Über den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Riemannschen und Diracschen Differentialgleichungen.

Von **D. Iwanenko** und **K. Nikolsky** in Charkow und Leningrad.

(Eingegangen am 8. Mai 1930.)

Es wird darauf hingewiesen, daß man die gewöhnlichen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen als das Resultat der Linearisierung der in den Differentialoperatoren quadratischen Laplaceschen Gleichung auffassen kann. Die Diracsche Gleichung ohne das Massenglied erweist sich als die Cauchy-Riemannsche Bedingung für Biquaternionen.

1. Im folgenden werden wir die Integralformulierung der Cauchy-Riemannschen Bedingungen der Theorie der Funktionen der komplexen Variablen benutzen. Setzen wir

$$f(x, y) = u + iv = w$$

und

$$dz = dx + i dy,$$

so wird die Greens-Ostrogradskysche Umformung des zweifachen Integrals lauten:

$$\int_C w\, dz = i \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{1}$$

Die Cauchy-Riemannschen Bedingungen bedeuten die Unabhängigkeit des Wertes des Integrals von dem Integrationsweg. Als Bedingung der Monogenität erhalten wir also

$$\oint w\, dz = i \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy = 0,$$

was zu zwei Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

führt.

Es ist bekannt, daß u und v beide der Laplaceschen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen. Wir können die C.-R.-Gleichungen* (2) der ersten Ordnung als Resultat der Linearisierung** der zweidimensionalen Laplaceschen Gleichung ansehen.

Wir bemerken, daß in diesem Linearisierungsprozeß das System der einfachsten hyperkomplexen Zahlen verwendet war; nämlich zwei hyperkomplexe Zahlen: die gewöhnliche 1 und $i = \sqrt{-1}$. Umgekehrt kann man durch Angabe eines Systems von hyperkomplexen Zahlen eine Gleichung vom Laplaceschen Typus „linearisieren". Diesen hyperkomplexen Zahlen können wir eindeutig ein System von Matrizen zuordnen.

Es sei z. B. das System der Zahlen 1 und i durch die Multiplikationstafel gegeben:

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-e_1$

$e_1 = 1 \qquad e_2 = i$

(diese Angabe der Koeffizienten γ_{ikl} in

$$e_i e_k = \sum_l \gamma_{ikl} e_l$$

definiert das ganze System***).

Wir sind dann imstande, diesem System der komplexen Zahlen die zwei Bilinearformen zuzuordnen:

$$A_i = \sum_{(k,\, s)} \gamma_{kis}\, x_k\, y_s.$$

Nehmen wir für x_k die beiden Komponenten von w: $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ und für y_1 und y_2 $d x_1$ bzw. $d x_2$, so erhalten wir gerade die beiden reellen unabhängigen Koeffizienten von e_k des Integranden in (1).

Die beiden C.-R.-Bedingungsgleichungen (2) können wir in Form einer einzigen Matrixgleichung

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \varphi = 0 \tag{3}$$

darstellen, wo

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i$$

sind. Hier begegnen wir demselben System der beiden einfachsten hyperkomplexen Zahlen 1 und i, welches uns die „Linearisierung" der zwei-

* C.-R. = Cauchy-Riemann.

** Das Wort „Linearisierung" wird hier im Diracschen Sinne gebraucht.

*** E. Cartan, E. Study, Encyclopédie des Sciences Math. t. I. Fasc. 3.

dimensionalen Laplaceschen Gleichung ermöglicht hat. Im allgemeinen kann man irgendwelches System der Matrizen, die in sich eine Gruppe bilden, als ein System der hyperkomplexen Zahlen auffassen. Mit Hilfe der Multiplikationstafel des Systems der hyperkomplexen Zahlen werden die entsprechenden Matrizen auf folgende Weise gebaut. Wir definieren die Matrizen α_i durch

$$\alpha_i \varphi = e_i U, \quad \text{wo} \quad U = \sum_i e_i \varphi_i \text{ —}$$

die allgemeine Gestalt einer beliebigen Zahl in dem System ist, z. B. $\alpha_1 \varphi = e_1 U = e_1 u_1 + e_2 u_2$, und erhalten speziell die Elemente der Mátrix α_1 aus der folgenden Tabelle:

	φ_1	φ_2
e_1	a_{11}	a_{12}
e_2	a_{21}	a_{22}

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

also

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

analog erhalten wir für α_2

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also gelangen wir zu denselben Matrizen α_1, α_2, die in den C.-R.-Gleichungen auftreten.

