

Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen.

Von **W. Pauli** in Zürich.

(Eingegangen am 17. Dezember 1932.)

§ 1. Über die Rolle der imaginären Einheit und den Begriff der räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens in der Wellenmechanik. § 2. Die Analogie zwischen Photonen und Elektronen und ihre Grenzen. § 3. Zur Frage der Formulierbarkeit der Quantenmechanik als Nahewirkungstheorie.

Unter dem voranstehenden Titel hat Herr P. Ehrenfest¹⁾ mehrere bestimmte Fragen zur Diskussion gestellt. Da ich anlässlich der Abfassung eines zusammenfassenden Artikels teilweise auf ganz ähnliche Fragen gestoßen bin, möge es mir erlaubt sein, hier einige Bemerkungen darüber zu veröffentlichen. Diese beanspruchen weder neu zu sein, noch endgültige Antworten auf die aufgeworfenen Fragen darzustellen. Sie mögen nur dazu dienen, die von Ehrenfest eingeführte Fiktion eines „guten Tones“, der verlangt, diese Fragen als „sinnlos“ beiseite zu schieben, wieder aus der Welt zu schaffen und zugleich auf den Zusammenhang dieser Fragen mit den noch ungelösten Problemen der relativistischen Quantentheorie (Zustände negativer Energie, Selbstenergie des Elektrons) hinzuweisen. Hierbei beschränke ich mich auf die in den Abschnitten A und B sowie den darauffolgenden Bemerkungen der Ehrenfestschen Note erörterten Fragen, während ich die in deren Abschnitt C enthaltenen, mehr mathematisch-gruppentheoretischen Fragen außer Betracht lasse, weil ich mich für ihre Diskussion nicht kompetent fühle.

§ 1. Über die Rolle der imaginären Einheit und den Begriff der räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens in der Wellenmechanik.

Wir beginnen damit, für den Fall eines Teilchens, zunächst bei Abwesenheit äußerer Kraftfelder, ausgehend von der Vorstellung (symbolischer, d. h. selbst nicht direkt beobachtbarer) Wellen im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, eine Folge von Annahmen versuchsweise zu formulieren, von denen jede jeweils weitergehend ist als die vorhergehenden. Damit wird jedoch nicht beabsichtigt, eine vollständige Axiomatik der Wellenmechanik zu erreichen, sondern hauptsächlich die besondere Rolle des Begriffes der räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichte zu betonen, dessen

¹⁾ P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. **78**, 555, 1932.

Existenz nach meiner Meinung zu Unrecht gewöhnlich als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Dieser Begriff ist entscheidend für die im folgenden § 2 zu erörternde Frage der Analogie zwischen Licht und Materie und ihrer Grenzen und läßt auch am besten den Grund für das Auftreten der imaginären Einheit in der Schrödingergleichung erkennen¹⁾.

I. 1. Es gibt ein Wellenfeld mit Superpositionsprinzip, beschrieben durch eine noch unbestimmte Anzahl von Komponenten ψ_1, ψ_2, \dots . Sind $\psi_\varrho^{(1)}(\vec{x}, t), \psi_\varrho^{(2)}(\vec{x}, t)$ mögliche Felder, so ist auch $c_1 \psi_\varrho^{(1)}(\vec{x}, t) + c_2 \psi_\varrho^{(2)}(\vec{x}, t)$ mit beliebigen (den Index ϱ nicht enthaltenden) Konstanten c_1, c_2 ein mögliches Feld.

I. 2. Bei Fourierzerlegung der $\psi_\varrho(\vec{x}, t)$ (in Integral oder Summe) entsteht

$$\psi_\varrho(\vec{x}, t) = \sum_k \left\{ a_\varrho(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \nu t)} + b_\varrho(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \nu t)} \right\} \quad (\text{I})$$

(bzw. $\int dk$ statt \sum_k), worin die positive Größe ν eine Funktion von $|k|$

ist; die Größen ν und \vec{k} sind gemäß der fundamentalen Beziehung

$$E = h\nu, \quad \vec{p} = h\vec{k}$$

($h =$ Wirkungsquantum dividiert durch 2π , $\nu =$ Kreisfrequenz) mit den mechanischen Größen Energie—Impuls verbunden. Deshalb genügen sie den Relationen

$$\nu = \frac{h}{2m} |k|^2 \quad \text{für unrelativ. Massenpunkte,}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{m^2 c^2}{h^2} + |k|^2 \quad \text{für relativ. Massenpunkte,}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = |k|^2 \quad \text{für Photon.}$$

Zu jedem \vec{k} soll es eine ebene Welle wirklich geben. Welche Abhängigkeitsrelationen aber zwischen den (im allgemeinen komplexen) $a_\varrho(\vec{k}), b_\varrho(\vec{k})$ bei der zu gegebenem \vec{k} gehörigen allgemeinsten möglichen Welle gehören, darüber wird hier noch nichts angenommen. Es könnte z. B. sein, daß $b_\varrho(\vec{k}) = 0$ sein muß, oder auch $b_\varrho(\vec{k}) = a_\varrho^*(\vec{k})$, d. h. ψ_ϱ reell.

