschaulichem Modell mindestens bei den quadratischen Gliedern in β' verlorengeht.

Es wird andererseits am Beispiel der Koordinatenschwankung und der Geschwindigkeit besonders deutlich, daß man die charakteristischen Grenzfälle der Bewegung, welche Grenzfällen des geraden und ungeraden Erwartungswertes entsprechen, nicht gleichzeitig, sondern nur sukzessive ins Auge fassen kann. So ergibt sich bei der Bildung des geraden Erwartungswertes von x_k eine Bewegung, welche geradlinig und gleichförmig erfolgt und keinerlei Schwankungen zeigt. Die „Zitterbewegung“ zeigt sich dagegen bei der Bildung des ungeraden Erwartungswertes und nimmt für einen speziellen Grenzfall gerade denjenigen Charakter an, welcher der anschaulichen Vorstellung des umlaufenden Teilchens entspricht. — In dieser Hinsicht unterscheidet sich das Dirac-Elektron notwendig grundsätzlich von jedem anschaulichen Modell, bei welchem sich Translation und innere Rotation gleichzeitig unterscheiden lassen. Man wird es daher grundsätzlich auch nicht als einen Mangel des speziellen Modells anzusehen haben, wenn sich bei größeren Translationsgeschwindigkeiten Abweichungen zwischen den Erwartungswerten für das Dirac-Elektron und den korrespondierenden Größen des Modells herausstellen. Wir werden uns daher hier wie im folgenden mit dem Nachweis zu begnügen haben, daß sich die Eigenschaften des Modells den *getrennt* in Erscheinung tretenden Zügen der makroskopischen und mikroskopischen Bewegung des Dirac-Elektrons in gewissen Grenzfällen (spezielle Eigenfunktionen, langsame makroskopische Bewegung) asymptotisch annähern.

¹⁾ Man erinnere sich, daß sich bei einer de Broglie-Dirac-Welle Energie und Frequenz bei Lorentz-Transformationen gleichermaßen transformieren ($\varepsilon = h \nu$ lorentzinvariant!).

3. *Eigenimpulsmoment (Spin)*¹⁾.

1. Der Spin ist das eigentliche Charakteristikum des Dirac-Elektrons. Seine Existenz als Zusatzimpulsmoment zum Bahnimpulsmoment $[x, P]$ ergibt sich daraus, daß aus (2), (3), (8) und (29) ein Erhaltungssatz²⁾

$$J = [x, P] + \frac{\hbar}{2} s = \text{const.} \quad (46)$$

hervorgeht, wobei abkürzend

$$[\alpha, \alpha] = 2is \quad (47)$$

gesetzt worden ist. Sei

$$J_B = [x, P], \quad S = \frac{\hbar}{4i} [\alpha, \alpha] = \frac{\hbar}{2} s, \quad (48)$$

so ist J_B das Bahnimpulsmoment, S das Eigenimpulsmoment des Teilchens (Spinmoment). Aus der Definition (47) folgt ferner

$$s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, \quad [s, s] = 2is \quad (49)$$

sowie, daß die s_k die Eigenwerte ± 1 haben; daraus ergibt sich dann weiter, daß die Meßwerte der Komponenten des Spinmoments in jeder Raumrichtung $\pm \frac{1}{2} \hbar$ sind.

Bekanntlich ist bei kräftefreier translatorischer Bewegung nun keineswegs das Bahnimpulsmoment und das Spinmoment für sich konstant, sondern konstant ist nur ihre Summe $J_B + S$. Daher müssen sich die Schwankungen dieser beiden Bestandteile gegenseitig aufheben.