2. Wir gehen nun zu dem dreidimensionalen Falle über.

L. Hanni* folgend, schreiben wir das dreidimensionale komplexe Differentialelement als

$$d\gamma = dS \left\{ j_1 \cos(nx) + j_2 \cos(ny) + j_3 \cos(n, z) \right\},$$

wo j_1, j_2, j_3 die Quaternioneneinheiten sind**.

$f(x, y, z)$ setzen wir auch als

$$f(x, y, z) = u_x j_1 + u_y j_2 + u_z j_3 = u$$

an.

Die entsprechende Green-Ostrogradskysche Integralumformung lautet

$$\iint u\, d\gamma = \iiint \left(j_1 \frac{\partial u}{\partial x} + j_2 \frac{\partial u}{\partial y} + j_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

wo links das Integral über die Oberfläche S gebildet ist.

* L. Hanni, Tohoku Math. Journ. 5, 142, 1914.

** $j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = -1, \quad j_1 j_2 = j_3, \quad j_3 j_1 = j_2, \quad j_2 j_3 = j_1, \quad j_3 j_2 = -j_1, \quad j_1 j_3 = -j_2, \quad j_2 j_1 = -j_3.$

Wie früher, leiten wir daraus die C.-R.-Gleichungen als Bedingung des Nullwerdens des komplexen Integrals genommen über die geschlossene Oberfläche ab:

$$j_1 \frac{\partial u}{\partial x} + j_2 \frac{\partial u}{\partial y} + j_3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

In reeller Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Gleichungen können wir als die Linearisierung der entsprechenden Laplaceschen Gleichung ansehen. Dieselben Gleichungen (4) schreiben wir in Matrizenform ganz analog der Gleichung (3) des zweidimensionalen Falles:

$$D_1 \frac{\partial}{\partial x} + D_2 \frac{\partial}{\partial y} + D_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi = 0^*,$$

wo die Matrizen D_i die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 - D_2 D_1 &= D_3 \\ D_2 D_3 - D_3 D_2 &= D_1 \\ D_3 D_1 - D_1 D_3 &= D_2 \end{aligned}$$

und explizit die Form haben:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Wir bemerken, daß die drei Matrizen D_k den quantenmechanischen Matrizen der Komponenten des Drehmomentes äquivalent sind.)

Die dreidimensionalen C.-R.-Gleichungen (4) könnten wir, wie früher, auch unmittelbar mittels der Multiplikationstafel des passend gewählten Systems der hyperkomplexen Zahlen erhalten. Es entsteht hier also die Frage nach der Wahl eines solchen hyperkomplexen Systems.

---

* Hier ist die Divergenzgleichung weggelassen. Die dreidimensionale Verallgemeinerung der C.-R.-Bedingungen wurde auch von C. Runge untersucht. Er hat auf eine andere mögliche Verallgemeinerung hingewiesen, die den Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen wesensgleich ist (Göttinger Nachr. 1922, Heft 2, S. 129). Diese Gleichungen haben aber einen nichtlinearen Charakter und gehören nicht zum Gegenstand unserer Überlegungen. Siehe auch E. R. Hedrick, L. Ingeld, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 551, 1925.

Offenbar muß man die Zahl der fundamentalen Einheiten $n \geqq p$ nehmen (wo p die Zahl der unabhängigen Variablen in der Laplacescher Gleichung ist).

Versuchsweise benutzen wir das Quaternionensystem, nämlich dessen „klassische" Auffassung in dem dreidimensionalen Raume. Nach der dargelegten Methode bilden wir

$$\alpha_k \varphi = e_k u.$$

Z. B.

$$D'_1 \varphi = J_1 U = -U_1 + j_3 U_2 - j_2 U_3,$$

also

$$D'_1 \varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die vierte Zeile entspricht dem Gliede $\partial u_1/\partial x_1$ in der Bedingung $\operatorname{div} U = 0$.

3. In dem vierdimensionalen Falle setzen wir* für das Differentialelement der unabhängigen komplexen Veränderlichen

$$d\Omega = dV\left\{j_1 \cos(n x_1) + j_2 \cos(n x_2) + j_3 \cos(n x_3) + i \cos(n x_4)\right\}$$

und für $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ entweder

$$f(x_1, \ldots, x_4) = j_1(u_x + i v_x) + j_2(u_y + i v_y) + j_3(u_z + i v_z) = u + iv,$$

d. h. ein Bivektor, oder

$$f(x_1, \ldots, x_4) = j_1(U_1 + iV_1) + j_2(U_2 + iV_2) + j_3(U_3 + iV_3) + (U_4 + iV_4)$$
$$= U + i\mathfrak{B},$$

d. h. ein Biquaternion. Die entsprechenden Green-Ostrogradskyschen Integralsätze für beide Fälle lauten:

$$\iiint (u + iv) \cdot d\Omega = \iiiint \Big[j_1 \frac{\partial(u + vi)}{\partial x_1} + j_2 \frac{\partial(u + vi)}{\partial x_2} + j_3 \frac{\partial(u + vi)}{\partial x_3}$$
$$+ i \frac{\partial(u + vi)}{\partial x_4}\Big] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

und

$$\iiint (U + i\mathfrak{B})\, d\Omega = \iiiint \Big[\sum_{k=1}^{3} j_k \frac{\partial(U + i\mathfrak{B})}{\partial x_k}$$
$$+ i \frac{\partial(U + i\mathfrak{B})}{\partial x_4}\Big] dx_1\, dx_2 \cdot dx_3\, dx_4. \tag{5}$$

