

Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons.

Von **W. Heisenberg** in Leipzig.

(Eingegangen am 21. Juni 1934.)

I. Anschauliche Theorie der Materiewellen: 1. Die inhomogene Differentialgleichung der Dichtematrix. 2. Die Erhaltungssätze. 3. Anwendungen (Polarisation des Vakuums). II. Quantentheorie der Wellenfelder: 1. Aufstellung der Grundgleichungen. 2. Anwendungen (die Selbstenergie der Lichtquanten).

Die Absicht der vorliegenden Arbeit¹⁾ ist, die Diracsche Theorie des Positrons²⁾ in den Formalismus der Quantenelektrodynamik einzubauen. Dabei soll gefordert werden, daß die Symmetrie der Natur in positiver und negativer Ladung von vornherein in den Grundgleichungen der Theorie zum Ausdruck kommt, ferner, daß außer den durch die bekannten Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik bedingten Divergenzen keine neuen Unendlichkeiten im Formalismus auftreten, d. h. daß die Theorie eine Approximationsmethode liefert zur Behandlung des Problemkreises, der auch nach der bisherigen Quantenelektrodynamik behandelt werden konnte. Durch das letztgenannte Postulat unterscheidet sich der vorliegende Versuch von den Untersuchungen von Fock³⁾, Oppenheimer und Furry⁴⁾, Peierls⁵⁾, denen er sonst ähnlich ist; er schließt sich hier vielmehr eng an eine Arbeit von Dirac⁶⁾ an. Gegenüber der Diracschen Behandlung betont die Arbeit die Bedeutung der Erhaltungssätze für das Gesamtsystem Strahlung—Materie und die Notwendigkeit, die Grundgleichungen der Theorie in einer über das Hartreesche Approximationsverfahren hinausgehenden Weise zu formulieren.

I. Anschauliche Theorie der Materiewellen.

1. *Die inhomogene Differentialgleichung der Dichtematrix.* Die wichtigsten Resultate der oben zitierten Diracschen Arbeit seien zuerst kurz wiederholt: Ein quantenmechanisches System von vielen Elektronen, die das Paulische Prinzip erfüllen und sich ohne gegenseitige Wechselwirkung in einem vor-

¹⁾ Diese Arbeit ist aus Diskussionen entstanden, die ich teils schriftlich, teils mündlich mit den Herren Pauli, Dirac und Weisskopf geführt habe und für die ich ihnen herzlich danke. — ²⁾ Z. B.: P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics*, p. 255. Oxford 1930. — ³⁾ V. Fock, *C. R. Leningrad (N. S.)* 1933, S. 267—271 Nr 6. — ⁴⁾ W. H. Furry u. I. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245, 1934. — ⁵⁾ R. Peierls, im Erscheinen. — ⁶⁾ P. A. M. Dirac, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **30**, 150, 1934 (im folgenden stets als l. c. zitiert).

gegebenen Kraftfeld bewegen, kann charakterisiert werden durch eine „Dichtematrix“:

$$(x' t' k' | R | x'' t'' k'') = \sum_n \psi_n^*(x' t' k') \psi_n(x'' t'' k''), \quad (1)$$

wobei $\psi_n(x' t' k')$ die normierten Eigenfunktionen der mit einem Elektron besetzten Zustände bedeuten, $x' t' k'$ bzw. $x'' t'' k''$ sind Orts-, Zeit- und Spinvariable. Aus der Dichtematrix können alle physikalisch wichtigen Eigenschaften des quantenmechanischen Systems wie Ladungsdichte, Stromdichte, Energiedichte usw. abgelesen werden. Allerdings gilt dies immer nur in der Näherung, in der von der Wechselwirkung der Elektronen abgesehen werden kann, d. h. in der die typisch quantentheoretischen unanschaulichen Züge des Geschehens nicht vorkommen; die Dichtematrix vermittelt also ein anschauliches, korrespondenzmäßiges Bild des wirklichen Vorgangs — ähnlich wie die klassisch-mechanischen Atommodelle dies tun; die Forderung, daß die ψ_n in (1) normiert sein sollen, die nach Dirac auch in der Form (für $t' = t''$)

$$R^2 = R \quad (2)$$

ausgedrückt wird, kann zu den Quantenbedingungen der früheren halb-klassischen Theorie in Parallele gesetzt werden.

Die zeitliche Änderung der Dichtematrix wird durch die Diracsche Differentialgleichung bestimmt:

$$\mathcal{H}R = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{e}{c} A_0(x') + \alpha_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_s} - \frac{e}{c} A_s(x') \right) + \beta m c \right] R = 0. \quad (3)$$

Es werden von jetzt ab durchweg die folgenden Bezeichnungen verwendet:

Koordinaten:

$$ct' = x'_0 = -x^{0'}, \quad x'_i = x^{i'}, \quad x'_\lambda - x'_\lambda = x_\lambda, \quad \frac{x'_\lambda + x'_\lambda}{2} = \xi_\lambda.$$

Potentiale:

$$A_0 = -A^0, \quad A_i = A^i,$$

Feldstärken:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial \xi_\mu} = F^{\nu\mu}, \quad F^{0s} = -F_{0s}.$$

$$(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = \mathfrak{E}, \quad (F^{23}, F^{31}, F^{12}) = \mathfrak{H}.$$

Spinmatrizen:

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha_0 = -1, \quad \alpha^i = \alpha_i.$$

Griechische Indizes laufen stets von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Das Herauf- oder Herunterziehen der Indizes soll nach den üblichen Formeln

der Relativitätstheorie erfolgen. Über doppelt auftretende Indizes soll stets summiert werden. Da sich die α^v nicht einfach wie Vektoren transformieren, hat für diese Größen die gewählte Bezeichnungsweise nur den Wert einer zweckmäßigen Abkürzung. Gleichung (3) nimmt z. B. jetzt die Form an:

$$\left\{ \alpha^\lambda \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \frac{e}{c} A^\lambda(x') \right] + \beta m c \right\} R = 0.$$