Die Schwankungen von J_B und S , die wir mit ΔJ_B und ΔS bezeichnen, lassen sich unmittelbar in explizierter Form angeben. Da nämlich ξ der zeitlich „periodische“ Teil von x ist, so ist³⁾

$$\Delta J_B = -\Delta S = [\xi, P]. \quad (50)$$

Damit ist die Spinschwankung unmittelbar mit der Koordinatenschwankung ξ in Zusammenhang gebracht. Das zugehörige Differentialgesetz lautet:

$$\frac{dJ_B}{dt} = -\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} [x, P] = \left[\frac{dx}{dt}, P \right] \quad (51)$$

oder auch mit Rücksicht auf (4):

$$\frac{dS}{dt} = -c[\alpha, P]. \quad (51')$$

¹⁾ In den folgenden beiden Abschnitten bedeuten die Größen x, P, s, S, \dots ohne Index stets räumliche Vektoren mit den Komponenten $x_k, P_k, s_k, S_k, \dots$ ($k = 1, 2, 3$). — ²⁾ E. Schrödinger, A, S. 424 ff. — ³⁾ A. a. O. wird Gleichung (50) durch Integration im Sinne des Operatorkalküls abgeleitet, während wir uns hier mit einer mehr anschaulichen Begründung begnügen, die den Vergleich mit dem Modell desto mehr erleichtert.

Die rechte Seite von (50) läßt sich in der Operatorschreibweise auch direkt als Zeitfunktion angeben, wenn man ξ entsprechend (24b) einsetzt und die Definition (21) von η beachtet. Man erhält so

$$\Delta S = \frac{c\hbar}{2i}[\alpha, P]H^{-1} = \frac{c\hbar}{2i}[\alpha, P]_0 H^{-1} e^{-i\frac{2Ht}{\hbar}}$$

wobei $[\alpha, P]_0$ der Anfangswert des Operators $[\alpha, P]$ ist. Als allgemeines Integral von (51') ergibt sich hieraus:

$$S = \tilde{S} + \frac{c\hbar}{2i}[\alpha, P]_0 H^{-1} e^{-i\frac{2Ht}{\hbar}}, \quad (52)$$

worin $\tilde{S} = \frac{\hbar}{2} \tilde{s}$ den konstanten Teil von S bedeutet.

Solange die makroskopische Geschwindigkeit $c^2 H^{-1} P$ (genauer: der Erwartungswert dieses Operators bei scharf definiertem Impuls und Energie) klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, ist auch die Amplitude des variablen Teiles von S klein gegen den konstanten, und zwar von der Größenordnung β' . Aus (51) geht hervor, daß die Schwankung „senkrecht“ zu P erfolgen muß, so daß

$$(S, P) = (\tilde{S}, P) = \text{const.} \quad (53)$$

2. Es zeigt sich nun, daß sich ganz die analogen Schwankungsgesetze für das Eigenimpulsmoment des Modells herleiten lassen.

In Teil I wurde gezeigt, daß sich aus den Gleichungen (5) und (6) ebenfalls ein Erhaltungssatz für das gesamte Impulsmoment des Systems folgern läßt; es ist nämlich analog (46) und (48)¹⁾

$$J^* = J_B^* + S^* = [x^*, P^*] + c[\pi, u] = \text{const.} \quad (54)$$

Da der erste Bestandteil J_B^* wieder das Bahnimpulsmoment darstellt, ist anzunehmen, daß der zweite Bestandteil S^* dem Spin des Dirac-Elektrons korrespondiert. Wir erwarten also für das Eigenmoment die Korrespondenz:

$$c[\pi, u] \rightarrow \frac{\hbar}{2} s. \quad (55)$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung liegt zunächst darin, daß für J_B^* und S^* das analoge Schwankungsgesetz wie für J_B und S gilt. Aus (54) folgt nämlich unmittelbar:

$$\frac{dJ_B^*}{dt} = -\frac{dS^*}{dt} = \frac{d}{dt}[x^*, P^*] = \left[\frac{dx^*}{dt}, P^* \right], \quad (56)$$

¹⁾ I, Gln. (89) u. (90). — Wir kennzeichnen hier die auf das Modell bezüglichen Variablen, sofern die entsprechenden Größen auch beim Dirac-Elektron auftreten, zur Unterscheidung durch *.