¹⁾ In der Matrixmechanik von Heisenberg, Born und Jordan war der formale Grund für ihr Auftreten das Multiplikationsgesetz der Matrizen in Verbindung mit dem Kombinationsprinzip für die Spektralfrequenzen des emittierten Lichtes.

I. 3. Die Absolutbeträge $|a_\rho(\vec{k})|$ und $|b_\rho(\vec{k})|$ von a_ρ und b_ρ sollen meßbare Größen sein, und bis auf einen eventuell von $|k|$ abhängigen Normierungsfaktor soll $|a_\rho(\vec{k})|^2 + |b_\rho(\vec{k})|^2$ der Wahrscheinlichkeit, den (durch h dividierten) Impuls des Teilchens im Gebiet $\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}$ zu treffen, proportional sein.

Daraus folgt schon einiges, und zwar insbesondere die Möglichkeit des Grenzüberganges zur Strahlenoptik (klassischen Mechanik), wo man vom Zerfließen der Pakete absehen kann. Dies ist nämlich erlaubt bei Linear-dimensionen der Pakete, die groß gegen das Reziproke des „mittleren“ $|k|$ sind. Ferner folgt der Umstand, daß

$$\vec{v} = \frac{\partial \nu}{\partial \vec{k}}$$

die Gruppengeschwindigkeit ist. Endlich die Unbestimmtheitsrelationen

also

$$\Delta \vec{x} \cdot \Delta \vec{k} \sim 1, \quad \Delta t \cdot \Delta \nu \sim 1,$$

$$\Delta \vec{x} \cdot \Delta \vec{p} \sim h, \quad \Delta t \cdot \Delta E \sim h$$

als der Größenordnung nach richtige Relationen. (Die Ausdehnung der Pakete ist hier noch nicht *quantitativ* definierbar, aber das schadet nichts.)

Bis hierher sind Maxwellfeld und Materiewellenfeld analog, auch wäre das Feld eines einzigen reellen Skalars noch mit den eingeführten Annahmen verträglich. Nun kommt eine *neue* Annahmengruppe:

II. 1. Die Wahrscheinlichkeit, $W(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3$, das Teilchen zur exakten Zeit t , im infinitesimalen Volumenelement $\vec{x}, \vec{x} + d\vec{x}$ zu finden, ist stets ein sinnvoller Begriff. Es muß dann erstens $W(\vec{x})$ wesentlich positiv sein:

$$W(\vec{x}, t) \geq 0. \tag{1}$$

Zweitens muß

$$\int W(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \tag{2}$$

also jedenfalls unabhängig von t sein.

Hier möge besonders stark betont werden, daß diese Annahme, $W(\vec{x}, t)$ sei stets ein sinnvoller Begriff, weder selbstverständlich ist, noch aus dem in den Unbestimmtheitsrelationen zum Ausdruck kommenden Gesichtspunkt der Komplementarität (Annahmengruppe I) gefolgert werden kann. Denn es handelt sich um die Bestimmung des Teilchenortes auch *außerhalb der Gültigkeit der klassischen Mechanik*, d. h. in Raum- und Zeitgebieten, deren Dimensionen klein sind verglichen mit der mittleren Wellenlänge

bzw. Schwingungsperiode des betrachteten Wellenpaketes. Die Existenz von $W(\vec{x}, t)$ ist allerdings evident, wenn gezeigt werden kann:

II. 1'. Es existieren stets Experimente, aus deren Ergebnis mit Sicherheit geschlossen werden kann, ob das Teilchen zur Zeit t sich im Volumenelement $\vec{x}, \vec{x} + d\vec{x}$ befindet oder nicht (derart, daß im ersteren Fall die gleichzeitige direkte Wirkung des Teilchens an einem anderen Ort ausgeschlossen ist). Sobald derartige Experimente nicht immer existieren, kann man über die Existenz eines $W(\vec{x}, t)$ im Zweifel sein. Ich komme auf diese Zweifel später zurück.

Nun komme ich zur anfangs gestellten Frage über die Notwendigkeit von mindestens *zwei* reellen Skalaren bei den de Broglie-Schrödinger-Wellen. Ich behaupte, diese Notwendigkeit und damit auch die imaginäre Einheit kommt hinein *beim Suchen nach einem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte W , der die Forderungen (1) und (2) befriedigt und der die zeitlichen Ableitungen der ψ nicht enthält*. Die letztere Forderung ist nötig, um den Begriff „Anzahl der benutzten Skalare“ eindeutig zu machen. Ein *einzig* reeller Skalar, der einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in t genügt, ist ja äquivalent der Benutzung von *zwei* reellen Skalaren, die Differentialgleichungen erster Ordnung in t genügen (man setze dann $\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \psi_2$). Das Umgekehrte gilt auch, wie sogleich erläutert wird. Stellen wir also das Axiom auf.