Wenn, wie die Diracsche Löchertheorie es fordert, alle Zustände negativer Energie bis auf endlich viele besetzt und auch nur endlich viele Zustände positiver Energie besetzt sind, so wird die Matrix R auf dem durch

$$x_0 x^0 = 0 \quad (5)$$

definierten Lichtkegel singular. Man betrachtet dann nach Dirac zweckmäßig an Stelle der Matrix R die neue Matrix¹⁾

$$R_S = R - \frac{1}{2} R_F, \quad (6)$$

wobei R_F den Wert von R für den Zustand des Systems bezeichnet, bei dem jedes Elektronenniveau besetzt ist. R_F geht für $t' = t''$, wie man leicht nachweist, über in die Diracsche δ -Funktion der Variablen $x'k'$, $x''k''$. Die Matrix R_S hat bereits die Symmetrie in bezug auf das Vorzeichen der Ladung, die später im Formalismus wichtig wird: sie geht durch Addition von $\frac{1}{2} R_F$ über in die der „Löcher“theorie entsprechende Matrix R ; durch Subtraktion von $\frac{1}{2} R_F$ geht sie in die negative Dichtematrix einer Verteilung über, bei der die Zustände positiver Energie besetzt und die negativer Energie frei sind; Vertauschung der Punkte $x't'k'$ und $x''t''k''$ in R_S und Vorzeichenwechsel von R_S sind einem Vorzeichenwechsel der Elektronenladung äquivalent. Die Singularität der Matrix R_S auf dem Lichtkegel ist von Dirac untersucht worden; man kann die Matrix in der Form

$$\langle x'k'' | R_S | x''k'' \rangle = u \frac{\alpha^0 x_0}{(x^\lambda x_\lambda)^2} - \frac{v}{x^\lambda x_\lambda} + v \log |x^\lambda x_\lambda| \quad (7)$$

darstellen, wobei

$$u = -\frac{i}{2\pi^2} e^{-\frac{e i}{c \hbar} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda}. \quad (8)$$

(Das Integral ist auf der geraden Linie von P' nach P'' zu nehmen.)

¹⁾ Das Doppelte der Matrix R_S ist die von Dirac mit R_1 bezeichnete Matrix.

Die Größe w ist durch eine Differentialgleichung eindeutig festgelegt, v ist nur bis auf ein additives Glied der Form $x^\lambda x_\lambda \cdot g$ bestimmt. Von der Dichtematrix R schließt man gewöhnlich auf Ladungsdichte, Stromdichte usw., indem man z. B. für die Ladungsdichte den Ansatz

$$\rho(x) = e \sum_k (xk | R | xk) \quad (9)$$

macht; entsprechend für die anderen physikalischen Größen. Dieser Schluß ist nun wegen der Singularität der Matrix R offenbar unrichtig. Z. B. wird, wenn kein äußeres Feld vorhanden ist, nur die Abweichung der Dichtematrix von der Matrix des Zustandes, bei dem alle Niveaus negativer Energie ausgefüllt sind, zur Ladungs- und Stromdichte beitragen. Man wird also nach Dirac von der Dichtematrix eine durch die äußeren Felder eindeutig bestimmte andere Dichtematrix abzuziehen haben, um die „wirkliche“ Dichtematrix — wir nennen sie $(x'k' | r | x''k'')$ — zu bekommen, die für Ladungs- und Stromdichte, Energiedichte usw. entsprechend Gleichung (9) maßgebend ist. Wir setzen

$$r = R_S - S, \quad (10)$$

wobei S eine durch die Potentiale A^λ eindeutig bestimmte Funktion von $x'_\lambda k'$ und $x''_\lambda k''$ sein soll.

An Stelle der Differentialgleichung (3) tritt also jetzt die Gleichung

$$\mathcal{H}r = -\mathcal{H}S. \quad (11)$$

Die rechte Seite ist eine noch näher zu bestimmende Funktion des elektromagnetischen Feldes; die ursprünglich homogene Diracsche Gleichung (3) wird demnach ersetzt durch die inhomogene Gleichung (11). Eine solche Gleichung ist der naturgemäße Ausdruck der Tatsache, daß Materie entstehen und vergehen kann; die Art der Entstehung und Vernichtung wird durch die mathematische Form der Größe HS festgelegt. Wenn keine äußeren Felder vorhanden sind, so soll S gegeben sein durch den Wert von R_S für die Verteilung, bei der alle Zustände negativer Energie besetzt sind; denn wir nehmen an, daß im feldfreien Vakuum die Matrix r überall verschwindet. Die Menge von Materie, die im ganzen entsteht, wenn ein äußeres Feld eingeschaltet und wieder ausgeschaltet wird, kann ermittelt werden ohne nähere Bestimmung von S bei Anwesenheit äußerer Felder. Denn wenn R_S (und damit r) vor Einschalten irgendwelcher Felder bekannt war, so läßt sich aus Gleichung (3) der Wert von R_S nach dem Wiederausschalten des Feldes ermitteln. Nach dem Ausschalten des Feldes hat aber S wieder den ursprünglichen Wert, also kann auch r berechnet werden. Es können aber umgekehrt die Resultate über die Materieerzeugung beim

Ein- und Ausschalten von Feldern allgemeine Anhaltspunkte geben über die Form der rechten Seite von (11) bei Anwesenheit von Feldern. Z. B. zeigt eine einfache Störungsrechnung, daß die beim Ein- und Ausschalten erzeugte Gesamtmenge von Materie im allgemeinen bereits dann unendlich ist, wenn der zeitliche Differentialquotient der elektrischen oder magnetischen Feldstärke beim Ein- und Ausschaltvorgang irgendwann unstetig war, und erst recht dann, wenn Feldstärke oder Potentiale selbst unstetig waren; daraus kann man schließen, daß die rechte Seite von (11) neben den Potentialen und Feldstärken auch deren erste und zweite Ableitungen enthalten muß.