---

* $i j_k = j_k i$, $i^2 = -1$. Vgl. L. Hanni, l. c.

Die zugehörigen C.-R.-Differentialgleichungen lauten dann für einen Bivektor:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial ct} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, && \frac{\partial u_x}{\partial ct} = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y},\\
&\frac{\partial v_y}{\partial ct} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, && \frac{\partial u_y}{\partial ct} = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial ct} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, && \frac{\partial u_z}{\partial ct} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x},\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, && \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(wo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct$ ist), und für ein Biquaternion:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial x_4} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, && \frac{\partial u_1}{\partial x_4} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial v_2}{\partial x_4} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0, && \frac{\partial u_2}{\partial x_4} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_4}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial v_3}{\partial x_4} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, && \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_4}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial v_4}{\partial x_4} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, && \frac{\partial u_4}{\partial x_4} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wir sehen, daß die C.-R.-Gleichungen für einen Bivektor die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen* für das Vakuum sind, wenn wir $x_4 = ct$ setzen und u und v den $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ entsprechen lassen. Setzen wir in (7) $x_4 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, so können wir die C.-R.-Gleichungen (7) in knapper Matrizenform umschreiben:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial ct} + i\varrho_2\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + i\varrho_2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} + i\varrho_2\sigma_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \psi = 0. \qquad (8)$$

Analog erhalten wir für (6) (für die Maxwellschen Gleichungen):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} + \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix} D_3 & 0 \\ 0 & D_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi = 0.$$

Der Ausdruck (8) fällt mit den vier ersten Gliedern der Diracschen Gleichung zusammen, d. h. der Gleichung ohne das Massenglied ($2\pi mc/h = 0$). Die

* Die Identität der C.-R.-Bedingungen für den vierdimensionalen Raum mit den Maxwellschen Gleichungen war schon vor langer Zeit bekannt. Siehe z. B. G. Y. Rainich (Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 106, 1925), der in seiner sehr interessanten Arbeit, der wir die Anregung zu unseren Überlegungen verdanken, auch die Frage nach der Verallgemeinerung des Residuumsbegriffs aufgestellt hat.

acht Funktionen u und v sind die reellen und imaginären Teile der vier Diracschen komplexen ψ.

4. Die Maxwellschen und Diracschen Gleichungen mit $2\pi mc/h = 0$ sind also durch die Linearisierung der vierdimensionalen Wellengleichung erhältlich. Man sieht hier ohne weiteres, daß die Maxwellsche und die Diracsche Gleichung (letztere sogar ohne Massenglied) keineswegs einen gemeinsamen Ursprung haben. Die Maxwellschen Gleichungen, die mittels des Bivektors eingeführt waren, haben in bezug auf Transformationen einen spezifisch vektoriellen Charakter. Für einen Bivektor haben wir nämlich, wenn wir die Bezeichnungen der Quaternionentheorie* anwenden,

$$B' = T B T',$$

wo beide Bivektoren (Transformatoren) T und T' in den Cayley-Kleinschen Parametern linear sind. Anders mit den Biquaternionen Q. In der Transformationsformel

$$Q' = Q_1 Q Q_2$$

kann Q_2 gleich Eins gesetzt werden; dann hat das transformierte Biquaternion einen in den Cayley-Kleinschen Parametern linearen Charakter; d. h. es transformiert sich wie die Diracschen Funktionen ψ**.

Wollen wir die vollständige Diracsche Gleichung in Betracht ziehen, so müssen wir die rechte Seite der Integralformen der C.-R.-Bedingungen (5) nicht gleich Null, sondern gleich

$$\int (U + i\mathfrak{B})\, d\Omega = \frac{2\pi m c}{h} \int\int\int\int (U - i\mathfrak{B})\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

setzen. Wir müssen diese Tatsache als eine Verletzung der Monogenität der hyperkomplexen Funktionen $(U + i\mathfrak{B})$ betrachten.