II. 2. Wenn die $\psi_\rho(\vec{x}, t)$ für ein bestimmtes t_0 als Funktionen von \vec{x} bekannt sind, so soll W für diese Zeit t_0 durch die $\psi_\rho(\vec{x}, t_0)$ allein bestimmt sein, und zwar soll, als die einfachste Möglichkeit, W quadratisch (bzw. bilinear) von den Funktionsverläufen der $\psi_\rho(\vec{x}, t)$ abhängen.

Erläuterung. Ein bilinearer Operator $W(\vec{x}, t)$ ordnet zwei Sätzen $\psi_\rho^{(1)}(\vec{x})$ und $\psi_\rho^{(2)}(\vec{x})$ von Funktionen eine Funktion von \vec{x}, t zu, derart, daß

$$W(\vec{x}, t) \{ f_\rho(\vec{x}'), c_1 g_\rho^{(1)}(\vec{x}'') + c_2 g_\rho^{(2)}(\vec{x}'') \} \\ = c_1 W(\vec{x}, t) \{ f_\rho(\vec{x}'), g_\rho^{(1)}(\vec{x}'') \} + c_2 W(\vec{x}, t) \{ f_\rho(\vec{x}'), g_\rho^{(2)}(\vec{x}'') \}$$

und

$$W(\vec{x}, t) \{ c_1 f_\rho^{(1)}(\vec{x}') + c_2 f_\rho^{(2)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'') \} \\ = c_1 W(\vec{x}, t) \{ f_\rho^{(1)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'') \} + c_2 W(\vec{x}, t) \{ f_\rho^{(2)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'') \}.$$

Ist der Operator lokal, so ist er eine quadratische Form aus den ψ_ρ und endlich vielen räumlichen Ableitungen; ist er nicht lokal, so kann er von der Form sein

$$\sum_{\rho, \sigma} \iint a_{\rho\sigma}(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'') \psi_\rho(\vec{x}', t) \psi_\sigma(\vec{x}'', t) d\vec{x}' d\vec{x}''.$$

Es wäre natürlich a priori möglich gewesen, daß man zu Formen vierter oder höherer Ordnung hätte gehen müssen, aber die Erfahrung zeigt, daß man mit den quadratischen Formen auskommt.

Nun ist die Diskussion im relativistischen Fall und im *unrelativistischen Fall* verschieden. Betrachten wir zunächst den letzteren. Im kräftefreien Fall sieht man sofort: Für ein bestimmtes \vec{k} läßt sich aus dem Realteil einer einzigen Welle der Form (I) und seinen räumlichen Ableitungen *kein* in den Amplituden quadratischer Ausdruck angeben, der ein zeitlich konstantes Volumenintegral hat, da die zeitliche Abhaltung des quadratischen Ausdrucks im Integranden einen willkürlich vorschreibbaren Wert hat. Ist jetzt ψ speziell der Teil von (I), der allein die a_e , ψ^* also der Teil von (I), der allein die b_e enthält, so ist

$$\int \psi^2 dV \quad \text{und} \quad \int \psi^{*2} dV$$

zeitlich variabel, allein

$$\int \psi \psi^* dV$$

ist konstant und es genügen die so spezialisierten ψ und ψ^* den Differentialgleichungen erster Ordnung

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = (H \psi)^*, \quad H = E_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta^1,$$

also,

$$W(\vec{x}, t) = \psi^* \psi. \tag{II}$$

Die andere Möglichkeit, einen einzigen reellen Skalar U einzuführen, der einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in t genügt, also ψ und ψ^* durch ein einziges *reelles* „Potential“ und seine (bei gegebenem t willkürlich wählbare) erste Ableitung $\partial U / \partial t$ auszudrücken, ist in der Tat vorhanden; und zwar nicht nur im kräftefreien Fall, sondern allgemein, wenn H die Zeit nicht explizite enthält und reell ist. Man setze

$$\psi = \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) U, \quad \text{also} \quad \psi^* = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) U \tag{3}$$

und für das reelle U die Differentialgleichung

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (H)^2 \right) U = 0, \tag{III}$$

also im kräftefreien Fall

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left[E_0^2 - 2E_0 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \Delta \Delta \right] U = 0.$$

¹⁾ $E_0 = m_0 c^2$ kann man je nach Geschmack mitnehmen oder fortlassen.

Aus der allgemeinsten reellen Lösung von (III) bekommt man die allgemeinste komplexe Lösung von (II). Die Dichte W wird

$$W(\vec{x}, t) = \hbar^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + (HU)^2, \quad (4)$$

deren zeitliche Konstanz auch direkt aus (III) folgt, wenn immer H reell selbstadjungiert ist und die Zeit nicht explizite enthält. Ist H hermitesch, aber nicht reell, so ist auch U nicht reell. Am physikalischen Inhalt der Theorie ändert sich durch die Einführung von U nichts, nur die Formeln werden komplizierter. Dies äußert sich nicht nur in der Transformationstheorie, sondern auch bei der *Zusammensetzung zweier unabhängiger Systeme* zu einem Gesamtsystem. An Stelle der einfachen *Produktbildung* $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$ tritt bei den U etwas wesentlich Komplizierteres.