Die Bestimmung von S bei Anwesenheit äußerer Felder nimmt Dirac (l. c.) in der Weise vor, daß er ein bestimmtes mathematisches Verfahren beschreibt, welches nach der Reihe die singulären Teile der Matrix R_s liefert; die Summe dieser so gewonnenen singulären Teile identifiziert Dirac mit S . Das von Dirac gewählte mathematische Verfahren liefert aber im kräftefreien Fall nicht den oben definierten Wert von S , sondern einen, der sich von ihm um eine auf dem Lichtkegel reguläre Matrix unterscheidet. Obwohl demnach eine eindeutige Festlegung der Inhomogenität in (11) aus formalen Argumenten allein kaum möglich ist, wird man durch Berücksichtigung der Erhaltungssätze von Ladung, Energie und Impuls die Möglichkeiten für S so weit einschränken können, daß ein bestimmter Wert als einfachste Annahme ausgezeichnet werden kann. Den Wert von S , der bei Abwesenheit äußerer Kräfte und Potentiale gilt (vgl. oben) und der bei Dirac, l. c., Gleichung (20) bis (22) berechnet ist, bezeichnen wir als S_0 . Wenn zwar keine Felder vorhanden sind, wohl aber Potentiale in Gleichung (3) vorkommen, deren Rotation verschwindet, so ist S_0 zu ersetzen durch

$$e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0.$$

Die Größe S wird also als wichtigstes Glied, das die höchste Singularität auf dem Lichtkegel besitzt, diese Größe enthalten, wobei das Integral wieder auf der geraden Linie von P' nach P'' genommen werden soll. Wir setzen

$$S = e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0 + S_1. \quad (12)$$

Entwickelt man S_1 für kleine x_λ , so muß es nach (7) in der Form

$$S_1 = \frac{a}{x_\lambda x^\lambda} + b \log \left| \frac{x_\lambda x^\lambda}{C} \right| \quad (13)$$

dargestellt werden können. Da letzten Endes die Dichtematrix nur für die Berechnung von Ladungs-, Strom- und Energiedichte wichtig ist, so genügt es (vgl. 2.), von der Entwicklung der Größe a nach x_λ nur die Glieder bis zur dritten Ordnung in x_λ einschließlich, von b die Glieder bis zur ersten Ordnung in x_λ zu kennen; ferner genügt aus dem gleichen Grunde die Berechnung der Glieder, die die α^λ nur linear enthalten. Ein mit Gleichung (7) und den Diracschen Resultaten über die Singularitäten der Dichtematrix verträglicher Ausdruck für a und b lautet (bis auf die höheren Glieder):

$$\left. \begin{aligned} a &= u \left\{ \frac{e i}{24 \hbar c} x_\rho x^\sigma \alpha^\lambda \left(\frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial \xi_\rho} - \delta_\lambda^\rho \frac{\partial F_{\tau\sigma}}{\partial \xi_\tau} \right) - \frac{e^2}{48 e^2 \hbar^2} x_\rho x_\sigma x^\tau \alpha^\rho F^{\mu\sigma} F_{\mu\tau} \right\}, \\ b &= u \left\{ \frac{e i}{24 \hbar c} \alpha^\lambda \frac{\partial F_{\tau\lambda}}{\partial \xi_\tau} + \frac{e^2}{24 \hbar^2 c^2} x_\lambda \alpha^\mu \left(F_{\tau\mu} F^{\tau\lambda} - \frac{1}{4} \delta_\mu^\lambda F_{\tau\sigma} F^{\tau\sigma} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Feldstärken sind hier jeweils an der Stelle $\frac{x'_i + x''_i}{2} = \xi_i$ zu nehmen. Die Größe u ist durch Gleichung (8) gegeben.

Definiert man S durch die Gleichungen (12) bis (14), so kann die Differenz $R_S - S$ noch auf dem Lichtkegel singulär werden durch Glieder vom Typus $\frac{x_\lambda x_\mu x_\nu x_\pi}{x_\rho x^\rho} \cdot A^{\lambda\mu\nu\pi}$, oder $x_\lambda x_\mu A^{\lambda\mu} \log |x_\rho x^\rho|$, oder $\frac{(\alpha^\lambda \alpha^\mu - \alpha^\mu \alpha^\lambda) A_{\mu\lambda}}{x_\rho x^\rho}$.

In all diesen Fällen kann man aber aus der Dichtematrix auf Strom- und Ladungsdichte, Energie- und Impulsdichte schließen, indem man den Grenzübergang $x_\lambda \rightarrow 0$ nicht auf dem Lichtkegel, sondern von raumartigen oder zeitartigen Richtungen her ausführt. Die eben genannten singulären Glieder tragen dann nichts bei (die in α_λ nicht linearen Glieder fallen schon vor dem Grenzübergang weg).

Die Matrizen R , R_S , S und S_0 sind sämtlich hermitisch, d. h. sie gehen bei Vertauschung von $x'k'$ mit $x''k''$ (also bei Vorzeichenumkehr von x) in den konjugierten Wert über.

Die Berechnung der Formeln (14) erfolgt am einfachsten nach dem von Dirac (l. c.) angegebenen Verfahren. Die mathematische Form der Ausdrücke (14) zeigt, daß die bei der Festsetzung der Größen a und C noch vorhandene Willkür, wenn man keine wesentlich komplizierteren Ausdrücke für (14) zulassen will, eigentlich nur darin besteht, daß zu a ein Ausdruck der Form $x_\rho x^\rho \alpha_\lambda \frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial \xi_\sigma}$ und ein anderer der Form $x_\rho x^\rho x_\lambda \alpha^\lambda F^{\tau\sigma} F_{\tau\sigma}$ addiert werden könnte, ohne Veränderung der Singularitäten der Matrix S ; ferner ist C ganz willkürlich. Für die aus der Dichtematrix folgenden Ladungs- und Stromdichten geben die beiden Unbestimmt-