in genauer Korrespondenz zu (51). Aus (56) liest man weiter ab, daß die Schwankung von S^* senkrecht zu P^* erfolgt, also

$$(S^*, P^*) = \text{const.} \quad (57)$$

analog (53). Man kann auch hier entsprechend (50)

$$\Delta J_B^* = -\Delta S^* = \Delta [x^*, P^*] = [\xi^*, P^*] \quad (58)$$

setzen, falls man

$$\xi^* = x^* - \tilde{x}^* \quad (59)$$

als die Differenz der *gleichzeitigen* Ortsvektoren x^* und \tilde{x}^* des Teilchens und seines Schwerpunktes einführt. Dann folgt (54) unmittelbar aus der geradlinig gleichförmigen Bewegung des Schwerpunktes des Teilchens.

Zusammenfassend läßt sich daher sagen, daß sich die formalen Schwankungsgesetze für den Elektronenspin und für den inneren Drehimpuls des Modells einander vollständig entsprechen¹⁾.

3. Gleichung (58) ermöglicht es, sich unmittelbar eine anschauliche Vorstellung von der Art der Schwankungen des Eigenimpulsmoments des Modells zu bilden. Bei einer Translation nach der x_3 -Richtung ($P_3^* = P^*$) wird

$$\Delta S_1^* = -\xi_2^* P^*, \quad \Delta S_2^* = \xi_1^* P^*, \quad \Delta S_3^* = 0. \quad (58a)$$

Da nun ξ_1^* und ξ_2^* zeitlich periodische Funktionen mit dem Phasenunterschied $\pi/4$ sind, so beschreibt S^* gleichförmig einen „Präzessionskegel“ um die x_3 -Achse, dessen Öffnungswinkel, wie sich aus dem Betrage von ξ^* ergibt, bei kleinen Translationsgeschwindigkeiten die Größe β besitzt (s. Fig. 2a). Bei einer Translation nach der x_1 -Richtung ist dagegen ($P_1^* = P^*$):

$$\Delta S_1^* = 0, \quad \Delta S_2^* = 0, \quad \Delta S_3^* = \xi_2^* P^*, \quad (58b)$$

also nur ΔS_3^* von Null verschieden. Die Schwankung von S^* besteht hier in einer zeitlich periodischen Schwankung des Betrages von S^* ohne Richtungsänderung. Die Amplitude des Schwankungsanteiles ist auch hier bis auf den Faktor $\hbar/2$ (von höheren Gliedern in β wieder abgesehen) gleich β (Fig. 2b).

4. Wir wollen die vorstehenden Betrachtungen nunmehr durch Berechnung der Erwartungswerte für die Spinvariablen beim Dirac-Elektron ergänzen. Da in (52) \tilde{S} (als Konstante der Bewegung) gerade, ΔS (als schief

¹⁾ Dies gilt übrigens unabhängig davon, ob im Modell die Umlaufgeschwindigkeit des Teilchens die Lichtgeschwindigkeit erreicht oder einen beliebigen kleineren Wert besitzt.

vertauschbar mit H bzw. „periodische“ Zeitfunktion) ungerade ist, so sind die geraden und ungeraden Erwartungswerte der Komponenten von S :

$$\overline{S_k^g} = \overline{S_k}, \quad \overline{S_k^u} = \overline{\Delta S_k} = -\overline{[\xi, P]_k}. \quad (60)$$

Nach (48) ist nun

$$S_1 = \frac{\hbar}{2} \frac{\alpha_2 \alpha_3}{i}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{2} \frac{\alpha_3 \alpha_1}{i}, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{i} \quad (61)$$

oder in Matrizenform:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, & S_2 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}, \\ S_3 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (61')$$

Hiermit können die Erwartungswerte auch für den Fall der Translation ohne Mühe berechnet werden.