Nach dem oben Gesagten könnten wir die folgende Frage aufstellen: es sei die fünfdimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s^2} = \frac{m^2 c^2}{h^2}\psi$$

gegeben, man führte die Linearisierung dieser Gleichung mittels eines passend gewählten Systems der fünf oder mehr hyperkomplexen Zahlen aus. Das System aus fünf hyperkomplexen Zahlen ist kaum befriedigend,

* Vgl. F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik, II., S. 84; E. Study, Math. Ann. **39**, 441, 1891; H. Rothe, Enc. Math. Wiss. III_1 7, 1277.

** Dadurch wird auch der Mißerfolg zahlreicher Versuche, die Diracschen Gleichungen zu „Maxwellisieren“, erklärt.

denn die Multiplikationstabelle reduziert sich auf eine Quaterniontafel und auf ein Quadrat mit j_s; es gilt

$$j_s j_k = j_k j_s = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Augenscheinlich haben wir eine große Freiheit in der Wahl des nötigen Systems. Ohne dabei auf die Eindeutigkeitsfrage einzugehen, beschränken wir uns auf einige Hinweise auf das in die Quantenmechanik von Dirac eingeführte Linearisierungsverfahren. Die entsprechende Aufgabe wurde von Hurwitz behandelt*. Dabei ergab sich, daß im Falle der antikommutierenden Matrizen der Rang der Matrizen erstens ein gerader sein muß und zweitens bei der gegebenen Zahl der Matrizen $k = 2r + 1$ und $k' = 2r$ nicht kleiner als 2^r sein kann (der Rang kann auch $m \cdot 2^r$ sein, wo m eine ganze Zahl ist). Z. B. erhalten wir für das System der fünf antikommutierenden für den Matrizenrang

$$2r + 1 = 5, \quad r = 2, \quad 2^r = 4,$$

was wirklich der Eddingtonschen Pentade** der Matrizen entspricht. Für $k = 3$ erhalten wir $r = 1$, $2r + 1 = 3$, d. h. nur drei antikommutierende Matrizen vom Rang 2 (in der Quantenmechanik Paulische Spinmatrizen genannt). Die Diracsche Linearisierung der fünfdimensionalen Laplaceschen Gleichung erscheint als mit Hilfe des einfachsten hyperkomplexen Systems (nach den Quaternionen) durchgeführt***. Dies System ist nichts anderes als das Produkt der beiden unabhängigen gewöhnlichen Quaternionensysteme Q und Q', so daß

$$Q_i Q_k = -Q_k Q_i, \quad Q_i^2 = -1, \quad Q_i'^2 = -1 \text{ usw.}$$

und

$$Q_k Q'_e = Q'_e Q_k.$$

Das System hat offenbar 16 fundamentale Einheiten, denen die Gruppe der 16 linear unabhängigen Matrizen entspricht. Aus der Tafel der Produkte $Q_e Q_k$ ersehen wir, daß die Komplexe aus den fünf antikommutierenden Einheiten gebildet werden können, die also zur Linearisierung der fünfdimensionalen Laplaceschen Gleichung genügen. (Nach dem oben Gesagten besitzen diese Matrizen den Rang 4.)

Hier haben wir das Beispiel der Linearisierung einer Gleichung in n Veränderlichen mit Hilfe eines hyperkomplexen Systems mit $p > n$ Einheiten.

* A. Hurwitz, Math. Ann. **88**, 1, 1922.

** A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 524, 1928.

*** G. Scheffers, Math. Ann. **39**, 293, 1891. Die sogenannten Quaternionensysteme.

Merken wir an, daß die den Q und Q' entsprechenden Matrizen untereinander in derselben Beziehung wie die Diracschen σ und ϱ stehen. Spezialisieren wir die allgemeine 16reihige hyperkomplexe Zahl durch die Forderung $u_i = u_{16-i}$, wo u_i die reellen Teile der Diracschen ψ-Funktionen sind, so erscheinen die C.-R.-Bedingungen für ein solches hyperkomplexes System als den Diracschen Gleichungen äquivalent.

Es entsteht eine interessante Frage nach der Möglichkeit der Einführung des Residuumsbegriffs bei allen erwähnten hyperkomplexen Systemen, besonders bei der Diracschen Gleichung. Sie bleibt jedoch noch ein offenes mathematisches Problem*.

Wir freuen uns, Herrn Dr. V. Fock für einige wertvolle Bemerkungen herzlich danken zu können.

* Das Schwierige ist dabei die Notwendigkeit, die zwei Differentialkoeffizienten zu unterscheiden. P. W. Ketchum, Trans. Amer. Math. Soc. **30**, 641, 1928; L. Autonne, Journ. Math. (6) **3**, 53, 1907.