heiten (in a und C) in gleicher Weise zu einer additiven Ladungs- und Stromdichte Anlaß. Man kann daher das erste Glied in a in der in (14) angegebenen Weise willkürlich festlegen und alle Unbestimmtheit der Ladungsdichte auf die Größe C schieben. Das zweite Glied in a ist dann, wie in 2. gezeigt wird, durch die Erhaltungssätze so bestimmt, wie in Gleichung (14) angegeben. Die Willkür bei der Wahl der Konstanten C schließlich ist deshalb uninteressant, weil nach Dirac für die in (7) definierte Matrix w die Gleichung $\mathcal{A}w = 0$ gilt; d. h. in der rechten Seite von (11) fällt die Größe C (bis auf Glieder, die α^2 oder x_2 quadratisch enthalten) heraus. Dies ist jedoch nur dann richtig, wenn das elektromagnetische Feld mit allen Ableitungen stetig ist und die Matrix w nach x_2 und ξ_2 entwickelt werden kann. Macht man diese Annahme, so nimmt man den Nachteil in Kauf, daß man die Theorie nicht einfach an den Spezialfall des feldfreien Raumes (z. B. durch Störungsrechnung) anschließen kann. Läßt man unstetige Änderungen höherer Differentialquotienten der Felder oder andere Singularitäten zu, so gilt an den betreffenden singulären Stellen die Gleichung $\mathcal{A}w = 0$ nicht mehr, und die Festlegung der Größe C wird wichtig. In diesem Fall kann die zweckmäßige Wahl der Größe C durch folgende Überlegung gefunden werden: Man denke sich ein aus einer vorgegebenen äußeren Ladungsdichte entspringendes Feld adiabatisch vom Feld „Null“ ausgehend eingeschaltet. Dann wird durch dieses Einschalten ein durch die Matrix r gegebenes Materiefeld entstehen; dieses Materiefeld wird, wie die Gleichungen (13) und (14) lehren, je nach der Wahl von C die äußere Ladungsdichte ganz oder teilweise kompensieren oder sie vergrößern; wir wollen nun C so wählen, daß die Gesamtladung des durch r gegebenen Materiefeldes bei dem betrachteten Prozeß verschwindet; wenn dies nicht der Fall wäre, so würde nämlich beim „Einschalten“ der äußeren Ladungsdichte diese gar nicht getrennt werden können von der entstehenden Elektronenladungsdichte, d. h. man würde als „äußere“ Ladungsdichte schon die Summen der beiden Dichten definiert haben. Auf die mathematische Behandlung dieser Frage werden wir in 3. zurückkommen. Dort werden wir auch die Berechnung der Größe C nachholen — die ja nach dem oben Gesagten eher mathematische als physikalische Bedeutung hat; hier sei nur ihr Wert angegeben:

$$C = 4 \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 e^{-2/3 - 2\gamma}, \quad (15)$$

wobei γ die Eulersche Konstante: $\gamma = 0,577\dots$ bezeichnet.

Damit ist die Bestimmung der Inhomogenität der Differentialgleichung (11) durchgeführt. Hinsichtlich der aus der Dichtematrix r folgenden Ströme

sind unsere Annahmen denen von Dirac (l. c.) äquivalent; dagegen liefert, wie mir Herr Dirac freundlicherweise mitteilte, die hier getroffene Festsetzung für die Matrix S eine andere Energie- und Impulsdichte als die Diracsche Festsetzung.

2. Die Erhaltungssätze. Aus der Dichtematrix r können in der üblichen Weise Ladungs- und Stromdichte, und nach einer Untersuchung von Tetrode¹⁾ Energie- und Impulstensor der Materiewellen durch die folgenden Gleichungen hergeleitet werden:

$$\left. \begin{aligned} s_\lambda(\xi) &= e \sum_{k'k''} \alpha_{k'k''}^\lambda(\xi k' | r | \xi k''); \\ U_v^u(\xi) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ i c \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{2} \left[A^u \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^u \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \sum_{k'k''} \alpha_{k'k''}^v \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \right\} \end{aligned} \right\} (16)$$

Um zu zeigen, daß für die so definierten Größen die Erhaltungssätze in der üblichen Form gelten, soll zunächst die folgende Gleichung bewiesen werden:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k'k''} \alpha_{k'k''}^\lambda \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} - \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \\ \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) = 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

bis auf Glieder, die in den x_λ mindestens quadratisch sind. Gleichung (17) ist äquivalent der Behauptung

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k'k''} \alpha_{k'k''}^\lambda \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} - \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \\ \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | S | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) = 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

bis auf quadratische Glieder in x_λ ; denn für die Matrix R_S gilt ja die Gleichung $\mathcal{A}R_S = 0$, also auch sicher Gleichung (17). Nun ist

$$\left. \begin{aligned} \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} - \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + \frac{e}{c} A^\lambda \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \\ = e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot \frac{e}{c} \int_{P'}^{P''} F^{\lambda u} dx_u, \end{aligned} \right\} (19)$$

¹⁾ H. Tetrode, ZS. f. Phys. 49, 858, 1928.

und $\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} S_0 = 0$. Beachtet man noch, daß S_0 in der Form

$$\alpha^\lambda x_\lambda f(x^0 x_e) + \beta m c g(x^0 x_e)$$

geschrieben werden kann, so folgt, daß Gleichung (18) jedenfalls für den ersten Anteil

$$e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0$$

von S richtig ist. Es ist jetzt also Gleichung (18) noch für den Anteil S_1 zu zeigen. Ihre Gültigkeit für den Anteil $b \log \left| \frac{x_e x^0}{C} \right|$ von S_1 ist dabei wieder selbstverständlich, weil für die Matrix w nach Dirac $\mathcal{A}(w = 0$ gilt (vgl. jedoch S. 215). Es bleibt also noch die Diskussion des Anteils $a/x_\lambda x^\lambda$. Die Durchrechnung zeigt, daß nach (14) die von der Differentiation nach ξ_λ herrührenden Glieder im ersten Teil von a wegen Gleichung (19) gerade die vom zweiten Teil aufheben. Damit ist die Gültigkeit von Gleichung (17) erwiesen.

Aus Gleichung (17) folgt, wenn man in ihr zum limes $x_\lambda \rightarrow 0$ übergeht, der Erhaltungssatz der Ladung:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} e \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^\lambda (\xi k' | r | \xi k'') = \frac{\partial s_\lambda}{\partial \xi_\lambda} = 0. \quad (20)$$

Der Grenzübergang $x_\lambda \rightarrow 0$ ist nach den Bemerkungen zu Gleichung (14) nicht auf dem Lichtkegel, sondern entweder von einer raumartigen oder einer zeitartigen Richtung her auszuführen.