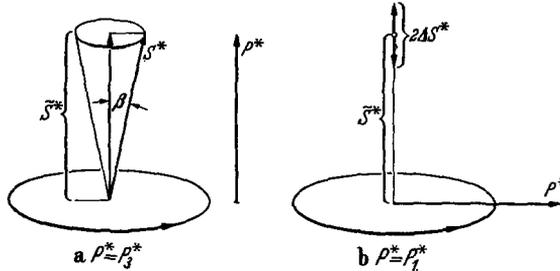


Fig. 2. Schwankungen des Eigenimpulsmomentes S^* des Modells bei Translation. a) Translationsrichtung senkrecht zur Bahnebene ($P^* = P_3^*$): S^* beschreibt einen Präzessionskegel. b) Translationsrichtung in der Bahnebene gelegen ($P = P_1^*$): Schwankungen von S^* der Größe, aber nicht der Richtung nach. — Das analoge Verhalten zeigen die Erwartungswerte $\overline{S^u}$ des Dirac-Elektrons.

Wir legen der Berechnung der Erwartungswerte wieder die speziellen Wellenfunktionen (40) und (43) zugrunde. Betrachten wir eine Translation nach der x_3 -Richtung, so ergibt sich aus (43):

$$\overline{S_1^g} = \overline{S_2^g} = 0, \quad \overline{S_3^g} = \mp \frac{\hbar}{2} \frac{1}{N} \left(1 + \frac{p_3'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2} \right) = \mp \frac{\hbar}{2}; \quad (62a)$$

dagegen für eine Translation nach x_1 aus (40):

$$\overline{S_1^g} = \overline{S_2^g} = 0, \quad \overline{S_3^g} = \mp \frac{\hbar}{2} \frac{1}{N} \left(1 - \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c \right)^2} \right) = \mp \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 - \beta'^2}. \quad (62b)$$

Der Erwartungswert bezieht sich je auf eine Wellengruppe positiver *oder* negativer Energie, und zwar entspricht das obere Vorzeichen je einer Wellenfunktion mit den Amplituden a_0^+ , das untere Vorzeichen einer Wellenfunktion mit den Amplituden a_0^- ; entsprechend ist hierbei der Normierungsfaktor

$$N = 1 + \frac{p_3'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad = 1 + \frac{p_1'^2}{\left(\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c\right)^2} \quad (62c)$$

eingesetzt worden.

Ebenso einfach ergeben sich die ungeraden Erwartungswerte für Wellengruppen mit scharf definiertem Impuls und entgegengesetzt gleicher Energie. Man erhält aus (61') für eine Translation nach x_3 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_1^u &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{N} \cdot \frac{-2 p_3'}{\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c} e^{i \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.} = -\frac{\hbar}{2} \beta' \cdot \cos \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}, \\ \bar{S}_2^u &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{N} \cdot \frac{-2 i p_3'}{\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c} e^{i \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.} = +\frac{\hbar}{2} \beta' \cdot \sin \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}, \\ \bar{S}_3^u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

Ebenso für die Translation nach x_1 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_1^u &= 0, \quad \bar{S}_2^u = 0, \\ \bar{S}_3^u &= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{2 p_1'}{\frac{\varepsilon'}{c} + \mu_0 c} e^{i \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.} = \frac{\hbar}{2} \beta' \cdot \cos \frac{2 \varepsilon' t}{\hbar}. \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

Man ersieht, daß die so berechneten ungeraden Erwartungswerte der Komponenten von S_k , d. h. deren Schwankungen, bei kleinen Translationsgeschwindigkeiten mit den entsprechenden Schwankungen der modellmäßigen Größen bis zu Gliedern von der Größenordnung β' genau übereinstimmen. Erst bei größeren Translationsgeschwindigkeiten ergeben sich Abweichungen, wie wir sie von der Koordinatenschwankung her bereits kennen. Die Abweichungen hängen hier übrigens, wie der Vergleich von (50) und (58) unmittelbar zeigt, direkt mit dem Verhalten der ξ_x bei größeren Translationsgeschwindigkeiten zusammen.