Im *relativistischen Fall* muß man noch weiter fordern:

II. 3. Es gibt zu W einen Stromvektor \vec{J} , so daß die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

gilt und $\left(\frac{\vec{J}}{c}, iW \right)$ einen Vierervektor bilden.

Dann folgt bei Abwesenheit von Kräften die Diracgleichung als (im wesentlichen) die einzige Möglichkeit. Insbesondere wird die Einführung von Größen mit *zweideutigen* Darstellungen der Lorentzgruppe unerlässlich, um neben II. 3. auch die Forderung (1), daß W positiv definit sei, zu erfüllen. Dies ergibt sich am einfachsten aus der ursprünglichen Argumentation von Dirac und soll deshalb hier nicht weiter ausgeführt werden.

§ 2. Die Fragen der Analogie zwischen Photonen und Elektronen und ihrer Grenzen.

Es muß hier zunächst eine in der Note von Ehrenfest nicht eingeführte Unterscheidung zwischen zwei verschiedenen Arten von Feldern sorgfältig durchgeführt werden. Diese nennen wir einerseits *große Felder*, die eine *große* und unter Umständen *unbestimmte Anzahl* von Teilchen beschreiben (bei der Materie mit Ψ_0 , bei den Photonen mit \vec{E}, \vec{H} bezeichnet); andererseits *kleine Felder*, die einem *einzigem* Teilchen zugeordnet sind (bei der Materie mit ψ_0 , beim Photon mit \vec{e}, \vec{h} bezeichnet). Die kleinen Felder sind selbst prinzipiell nicht direkt meßbar, sondern dies ist höchstens der Fall

für aus ihnen oder ihren Fourierkomponenten quadratisch gebildete Wahrscheinlichkeitsdichten. Die großen Felder sind in der Quantentheorie q -Zahlen (Operatoren oder Matrizen); für die Materie eingeführt von Klein, Jordan und Wigner, für die Photonen zu deuten als die mit einer gewissen durch die Endlichkeit des Wirkungsquantums begrenzten Genauigkeit klassisch meßbaren elektromagnetischen Feldstärken. Nur die kleinen Felder unter sich und die großen Felder unter sich dürfen überhaupt in Analogie gesetzt werden [trotzdem sowohl das kleine (\vec{e}, \vec{h}) - als auch das große (\vec{E}, \vec{H}) -Feld im Falle der Abwesenheit von Ladungen *beide* den Maxwell'schen Gleichungen genügen¹⁾]. Aber selbst diese beiden an sich richtigen Analogien haben ihre Grenzen, die nun diskutiert werden sollen.

1. *Grenzen der Analogie zwischen (\vec{e}, \vec{h}) - und ψ_q -Feld.* Betrachten wir die Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum (Fehlen von Ladungen) für das \vec{e}, \vec{h} -Feld eines Photons einerseits, die Dirac'sche Gleichung für ein kräftefreies Materieteilchen andererseits. Die (\vec{e}, \vec{h}) seien reell, die ψ_q können, wenn man will, zunächst auch reell gewählt werden²⁾. Da trifft man zunächst den von Ehrenfest bereits hervorgehobenen Unterschied:

a) *Für das Photon existiert kein Viererstromvektor, der die Kontinuitätsgleichung befriedigt und positiv definite Dichte hat* (Annahmen II. 2. und II. 3. sind nicht simultan erfüllbar). Wir müssen daraus schließen, daß für das Photonfeld außerhalb der Gültigkeit der geometrischen Optik (Strahlenoptik) für ein nicht monochromatisches Feld der Begriff der raum-zeitlich-lokalen Teilchendichte $W(\vec{x}, t)$ nicht sinnvoll existiert. Ich halte diese Feststellung für endgültig und *teile* voll und ganz die von Ehrenfest in Bemerkung B, 3 geäußerte Ansicht, daß „all die virtuosen Abhandlungen über die Analogien zwischen den Maxwell'schen Gleichungen einerseits und speziell den Diracgleichungen andererseits absolut nichts ergeben haben“. Man kann sogar sagen: Diese Abhandlungen haben etwas ergeben, was der Ansicht ihrer Verfasser entgegengesetzt ist: nämlich, daß der in Rede stehende Unterschied selbst durch noch so allgemeine mathematische Formalismen nicht beseitigt werden kann. Die Nicht-

¹⁾ L. de Broglies kürzlicher Versuch (C. R. **195**, 536 u. 862, 1932), die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen für das (\vec{e}, \vec{h}) -Feld aufzugeben, scheint dem Verfasser angesichts der hieraus entspringenden physikalischen Konsequenzen nicht geglückt zu sein.