Für den Erhaltungssatz von Energie und Impuls findet man in derselben Weise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu^u(\xi)}{\partial \xi_\nu} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ i c \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{2} \left[A^\mu \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^\mu \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \left[A^\mu \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^\mu \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \\ &\quad \cdot \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^\nu \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right), \end{aligned}$$

und nach (17)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_v^\mu(\xi)}{\partial \xi_v} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ ic\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{2} \left[A^\mu \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^\mu \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right\} \\ &\left[- \frac{e}{ic\hbar} A^v \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + \frac{e}{ic\hbar} A^v \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \sum_{k', k''} \alpha_{k', k''}^v \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_v} \left[A^\mu \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^\mu \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \\ &\qquad \qquad \qquad \sum_{k', k''} \alpha_{k', k''}^v \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \\ &= -e F^{v\mu}(\xi) \sum_{k', k''} \alpha_{k', k''}^v(\xi k' | r | \xi k'') = -F^{v\mu} s_r. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Addiert man also zu U_v^μ den Energie-Impulstensor des Maxwell'schen Feldes:

$$V_r^\mu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\tau\mu} F_{\tau v} + \frac{1}{4} \delta_r^\mu F^{\tau\sigma} F_{\tau\sigma} \right) \quad (22)$$

und legt die Maxwell'schen Gleichungen in der Form:

$$\frac{\partial F_{\tau v}}{\partial \xi_v} = -4\pi s_\tau \quad (23)$$

zugrunde, so gilt für den Tensor

$$T_v^\mu = U_v^\mu + V_v^\mu \quad (24)$$

die Beziehung:

$$\frac{\partial T_v^\mu}{\partial \xi_v} = 0. \quad (25)$$

Nach Tetrode (l. c.) ist übrigens die Differenz $U_{\mu v} - U_{v\mu}$ ein Tensor, dessen Divergenz verschwindet. Man kann also den Energie-Impulstensor des Materiefeldes auch symmetrisieren, ohne die Gültigkeit von (25) zu stören.

Die bisherigen Resultate kann man in folgender Weise kurz zusammenfassen: Beschränkt man sich auf eine korrespondenzmäßige anschauliche Theorie des Materiefeldes, so kann die bekannte Schwierigkeit des Auftretens negativer Energieniveaus in der Dirac'schen Theorie dadurch vermieden werden, daß man die homogene Dirac'sche Differentialgleichung (3) ersetzt durch eine inhomogene Gleichung, wobei die Inhomogenität für die „Paarerzeugung“ maßgebend ist. Für das dieser Gleichung genügende Materiefeld gelten zusammen mit dem Maxwell'schen Feld die üblichen Erhaltungssätze, gleichzeitig sind die Energien des Materiefeldes und die des Strahlungsfeldes einzeln stets positiv.

Die Invarianz der Theorie gegenüber einer Vorzeichenänderung der Elementarladung kann man am einfachsten in folgender Weise erkennen: Man ersetze in den Gleichungen (11) und (16) $+e$ durch $-e$ und außerdem $(x'k'|r|x''k')$ durch $-(x''k''|\bar{r}|x'k')$. Für die Matrix \bar{r} gelten dann wieder die ursprünglichen Gleichungen (11) und (16).

3. *Anwendungen.* Zwei einfache Beispiele sollen die Anwendung der in 1. und 2. geschilderten Methode illustrieren: Wir nehmen zunächst an, daß ein als kleine Störung betrachtetes skalares Potential A_0 langsam eingeschaltet und dann konstant gehalten werde und fragen nach der im ursprünglich leeren Raum entstehenden Materie; dabei soll die Ladungsdichte, die zum Potential A_0 Anlaß gibt, als „äußere Ladungsdichte“ bezeichnet werden¹⁾.

Wir lösen zunächst die Diracsche Differentialgleichung für ein Elektron, dessen Zustand vor Einschalten des Feldes durch eine ebene Welle repräsentiert ist; seine Eigenfunktion heiße ψ_n , und es gelte vor Einschalten des Feldes

$$\psi_n(x') = u_n(x') e^{\frac{i}{\hbar} p_n^0 x'_0}. \quad (26)$$

Wir setzen

$$\psi_n(x') = \sum_m c_{nm}(x'_0) u_m(x') e^{\frac{i}{\hbar} p_m^0 x'_0} \quad (27)$$

und aus

$$\left\{ \alpha^i \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A^i(x') \right] + \beta m c \right\} \psi = 0$$

folgt in der üblichen Weise:

$$\frac{d}{dx'_0} c_{nm} = \frac{i}{\hbar} H_{nm} e^{\frac{i}{\hbar} (p_n^0 - p_m^0) x'_0}, \quad (28)$$

wobei

$$H_{nm} = \int u_m^*(x''') \frac{e}{c} \alpha^i A^i(x''') u_n(x''') dx'''. \quad (29)$$

Hier bedeutet $\int dx'''$ die Integration über die Ortsvariablen und die Summation über die Spinindizes.

Aus (28) ergibt sich, wenn die H_{nm} zeitlich konstant geworden sind:

$$c_{nm} = H_{nm} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (p_n^0 - p_m^0) x_0} - \epsilon_{nm}}{p_n^0 - p_m^0} + \delta_{nm}. \quad (30)$$

Die Konstanten ϵ_{nm} hängen dabei von der Art des zeitlichen Anstiegs der H_{nm} ab; wir wollen annehmen, daß der Anstieg so langsam und gleichmäßig

¹⁾ Dieses Problem ist im wesentlichen schon von Dirac in seinem Bericht für den Solvay-Kongreß 1933 behandelt worden.

erfolgt sei, daß die ϵ_{nm} in hinreichender Näherung verschwinden. Dann gilt also

$$c_{nm} = H_{nm} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(p_n^0 - p_m^0)x_0}}{p_n^0 - p_m^0} + \delta_{nm}$$

und

$$\psi_n(x') = \left[\sum_m u_m(x') \frac{H_{nm}}{p_n^0 - p_m^0} + u_n(x') \right] e^{\frac{i}{\hbar} p_n^0 x_0'} \quad (31)$$