5. Wir wollen im folgenden die Korrespondenz der *geraden* Erwartungswerte (62a) und (62b) mit den entsprechenden modellmäßigen Ausdrücken noch besonders betrachten.

Wir fassen zunächst den Fall der *Rubbewegung* beim Modell ins Auge. Hierbei wird ξ^* mit dem (auf den Mittelpunkt der Kreisbahn bezogenen)

Radiusvektor r^* der Bahn identisch. In I wurde auf Grund von (5) und (6) gezeigt, daß sich das Spinnmoment des Systems in diesem Falle durch

$$S^* = -\mu_0 \left[r^*, \frac{dr^*}{dt} \right] \quad (64)$$

ausdrücken läßt, wobei $\frac{dr^*}{dt}$ die „Mikrogeschwindigkeit“ des Teilchens (dem Betrag nach gleich c), also $\mu_0 \frac{dr^*}{dt}$ der „Mikroimpuls“ des Teilchens ist¹⁾.

Es ist naheliegend zu fragen, ob sich auch beim Dirac-Elektron der konstante, d. h. gerade Teil des Spinnmoments aus der Mikrobewegung des Teilchens verstehen läßt, derart, daß man den „Hebelarm“ ξ mit einem geeignet gewählten Mikroimpuls in Form eines Vektorprodukts zu kombinieren hat. Schrödinger weist hier den folgenden Zusammenhang nach²⁾:

$$2\tilde{S} = \hbar \bar{s} = \left[\xi, \frac{\eta H}{c} \right] = - \left[\xi, \frac{H \eta}{c} \right], \quad (65)$$

den man auf Grund von (21) und (24b) leicht bestätigt. Wir wollen (65) auf eine etwas andere Form bringen, welche den Vergleich mit dem Modell erleichtert. Man sieht unmittelbar, daß $H\eta/c$ tatsächlich eine Art Mikroimpuls darstellt, wenn man $d\xi/dt$ nach (24), (4) und (24a) so umschreibt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d(x - \bar{x})}{dt} = c(\alpha - cH^{-1}P) = c\eta. \quad (66)$$

Dann geht (65) in

$$2\tilde{S} = - \left[\xi, \frac{H}{c^2} \frac{d\xi}{dt} \right] = \frac{H}{c^2} \left[\xi, \frac{d\xi}{dt} \right] \quad (67)$$

über. Die Größe $\frac{H}{c^2} \frac{d\xi}{dt}$ bedeutet nun offenbar den „Mikroimpuls“ des Systems, da ja H/c^2 die Masse und $d\xi/dt$ die „Mikrogeschwindigkeit“ des Dirac-Elektrons ist. Die Analogie von (64) und (67) fällt unmittelbar in die Augen. An (67) bzw. (65) ist jedoch zweierlei merkwürdig: Einmal der linksstehende Faktor 2 (er ist eine unmittelbare Folge der Vertauschungsrelationen für die α_u); zweitens die Labilität bezüglich des Vorzeichens (es hängt von der Stellung des „Massenfaktors“ H/c^2 ab, ob vor der Klammer des Vektorprodukts das positive oder negative Vorzeichen steht). Bezeichnenderweise tritt beim anschaulichen Modell der Faktor 2 des Dirac-Elektrons *nicht* auf. Dagegen tritt in (64) μ_0 mit dem *negativen* Vorzeichen auf³⁾, während andererseits in dem korrespondierenden Ausdruck (67) das Vorzeichen unbestimmt bleibt. Die Korrespondenz ist also auch hierbei soweit vorhanden, als es nur erwartet werden kann.

¹⁾ Vgl. I, Gl. (91). — ²⁾ E. Schrödinger, A, Gl. (30). — ³⁾ Das klassische Modell verhält sich so, wie wenn eine *negative* Masse $-\mu_0$ im Abstand $|r^*|$ mit der Geschwindigkeit dr^*/dt umliefe, vgl. I, Abschnitt 4, 2.