²⁾ Man beachte, daß im kräftefreien Fall bei geeigneter Wahl der Matrizen α^i, β die Dirac'schen Gleichungen *reelle* Lösungen für ψ_q besitzen.

existenz eines den Annahmen II. genügenden W ist es, die es möglich macht, beim elektromagnetischen Feld mit *eindeutigen* Darstellungen der Lorentzgruppe (ohne Spinoren) auszukommen. Der physikalische Unterschied spiegelt sich direkt wieder in dem (ebenfalls auf keine Weise fortsetzkbaren) mathematischen Unterschied zwischen Feldgrößen, die bei der Lorentzgruppe sich gemäß *eindeutigen* Darstellungen, und solchen, die sich nach *zweideutigen* Darstellungen transformieren.

An dieser Stelle glaube ich auch die didaktische Frage beantworten zu können, wie man bei der Einführung in die Quantenmechanik die Analogien zwischen Photon und Elektron behandeln soll. Die Analogien betreffen diejenigen Eigenschaften der kleinen Felder des Photons und Elektrons, die bereits aus dem Annahmenkreis I folgen und bei denen kein exakter Begriff der Teilchendichte in Raum-Zeitgebieten, die mit Wellenlänge-Schwingungsperiode vergleichbare Dimensionen besitzen, benötigt wird (z. B. Wilsonbahn der γ -Strahlen = geometrisch-optischer Strahl des Lichtquants).

Das Fehlen des exakten Wahrscheinlichkeitsdichtebegriffes beim Photon (es haben nicht nur Landau und Peierls den richtigen Ausdruck für diese Dichte nicht finden können, sondern es *gibt keinen* richtigen Ausdruck für sie) äußert sich in der Konsequenz: *Das Verschwinden des (\vec{e}, \vec{h}) -Feldes an einer Raum-Zeitstelle hat keine direkte physikalische Bedeutung*, im Gegensatz zum Verschwinden des ψ_q -Feldes an einer Raum-Zeitstelle.

Noch eine Bemerkung über *monochromatische* Strahlungsfelder sei hier angefügt. In einem solchen sind die (über verglichen mit der Schwingungsdauer lange Zeiten erstreckten) zeitlichen Mittelwerte irgendwelcher quadratischer Funktionen der Feldstärken \vec{e} und \vec{h} als Raumfunktionen exakt meßbar. In Gebieten, die klein sind verglichen mit der Wellenlänge, wird durch die gewöhnlich benutzten Apparate¹⁾ in Interferenzfeldern, aber nicht $|\vec{e}^2| + |\vec{h}^2|$, sondern $|\vec{e}^2|$ bestimmt, wie dies bekanntlich bei den Versuchen über stehende Lichtwellen zutage tritt. Wichtig ist, daß die „ $|\vec{e}^2|$ -Apparate“ und die „ $|\vec{h}^2|$ -Apparate“ verschiedene Raumfunktionen ergeben.

b) Wir kommen nun zu einem *zweiten* Unterschied des (\vec{e}, \vec{h}) -Feldes von dem ψ_q -Feld, der von Ehrenfest in der Bemerkung B. 1. berührt wird und der mit der beim jetzigen Stand unserer Kenntnis allein durchführbaren Behandlung der „Zustände negativer Energie“ zusammenhängt.

¹⁾ Photozellen, photographische Platten.

Diese Behandlung ist für Elektron und Photon verschieden. Die *reellen* Lösungen der Maxwellgleichungen für das (\vec{e}, \vec{h}) -Feld haben die Eigenschaft, daß die Energiedichte $\rho = \frac{1}{2}(\vec{e}^2 + \vec{h}^2)$ (zwar ein zeitlich konstantes Volumenintegral besitzt, aber) an einer vorgegebenen Raumstelle nicht zeitlich konstant ist, sondern Oszillationen der Frequenz 2ν aufweist, wenn ν die Frequenz des Feldes selber ist. In einer Theorie, die so aufgebaut ist, als ob der genaue raum-zeitliche Verlauf von ρ und damit auch jene Oszillationen beobachtbar wären¹⁾, beschreiben diese reellen Lösungen also keine *stationären* Zustände. In dem Bestreben, solche Lösungen der Feldgleichungen zu finden, bei denen ρ an jeder Raumstelle *genau* zeitlich konstant ist, wird man dazu geführt, das (\vec{e}, \vec{h}) -Feld und den Ausdruck für ρ zu modifizieren. Unsere Theorie der Lichtemission und Absorption ist so gemacht, daß im Falle eines Photons mit bestimmter Frequenz und Fortschrittrichtung die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen durch den komplexen Faktor $e^{i\nu t}$ beschrieben wird und daß außerdem nur *der* Teil des (\vec{e}, \vec{h}) -Feldes gebraucht werden darf, bei dem die Zeitabhängigkeit bei Fourierzerlegung allein die $e^{-i\nu t}$ mit *positivem* ν enthält. Dieser Teil von \vec{e} heißt \vec{f} , der andere \vec{f}^* . Es zeigt sich, daß dann neben