Glieder von höherer als erster Ordnung in den H_{nm} werden im folgenden stets vernachlässigt. Für die Matrix R_S gilt nach ihrer Definition:

$$(\mathbf{x}' k' | R_S | \mathbf{x}'' k'') = \frac{1}{2} \left[\sum_{p_n^0 > 0} \psi_n^*(\mathbf{x}' k') \psi_n(\mathbf{x}'' k'') - \sum_{p_n^0 < 0} \psi_n^*(\mathbf{x}' k') \psi_n(\mathbf{x}'' k'') \right] \quad (32)$$

Die Summe über alle Zustände können wir nun einteilen in ein Integral über die Impulse und eine Summe über vier mögliche Zustände bei jedem Impuls. Der Operator

$$\frac{\alpha^l p^l + \beta m c}{|p^0|},$$

bei dem im Zähler über l nur von 1 bis 3 (wie stets bei lateinischen Indizes) summiert werden soll, hat die Eigenschaft, daß er $+1$ ergibt, wenn er auf irgendeinen Zustand positiver Energie angewandt wird, und -1 bei einem Zustand negativer Energie. Mit Hilfe dieses Operators lassen sich also die Summationen über die Spinzustände leicht ausführen und es bleiben nur die Integrale über die Impulse übrig; dabei soll im folgenden stets $t' = t''$, d. h. $x_0' = x_0''$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}' k' | R_S | \mathbf{x}'' k'') &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{h^3} \frac{\alpha^l p^l + \beta m c}{|p^0|} e^{\frac{i}{\hbar} p^0 (x_0'' - x_0')} \\ &\quad - \frac{1}{8} \int d\mathbf{x}''' \int \frac{d\mathbf{p}'}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}''}{h^3} e^{\frac{i}{\hbar} [x_1''' (p'^1 - p''^1) + p''^1 x_1' - p'^1 x_1'']} \\ &\quad \left\{ \left(1 + \frac{\alpha^l p''^l + \beta m c}{|p^{0''}|} \right) \frac{e^{\frac{e}{c} A^0(x''')}}{|p^{0'}| + |p^{0''}|} \left(1 - \frac{\alpha^l p'^l + \beta m c}{|p^{0'}|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\alpha^l p''^l + \beta m c}{|p^{0''}|} \right) \frac{e^{\frac{e}{c} A^0(x''')}}{|p^{0'}| + |p^{0''}|} \left(1 + \frac{\alpha^l p'^l + \beta m c}{|p^{0'}|} \right) \right\} \\ &\quad + \text{konj.} \end{aligned} \quad (33)$$

Das erste Glied in (33) stellt die Matrix S_0 dar und wird bei der Bildung von r von R_s abgezogen. Die beiden nächsten Glieder gehen über in

$$-\frac{1}{4} \int dx''' \int \frac{d p'}{h^3} \int \frac{d p''}{h^3} e^{\frac{i}{h} [x_l'' (p'^l - p''^l) + p''^l x_l' - p'^l x_l']} \cdot \frac{e}{c} \frac{A^0(x''')}{|p^{0'}| + |p^{0''}|} \frac{|p^{0'} p^{0''}| - p_i' p_i'' - m^2 c^2}{|p^{0'} p^{0''}|}. \quad (34)$$

Zur Auswertung dieses Ausdrucks setzt man zweckmäßig:

$$p' = \mathfrak{k} + \frac{\mathfrak{g}}{2}; \quad p'' = \mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{g}}{2}; \quad r' - r'' = r; \quad \frac{r' + r''}{2} = \mathfrak{R}. \quad (35)$$

Er heißt dann:

$$-\frac{1}{4} \int dx''' \int \frac{d \mathfrak{g}}{h^3} \frac{e}{c} A^0(x''') e^{\frac{i}{h} (x''' - \mathfrak{R}) \mathfrak{g}} \int \frac{d \mathfrak{k}}{h^3} e^{-\frac{i}{h} \mathfrak{k} r} \frac{|p^{0'} p^{0''}| - p_i' p_i'' - m^2 c^2}{(|p^{0'}| + |p^{0''}|) |p^{0'} p^{0''}|}. \quad (36)$$

Der Bruch unter dem Integralzeichen wird am besten nach \mathfrak{g} für $\mathfrak{g} \ll mc$ entwickelt, und erhält den Wert

$$\frac{1}{2 k_0^3} \left[\frac{g^2}{2} - \frac{(\mathfrak{k} \mathfrak{g})^2}{2 k_0^2} - \frac{3 g^4}{16 k_0^2} + \frac{5 (\mathfrak{k} \mathfrak{g})^2 g^2}{8 k_0^4} - \frac{7 (\mathfrak{k} \mathfrak{g})^4}{16 k_0^6} + \dots \right], \quad (37)$$

wobei $k_0^2 = k^2 + m^2 c^2$ gesetzt ist. Eine längere Rechnung führt für (36) zu dem Resultat (für kleine Werte von $|r| = r$):

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{4} \int dx''' \int \frac{d \mathfrak{g}}{h^3} \frac{e}{c} A^0(x''') e^{\frac{i}{h} (x''' - \mathfrak{R}) \mathfrak{g}} \\ & \cdot \frac{1}{h^3} \left[g^2 \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3} \gamma - \frac{2}{3} \log \frac{m c r}{\hbar} \right) + \frac{1}{3} \frac{(\mathfrak{g} r)^2}{r^2} - \frac{g^4}{15 m^2 c^2} \right] \\ & = \frac{1}{16 \pi h} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - \gamma - \log \frac{m c r}{\hbar} \right) (\text{grad}_{\mathfrak{R}})^2 + \frac{1}{3 r^2} (r \text{ grad}_{\mathfrak{R}})^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{15} \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 (\text{grad}_{\mathfrak{R}})^2 (\text{grad}_{\mathfrak{R}})^2 \right] \frac{e}{c} A^0(\mathfrak{R}). \end{aligned} \quad (38)$$