Für den Fall des makroskopisch *bewegten* Teilchens läßt sich Gleichung (64) nicht in einfacher Weise verallgemeinern, obwohl die entsprechende Beziehung (67) für das Dirac-Elektron allgemein gilt. Der Grund für diese Diskrepanz ist darin zu suchen, daß der Schrödingersche Operator ξ nur für $P = 0$ dem Vektor $r^* = \xi^*$ des Modells *genau* und schon bei langsamer Translation nur noch angenähert korrespondiert. Nun ist aber \tilde{S} gerade und man hat daher zu erwarten, daß auch für ihn — wie bisher für alle geraden Operatoren — strenge Korrespondenz mit dem Modell existiert, d. h. daß die für das Dirac-Elektron aufgestellten Beziehungen (62a, b) (für positive Energie) auch beim Modell unverändert gelten. Daß diese Vermutung wirklich zutrifft, läßt sich am einfachsten auf Grund einer Lorentz-Transformation unter Benutzung eines Satzes über die Abhängigkeit der Lage des Schwerpunktes eines abgeschossenen materiellen Systems vom Bezugssystem in der relativistischen Mechanik¹⁾ beweisen. Hierdurch wird zugleich die modellmäßige Auffassung von ξ als Differenz der vom Bezugssystem abhängigen Ortsvektoren des Teilchens und seines Schwerpunkts erhärtet [vgl. (24) und (59)]. Auf die Wiedergabe des Beweises soll hier jedoch verzichtet werden.

4. Energiefunktion.

1. Bereits in der Einleitung haben wir auf die korrespondenzmäßige Analogie zwischen der Hamilton-Funktion (2) des Dirac-Elektrons und der Energiefunktion (7) unseres Modells hingewiesen. Diese Analogie tritt noch wesentlich deutlicher hervor, wenn wir jetzt die einzelnen Terme der Hamilton-Funktion (2) in ihre geraden und ungeraden Bestandteile zerlegen und die Berechnung der zugehörigen ausgezeichneten Erwartungswerte vornehmen.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Hamilton-Funktion (2):

$$H = H_1 + H_2; \quad H_1 = c(\alpha, P), \quad H_2 = \alpha_4 \mu_0 c^2. \quad (68)$$

Die Spaltung von H_1 in einen geraden und ungeraden Bestandteil ergibt sich, indem man η_k an Stelle von α_k entsprechend (21) substituiert. Man erhält so:

$$H_1 = c^2 P^2 H^{-1} + c(\eta^0, P) e^{-i \frac{2 H t}{\hbar}}. \quad (69)$$

Entsprechend läßt sich H_2 bei Einführung von

$$\eta_4 = \alpha_4 - \mu_0 c^2 H^{-1}, \quad (70)$$

¹⁾ A. Papapetrou, Praktika Akad. Athen 14, 540, 1939.

welches mit H schief vertauscht und daher „periodisch“ ist, spalten:

$$H_2 = (\mu_0 c^2)^2 H^{-1} + \mu_0 c^2 \eta_4^0 e^{-i \frac{2Ht}{\hbar}} \quad (71)$$

(η^0 und η_4^0 Anfangswerte von η und η_4). Aus (69) und (71) folgt nunmehr

$$\begin{aligned} H &= \{c^2 P^2 + (\mu_0 c^2)^2\} H^{-1} + c(\eta, P) + \eta_4 \mu_0 c^2 \\ &= H + c(\eta, P) + \eta_4 \mu_0 c^2 \end{aligned}$$

oder

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = c(\eta, P) + \eta_4 \mu_0 c^2 = 0. \quad (72)$$

Die Summe der ungeraden Anteile ΔH_1 und ΔH_2 in H ist also Null, wie es sein muß, da H konstant ist. Wir können nach (72) und (70) ΔH_1 und ΔH_2 auch in die Form setzen

$$\Delta H_1 = \left(\frac{d\xi}{dt}, P \right), \quad \Delta H_2 = (\alpha_4 - \mu_0 c^2 H^{-1}) \mu_0 c^2, \quad (73)$$

welche Ausdrücke sich unmittelbar auf das Modell übertragen lassen.