$$\vec{e} = \vec{f} + \vec{f}^*$$

auch gilt

$$\vec{h} = -\frac{i}{\sqrt{\Delta}} \text{rot} (\vec{f} - \vec{f}^*).$$

Der Teil des (\vec{e}, \vec{h}) -Feldes, der die Zeitabhängigkeit $e^{+i\nu t}$ ($\nu > 0$) hat, würde Lichtemission im Grundzustand und Lichtabsorption im oberen Zustand ergeben (Photonen negativer Energie). Ferner ersetzt man $\frac{1}{2}(|e|^2 + |h|^2)$ durch den Ausdruck

$$\rho = 2 \vec{f} \vec{f}^*,$$

der im stationären Zustand keine zeitabhängigen Bestandteile mehr enthält. Die erwähnte Eigenschaft der Theorie der Wechselwirkung von Licht und Materie ist sehr allgemeiner Art, da sie nicht aus der speziellen Wahl des Hamiltonoperators, sondern bereits aus der Forderung folgt, daß die Wellenfunktion des Gesamtsystems in erster Näherung in ein Produkt zerfallen soll, dessen Faktoren sich auf die Materie allein bzw. das elektromagnetische Feld allein beziehen. (Die Wichtigkeit dieser Forderung wurde bereits im § 1 erwähnt.)

¹⁾ Man beachte: Die Oszillationen der (\vec{e}, \vec{h}) - bzw. ψ_ρ -Felder *selbst* sind es trivialerweise nicht!

[Nebenbei sei bemerkt, daß eine analoge Zerlegung des großen (q -Zahl) (\vec{E}, \vec{H}) -Feldes in \vec{F} und \vec{F}^* dann nötig ist, wenn man die Nullpunktsenergie der Strahlung fortschaffen will.]

Nun ergibt sich ein Unterschied zum Materiefeld:

Auch bei Wechselwirkung mit der Materie bleibt das Fehlen von „Photonen negativer Energie“ bestehen, während beim Materiefeld bekanntlich die Übergänge von „Zuständen positiver Energie“ zu „Zuständen negativer Energie“ nicht eliminiert werden konnten.

Diese Größen \vec{f} und \vec{f}^* bringen den nichtlokalen Operator $\sqrt{-\Delta}$ oder $1/\sqrt{-\Delta}$ notwendig in die Theorie hinein; nicht nur bei ihrer zeitlichen Abhängigkeit tritt er auf, sondern auch bei ihrem (bei Anwesenheit von Ladungen, die ihre zeitliche Abhängigkeit modifizieren) geradezu *unüberschaubaren* Verhalten bei Lorentztransformationen. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß bei den Diracwellen die Nebenbedingung, nur Felder mit Zuständen positiver Energie zu verwenden (Schrödinger), ebenfalls einen dem $\sqrt{-\Delta}$ -Operator analogen *nichtlokalen* Operator (nämlich $\sqrt{m^2 c^2 + \Delta}$) in die Theorie hineinbringen würde. *Diese nichtlokalen Operatoren*, die wohl *allgemein* als unnatürlich empfunden werden, sind charakteristisch für das Ausschließen von Zuständen negativer Energie.

Hier sind wir auf das ungelöste Problem gestoßen, was mit den „Zuständen negativer Energie“ vernünftigerweise zu geschehen hat. Wird es bei der Festsetzung: „Einem stationären Zustand entspricht notwendig eine Lösung mit der Zeitabhängigkeit $e^{-i\epsilon t}$ “ immer bleiben? Das hängt natürlich davon ab, wie man die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie beschreiben kann.

Noch wichtiger ist die Frage: Wird auch in einer künftigen Theorie des Materiefeldes, welche die Schwierigkeiten der Zustände negativer Energie zu vermeiden gestatten wird, der Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte \mathcal{W} bestehen bleiben? Der Verfasser vermutet, daß eine solche künftige Theorie eine wesentliche Modifikation des Raum-Zeitbegriffes (nicht nur des Feldbegriffes) in Gebieten der Dimension h/mc bzw. h/mc^2 bringen wird. Werden in einer solchen Theorie die hier diskutierten Unterschiede zwischen Photonen und Elektronen vergrößert oder verkleinert werden? Diese Frage müssen wir offen lassen.

Wir kommen zu einer weniger schwierigen Frage.