Die ersten beiden Glieder stellen — nachdem man sie verdoppelt hat, da zu (36) noch das komplex-konjugierte addiert werden muß — die Anteile

$$\frac{a}{x_\lambda x^\lambda} + b \log \left| \frac{x_\lambda x^\lambda}{C} \right|$$

von Gleichung (13) dar und sind daher wegzulassen, wenn man von R_s zur Matrix r übergeht. Formel (38) gibt auch nachträglich die Begründung dafür, daß die Konstante C in Gleichung (15) gleich $4 \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 e^{-2/3 - 2\gamma}$ gesetzt wurde. Wir erreichen dadurch, daß es unnötig wird, mit jedem

neuen Schritt der Störungsrechnung die das Feld erzeugende Gesamtladung zu korrigieren. Schließlich wird die Dichtematrix $(x' k' | r | x'' k'')$ für $| r | = 0$

$$(\xi k' | r | \xi k'') = \frac{1}{120 \pi \hbar} \frac{e}{c} \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 \Delta \Delta A^0(\xi) \quad (39)$$

und die Ladungsdichte selbst $[\Delta A^0(\xi) = -4 \pi \varrho_0$, wo ϱ_0 die äußere Ladungsdichte bezeichnet):

$$\varrho = -\frac{1}{15 \pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 \Delta \varrho_0. \quad (40)$$

wie schon von Dirac¹⁾ berechnet worden ist. Auch diese zusätzliche Dichte, deren Gesamtladung verschwindet, hat keine physikalische Bedeutung; denn sie ist von der „äußeren“ Dichte nicht trennbar und wird daher automatisch mit zur „äußeren“ Dichte gerechnet.

Zu einem physikalischen Problem wird die „Polarisation des Vakuums“ erst bei zeitlich veränderlichen äußeren Dichten; man denke z. B. an eine Ladungsverteilung, die periodisch hin und her bewegt wird. Man kann in einem solchen Fall die äußere Ladungsdichte einteilen in ihren zeitlichen Mittelwert und in eine zweite Dichte, die periodisch um den Wert Null schwankt. Das Raumintegral des zweiten Teils verschwindet, wenn die äußere Ladungsdichte in einem endlichen Raumgebiet hin und her bewegt wird. Für den ersten Teil gelten die bisherigen Betrachtungen, für ihn spielt die „Polarisation des Vakuums“ keine physikalische Rolle. Die Gesamtladung eines Teilchens kann also durch die Polarisation des Vakuums nie geändert werden. Um zu übersehen, was beim zweiten Teil geschieht, betrachten wir in Gleichung (26) bis (29) an Stelle des zeitlich konstanten skalaren Potentials A^0 ein Potential, das periodisch variiert, und setzen

$$A^0(x') = B^0(r') e^{\frac{i}{\hbar} r' x'_0} + \text{konj.} \quad (41)$$

Die einzige Änderung, die an den Ausdrücken (34) bis (36) dann vorzunehmen ist, besteht darin, daß der Bruch

$$\frac{1}{(|p^{0'}| + |p^{0''}|) |p_0' p_0''|}$$

zu ersetzen ist durch

$$\frac{|p^{0'}| + |p^{0''}|}{[(|p^{0'}| + |p^{0''}|)^2 - f^2] |p_0' p_0''|}.$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Bericht für den Solvay-Kongreß 1933; der Diracsche Wert unterscheidet sich von dem obigen um einen Faktor 2, der, wie Herr Dirac mir freundlicherweise mitteilte, durch ein Versehen in seine Gleichungen gekommen ist.

Die neuen Formeln gehen aus den alten daher einfach dadurch hervor — wir nehmen $f \ll mc$ an —, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (36) mit $1 + f^2/4 k_0^2$ multipliziert wird. Außerdem treten allerdings in der Dichtematrix noch Glieder mit α^l auf; wir wollen uns jedoch auf die Berechnung der Ladungsdichte beschränken, für die die Glieder mit α^l keine Rolle spielen. Berücksichtigt man nur die Glieder proportional g^2 in (37), so tritt neu zu (37) der Ausdruck

$$\frac{1}{2 k_0^3} \left[\frac{g^2}{2} - \frac{(\mathfrak{f} \mathfrak{g})^2}{2 k_0^2} \right] \frac{f^2}{4 k_0^2} \quad (42)$$

hinzu. Der betreffende Teil der Dichtematrix wird also

$$-\frac{\pi}{4 \cdot 15} \int dx''' \int \frac{d\mathfrak{g}}{h^3} \frac{e}{c} \left[B^0(x''') e^{\frac{i}{h} f x_0'''} + \text{konj.} \right] e^{\frac{i}{h} (x''' - \mathfrak{R}) g} \frac{f^2 g^2}{h^3 (mc)^2} \quad (43)$$

und daher die Zusatzdichte

$$\varrho = -\frac{1}{15 \pi} \frac{e^2}{h c} \frac{f^2}{(mc)^2} \cdot \varrho_0. \quad (44)$$

Hier ist mit ϱ_0 die periodisch schwankende Dichte bezeichnet, die zu dem Feld $B^0(x') e^{\frac{i}{h} f x_0'}$ Anlaß gibt und deren Raumintegral verschwindet. Gleichung (44) lehrt, daß das mit einer schwingenden Ladung verknüpfte Dipolmoment durch die Polarisation des Vakuums verkleinert wird, und zwar um so mehr, je höher die Frequenz der Schwingung ist. Dieser Umstand dürfte, wie schon von Dirac hervorgehoben wurde, eine Abänderung der Streuformel von Klein und Nishina bedingen, die allerdings im Gebiet der Compton-Wellenlänge erst etwa ein Promille betragen wird.

Führt man eine analoge Rechnung durch, um etwa die von einer Lichtwelle induzierte Materiedichte zu berechnen, so ergibt sich als Resultat, daß das periodisch wechselnde Feld einer monochromatischen ebenen Lichtwelle weder Ladungs- noch Stromdichte erzeugt. Daß dieses Resultat auch in beliebiger Näherung richtig bleibt, kann man leicht einsehen: Es kann durch ein elektromagnetisches Feld im leeren Raum kein Vorzeichen der Ladung ausgezeichnet werden, also muß die induzierte Ladungsdichte verschwinden. Aus Invarianzgründen verschwindet dann auch die Stromdichte. Hieraus folgt freilich noch nicht das Verschwinden der Energiedichte, und in der Tat können zwei durcheinanderlaufende ebene Lichtwellen bereits zur Entstehung von Materie Anlaß geben. Für die Behandlung solcher Probleme (Paarerzeugung und Zerstrahlung) ist jedoch die anschauliche Theorie der Materiewellen nicht mehr zuständig und wir werden daher zur Quantentheorie der Wellen übergehen.