2. Modellmäßig wird man H^* , Gl. (7), analog (68) zerlegen:

$$H^* = H_1^* + H_2^*; \quad H_1^* = \left(\frac{dx^*}{dt}, P^* \right), \quad H_2^* = \frac{u_0}{u_4} \mu_0 c^2. \quad (74)$$

Die Korrespondenz von H_1^* mit H_1 ergibt sich unmittelbar aus der Breitschen Beziehung (4). Bei H_2^* wurde in korrespondenzmäßige Parallele gerückt:

$$\frac{u_0}{u_4} \rightarrow \alpha_4. \quad (75)$$

Die Schwankungen ΔH_1^* und ΔH_2^* von H_1^* und H_2^* werden dann analog (73):

$$\Delta H_1^* = \left(\frac{d\xi^*}{dt}, P^* \right), \quad \Delta H_2^* = \left(\frac{u_0}{u_4} - \frac{\mu_0 c^2}{E} \right) \mu_0 c^2. \quad (76)$$

(E Energiekonstante). Man bestätigt nach (74) und der Bedeutung von $d\xi^*/dt$ als Mikrogeschwindigkeit leicht, daß sich die Schwankungen ΔH_1^* und ΔH_2^* analog (72) gegenseitig fortheben:

$$\Delta H_1^* + \Delta H_2^* = 0. \quad (77)$$

3. Es bleibt nur noch übrig nachzuweisen, daß die geraden Erwartungswerte von H_1 und H_2 mit den konstanten Anteilen $H_1^* - \Delta H_1^*$ und $H_2^* - \Delta H_2^*$ des Modells für beliebige Translationsgeschwindigkeiten *exakt*, die ungeraden Erwartungswerte dagegen für *kleine* Translationsgeschwindigkeiten mit den Schwankungsanteilen ΔH_1^* und ΔH_2^* übereinstimmen.

Hierdurch wird auch die korrespondenzmäßige Parallele (75) vollends sichergestellt. Nun ist in der Tat:

$$\overline{H}_1^g = \overline{c^2 P^2 H^{-1}} = \frac{\mu_0 v'^2}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \sum_{k=1}^3 v'_k p'_k \rightarrow H_1^* - \Delta H_1^*, \quad (78a)$$

$$\overline{H}_2^g = \overline{(\mu_0 c^2)^2 H^{-1}} = \mu_0 c^2 \sqrt{1-\beta'^2} \rightarrow H_2^* - \Delta H_2^*, \quad (78b)$$

wobei $v' = \beta' c$ die Gruppengeschwindigkeit für eine Wellengruppe mit scharf definiertem Impuls p' und positiver Energie ist¹⁾.

Was die ungeraden Erwartungswerte betrifft, so wird zunächst bei einer Translation nach x_3 , wie sich aus (43) und die Matrizendarstellung (29) von α_4 unmittelbar ergibt:

$$\overline{\Delta H_2} = \mu_0 c^2 \cdot \overline{\alpha_4^u} = 0. \quad (79)$$

Hiermit korrespondiert, daß auch modellmäßig $\Delta H_2^* = 0$ wird, da hierbei, vgl. (76), sowohl u_0/u_4 als auch $\mu_0 c^2/E$ den Wert $\sqrt{1-\beta'^2}$ annimmt. Entsprechend verschwinden auch $\overline{\Delta H_1^u}$ und ΔH_1^* . Für eine Translation nach x_1 erhält man aus (40) und (40') nach einfacher Rechnung:

$$\frac{\overline{\Delta H_2}}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{N} \cdot \frac{-2 p'_1}{\frac{\epsilon'}{c} + \mu_0 c} e^{i \frac{2 \epsilon' t}{\hbar}} + \text{konj. Gl.} = -\beta' \cos \frac{2 \epsilon' t}{\hbar}. \quad (80)$$