2. *Unterschiede zwischen dem Ψ_q - und dem (\vec{E}, \vec{H}) -Feld.* Das (\vec{E}, \vec{H}) -Feld hat die Eigenschaft, daß es im Grenzfall großer Lichtquantenzahlen ein klassisch meßbares Feld ist, d. h. daß dort nicht nur die Amplituden,

sondern auch die Phasen mit relativ sehr hoher Genauigkeit meßbar werden. Dabei ist aber wesentlich und entscheidend: *Jede Messung von \vec{E} oder \vec{H} in einem endlichen Zeitintervall ist mit einer unbestimmten Änderung der Anzahl der vorhandenen Photonen verbunden.* Man sieht dies daran, daß bei der Phasenmessung von \vec{E} oder \vec{H} die Lorentzkraft benutzt werden muß. Der benutzte geladene Probekörper wird bei seiner Beschleunigung dem zu messenden Feld strahlen und (je nach der Phasenbeziehung mit dem zu messenden Strahlungsfeld) Energie emittieren oder absorbieren, also die Lichtquantenzahl verändern. (Nach der Zeitdauer T der Messung richtet sich dabei die mittlere Frequenz $\nu \sim 1/T$ der gestreuten Quanten.) Dies ist keine Zufälligkeit des Meßverfahrens, sondern folgt auch aus dem Formalismus: Lichtquantenzahl N und \vec{E} oder \vec{H} sind nicht vertauschbar, die Versuchsanordnungen zur Messung dieser Größen schließen also einander aus (Komplementarität wie bei p und q).

Das Ψ_ρ -Feld hat nun der Fermistatistik statt der Bosestatistik zu gehorchen und das macht es schon allein unmöglich, es so wie ein klassisches Feld zu messen. Die Eigenwerte der Funktionen $\Psi_\rho(\vec{x})$ bestehen dann nämlich nicht aus der Gesamtheit aller kontinuierlichen Funktionen, sondern aus einer viel geringeren Mannigfaltigkeit gewisser Treppenfunktionen. Daher sind in diesem Falle die Ψ_ρ kein Feld im gewöhnlichen Sinne. Denken wir uns andererseits fingierte Elementarteilchen mit Bosestatistik bzw. betrachten wir α -Teilchen und nehmen an, daß sie zwar Kräfte aufeinander ausüben und unter dem Einfluß äußerer Strahlungsfelder erfahren, daß sie aber nicht zertrümmert werden und man von besonderen Struktureffekten absehen kann, d. h. daß sie sich wie Elementarpartikel verhalten. Dann gilt nach Peierls¹⁾: In einer Gesamtheit von gleichen Teilchen, selbst von solchen mit Bosestatistik, ist das Ψ_ρ -Feld *prinzipiell unmeßbar, solange keine Prozesse stattfinden, bei denen die Gesamtzahl der Teilchen sich ändert.* Es gehen dann eben in die Hamiltonfunktion nur Matrixelemente von $\Psi_\rho^* \Psi_\sigma$ oder $\Psi_\rho^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi_\sigma$ ein (welche Größen mit der Gesamtzahl der Teilchen vertauschbar sind). Die Wahl der Phasen der Ψ_ρ und daher die Ortsabhängigkeit von Real- und Imaginärteil ist gleichgültig. *In dem Fehlen jener Prozesse (über Zerstrahlungsprozesse wissen wir nichts) liegt auch das Fehlen des Analogons zur Lorentzkraft beim Materiefeld.*

¹⁾ Diese Bemerkung von Peierls stammt aus seinem unveröffentlichten Züricher Habilitationsvortrag über die Analogie zwischen Licht und Materie und wird hier mit seiner freundlichen Erlaubnis benutzt.

§ 3. Zur Frage der Formulierbarkeit der Quantenmechanik
als Nahwirkungstheorie.

Die in Rede stehende Frage ist eine sehr komplexe und von ihr gilt in besonderem Maße, daß das letzte Wort darüber durch die gegenwärtige Quantentheorie noch keineswegs gesprochen ist. Immerhin scheint es mir, daß sie auch in anderer Weise betrachtet werden kann, als es von Ehrenfest in seiner Note geschehen ist.

Zunächst scheint es nicht unbedingt empfehlenswert, den Begriff der *violdimensionalen Theorie*, d. h. einer Theorie, die N Teilchen durch einen $3N + 1$ -dimensionalen Konfigurationsraum beschreibt — mit dem Begriff der *Fernwirkungstheorie* zu identifizieren. Auch in der klassischen statistischen Mechanik wird z. B. ein violdimensionaler Phasenraum (wenn man die Zeit als besondere Dimension mitzählt, hat dieser freilich $6N + 1$ statt $3N + 1$ Dimensionen bei N Teilchen) zur Beschreibung des statistischen Verhaltens einer Gesamtheit von Teilchen eingeführt, und zwar selbst dann, wenn die Kräfte zwischen den Teilchen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, wo also von Fernwirkung kaum die Rede sein kann. Dabei können die $3N$ Ortskoordinaten der Teilchen als ihre Lagen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum beschreibend aufgefaßt werden.