¹⁾ Bei früheren Darstellungen des korrespondenzmäßigen Zusammenhanges des Hamilton-Operators des Dirac-Elektrons (2) mit der klassischen Lorentz-schen Elektronenenergie

$$E = \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\mu_0 v_k}{\sqrt{1-\beta^2}} + \mu_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$$

wurde gelegentlich darauf hingewiesen, daß, da man die Geschwindigkeitskomponenten v_k mit den Matrizen α_k in Parallele rücken kann, man dann auch $\sqrt{1-\beta^2}$ mit α_4 korrespondieren lassen müsse. (G. Breit, a. a. O.; vgl. auch V. Fock, ZS. f. Phys. 55, 127, 1929.) Wir können diese Auffassung durch unsere Unterscheidung von Erwartungswerten der geraden und ungeraden Art jetzt genauer präzisieren. Beschränkt man sich auf die geraden Erwartungswerte der Terme des Dirac-Operators H , so wird man nach (78a) und (78b) genau auf die Lorentzsche Elektronenenergie geführt (wobei natürlich v'_k durch das scharf definierte v_k , β' durch β zu ersetzen ist). Es wäre daher angemessener, die Summanden des Lorentz-schen Energieausdruckes den geraden Anteilen der Operatoren H_1 und H_2 zuzuordnen. Aus der Zerlegung von H_1 und H_2 in die geraden und ungeraden Anteile:

$$H_1 = c(\alpha - \eta, P) + c(\eta, P), \quad H_2 = (\alpha_4 - \eta_4) \mu_0 c^2 - \eta_4 \mu_0 c^2$$

[entsprechend (69) und (71)] folgt dann die korrespondenzmäßige Zuordnung:

$$v_k \rightarrow c(\alpha_k - \eta_k) = c^2 P_k H^{-1}, \\ \sqrt{1-\beta^2} \rightarrow \alpha_4 - \eta_4 = \mu_0 c^2 H^{-1}.$$

Die relative Schwankungsamplitude von $\overline{\Delta H_1}$ und $\overline{\Delta H_2}$ besitzt demnach die Größe β' . Andererseits erhält man $\overline{\Delta H_2^*}$, wenn man (76) mit Hilfe einer Lorentz-Transformation auf die Kreisbewegung des Modells in seinem Ruhssystem (mit dem Schwerpunkt verbundenes Koordinatensystem) zurückführt. Sei $u_1^0 = \beta_1^0 u_0$ die x_1 -Komponente der Vierergeschwindigkeit des Teilchens in seinem Ruhssystem, so ergibt sich aus (76) durch Lorentz-Transformation:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta H_2^*}{\mu_0 c^2} &= \frac{u_0}{u_1} - \sqrt{1 - \beta'^2} = u_0 \frac{\sqrt{1 - \beta'^2}}{u_0 + \beta' u_1^0} - \sqrt{1 - \beta'^2}, \\ &= -\sqrt{1 - \beta'^2} \frac{\beta' \beta_1^0}{1 + \beta' \beta_1^0}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Nun ist für ein mit Lichtgeschwindigkeit rotierendes Teilchen $\beta_1^0 = \cos \frac{2E_0 t_0}{\hbar}$, worin t_0 die Zeitkoordinate, $E_0 = \mu_0 c^2$ die Energie im Ruhssystem sind. Andererseits ist bis auf Größen in β'^2 : $t_0 \simeq t$, $E_0 \simeq E'$. Es wird somit für langsame Translationsgeschwindigkeiten

$$\frac{\Delta H_2^*}{\mu_0 c^2} \simeq -\beta' \cos \frac{2E' t}{\hbar}. \quad (82)$$

Man sieht, daß hierbei asymptotisch wiederum Übereinstimmung mit dem Erwartungswert (80) der Diracschen Theorie erzielt wird.

Erlangen und Athen, Mai 1940.