Deshalb soll die in Rede stehende Frage hier nicht vom Standpunkt der Möglichkeit der Rückkehr zum vierdimensionalen Kontinuum diskutiert werden, als vielmehr in folgender Weise. In der klassischen Theorie geht man dadurch von der Fern- zur Nahwirkungstheorie über, daß man das Coulombsche Gesetz durch Hinzufügen des elektrischen Feldes als Zwischenbegriff in Differentialgleichungen des Feldes umschreibt. Die hier zu diskutierende Frage ist nun diese: *Kann man etwas Analoges auch in der Quantenmechanik machen?*

Berücksichtigen wir zunächst wie in der ursprünglichen Schrödingerschen Theorie des Konfigurationsraumes nur die elektrostatische Wechselwirkung der Teilchen, vernachlässigen also die Retardierung und die magnetische Wechselwirkung. Dann führen wir als Zwischenbegriff das von dem c -Zahl-Raum (und der c -Zahl-Zeit) abhängige Feld $E(\vec{x}, t)$ ein. Dabei sind durch \vec{x} die Koordinaten des *Aufpunktes* bestimmt im Gegensatz zu den $3N$ Koordinaten $\vec{X}^{(s)}$, $s = 1, \dots, N$ der N Teilchen. Die x_1, x_2, x_3 sind mit allen Größen vertauschbar, die $\vec{X}^{(s)}$ sind mit den Impulsen $\vec{p}^{(s)} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{X}^{(s)}}$ nicht vertauschbar. Das Feld $\vec{E}(\vec{x})$ ist mit den $\vec{X}^{(s)}$ ver-

tauschbar, aber nicht mit den $\vec{p}^{(s)}$. Es soll nämlich als Ersatz des Coulomb-schen Gesetzes die Gleichung gelten:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \sum_1^N e_s \delta(\vec{x} - \vec{X}^{(s)}). \quad (*)$$

Ist $r_s = |\vec{x} - \vec{X}^{(s)}|$ die Entfernung des s -ten Teilchens vom Aufpunkt, so wird in der Tat

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum \frac{e_s}{r_s^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{X}^{(s)}}{r_s}.$$

Als Schrödingergleichung hat man nun anzusetzen

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\sum_s \frac{\hbar^2}{2m_s} \Delta_s + \frac{1}{2} \int \vec{E}^2(x) dx_1 dx_2 dx_3 \right] \psi(t, \vec{X}^{(s)})$$

$$\left(\Delta_s = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_k^{(s)2}} \right).$$

Das wäre identisch mit der Schrödingergleichung, wenn nicht gelten würde

$$\frac{1}{2} \int \vec{E}^2(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \frac{e_s e_{s'}}{r_{ss'}},$$

worin $s = s'$ nicht ausgeschlossen ist. Die Selbstenergieterme $\frac{1}{r_{ss}}$ = ∞ sind also darin enthalten. Im übrigen könnte man sie endlich machen, wenn man in (*) statt der δ -Funktion eine endliche, in einem Gebiet mit Linear-dimensionen von der Größenordnung des Elektronenradius merklich von Null verschiedene D -Funktion, die für die Gestalt des Elektrons charakteristisch wäre, einführen würde.

Das angedeutete Verfahren läßt sich, wie in der Quantenelektrodynamik gezeigt wird¹⁾, so verallgemeinern, daß die magnetischen und die Strahlungswirkungen (Retardierung) mit beschrieben werden. Auch die D -Funktion der Elektronengestalt ließe sich mitführen, nur wäre diese Gestalt dann nicht relativistisch invariant (genau wie in der klassischen Theorie).

Es hat gewisse Vorteile, nicht das große Ψ -Feld für die Materie und nicht das Landau-Peierls-Feld für die Lichtquanten, sondern \vec{E} , \vec{H} (nicht vertauschbar!) und den Konfigurationsraum der $X_k^{(s)}$ für die Materie zu verwenden, weil diese Größen es sind, die sich in Grenzfällen klassisch verhalten. Für punktförmige Teilchen gibt es dann eine Eigenschaft der Gleichungen, die als

¹⁾ Vgl. hierzu den eingangs erwähnten, in Druck befindlichen Artikel des Verfassers im Handbuch der Physik.

relativistische Invarianz betrachtet werden kann und die (ohne Benutzung des großen Ψ -Feldes) bewiesen werden kann. Auch abgesehen von der Selbstenergiefrage scheint mir die Theorie aber nicht befriedigend zu sein: *nicht* wegen einer Fernwirkungsannahme, die nach meiner Meinung *nicht* mehr besteht, sondern wegen der merkwürdigen Auszeichnung des Raumes vor der Zeit, die zum Ausdruck kommt in der Benutzung des *einen* t für die Zeit statt der Verwendung von Partikelzeiten $t^{(s)}$ neben der Aufpunktszeit t , die erst die Theorie mehr symmetrisch machen würde.

Es ist andererseits wahrscheinlich, daß die Selbstenergiefrage nur durch eine Modifikation des jetzigen Raum-Zeitbegriffes eine befriedigende Lösung wird finden können. Eine solche Modifikation würde auch die Begriffe „Nahewirkung“ und „Fernwirkung“ umgestalten müssen, da diese ja wesentlich den gewöhnlichen Raum-Zeit-Begriff voraussetzen.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgen. Technischen Hochschule.