II. Quantentheorie der Wellenfelder.

1. *Aufstellung der Grundgleichungen.* In der Quantentheorie der Materiewellen entspricht der Diracschen Dichtematrix das Produkt der Wellenfunktion mit ihrer konjugierten; wir setzen also

$$R = \psi^*(x'k') \psi(x''k''). \quad (45)$$

Für die Wellenfunktion gilt (für $x'_0 = x''_0$) die Vertauschungsrelation

$$\psi^*(x'k') \psi(x''k'') + \psi(x''k'') \psi^*(x'k') = \delta(x'x'') \delta_{k'k''}. \quad (46)$$

Betrachtet man das Maxwell'sche Feld als gegebenes c -Zahlfeld, so ist die Diracsche Dichtematrix einfach der Erwartungswert der durch (45) definierten Matrix. Wegen der Vertauschungsrelation (46) gilt in der Quantentheorie der Wellen:

$$R_S = \frac{1}{2} [\psi^*(x'k') \psi(x''k'') - \psi(x''k'') \psi^*(x'k')]. \quad (47)$$

Die Gleichungen

$$\mathcal{H}R_S = 0 \quad (3a)$$

und $R_S = r + S$ bleiben ungeändert erhalten und nur in der Form der Inhomogenität $\mathcal{H}S$ in

$$\mathcal{H}r = -\mathcal{H}S \quad (11a)$$

könnte eine Änderung durch die Nichtvertauschbarkeit der Feldstärken mit den Potentialen notwendig werden. Nun treten in dem ersten Glied

$e^{-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0$ keine nichtvertauschbaren Funktionen auf. In S_1 [vgl. (13) und (14)] kommen Glieder vor, die in den Feldstärken quadratisch sind und die eine Rolle spielen, wenn man Energie und Impulsdichte aus der Dichtematrix berechnet. Solange man sich auf die Berechnung von Ladungs- und Stromdichte beschränkt, treten diese Glieder nicht in Erscheinung. Da nun die Maxwell'schen Gleichungen zusammen mit der inhomogenen Gleichung (11a) den physikalischen Ablauf völlig bestimmen, so kann die Übertragung des in I. geschilderten Formalismus in die Quantentheorie nach dem Verfahren erfolgen, das für die gewöhnliche Quantenelektrodynamik in einer Note des Verfassers¹⁾ im Anschluß an frühere Untersuchungen von Klein²⁾ gegeben worden war. Dieses Verfahren geht von den Maxwell'schen Gleichungen und der Wellengleichung aus, die als q -Zahlrelationen behandelt und nach den üblichen Methoden der anschaulichen Theorie integriert werden. Gewöhnlich wird bei der Integration der Grundgleichungen ein Störungsverfahren angewendet, bei dem man die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie als klein annimmt und nach

¹⁾ W. Heisenberg, Ann. d. Phys. 9, 338, 1931. — ²⁾ O. Klein, ZS. f. Phys. 41, 407, 1927.

Potenzen der Ladung entwickelt. Als ungestörtes System erscheinen dann die ebenen Lichtwellen im leeren Raum und die ebenen Elektronenwellen im feldfreien Raum. Ein solches Störungsverfahren ist auch in der vorliegenden Theorie ohne weiteres anwendbar. Es ist dazu nur nötig, auch die für die Inhomogenität der Wellengleichung maßgebende Matrix S nach Potenzen der Ladung zu entwickeln, und die einzelnen Glieder der Entwicklung im Störungsverfahren nach der Reihe in den verschiedenen Näherungen zu berücksichtigen. In der nullten Näherung wird man also, um von R_S auf r und damit auf Ladungs- und Stromdichte zu schließen, nur die Matrix S_0 von R_S zu subtrahieren haben. Stellt man die Wellenfunktion in der Form

$$\psi(xk) = \sum_n a_n u_n(xk) \quad (48)$$

dar, wobei dann die Gleichungen

$$a_n a_m^* + a_m^* a_n = \delta_{nm} \quad (49)$$

gelten, so wird (im folgenden soll stets $x'_0 = x''_0$ gesetzt werden)

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{1}{2} [\psi^*(x'k') \psi(x''k'') - \psi(x''k'') \psi^*(x'k')] \\ &= \sum_{n,m} \frac{1}{2} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^*(x'k') u_m(x''k''). \end{aligned} \quad (50)$$

Daraus folgt für r , wenn man die Definition von S_0 berücksichtigt:

$$r = \sum_{n,m} \frac{1}{2} \left(a_n^* a_m - a_m a_n^* + \frac{p_n^0}{|p_n^0|} \cdot \delta_{nm} \right) u_n^*(x'k') u_m(x''k''). \quad (51)$$

Nach Jordan und Wigner¹⁾ stellt man die Operatoren a_n dar in der Form

$$a_n^* = N_n \Delta_n V_n; \quad a_n = V_n \Delta_n N_n, \quad (52)$$

wobei Δ_n die Zahl N_n in $1 - N_n$ verwandelt, und

$$V_n = \prod_{t \leq n} (1 - 2N_t)$$

gesetzt ist. Für die Zustände negativer Energie kann man jetzt einführen²⁾:

$$\left. \begin{aligned} a_n^* &= a'_n = V'_n \Delta'_n N'_n = V'_n \Delta'_n N'_n, \\ a_n &= a_n^* = N'_n \Delta'_n V'_n = N'_n \Delta'_n V'_n. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Es wird dann $N'_n = 1 - N_n$.

Für die Matrix r erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{p_0 n > 0} a_n^* a_n u_n^*(x'k') u_n(x''k'') - \sum_{p_0 n < 0} a_n^* a'_n u_n^*(x'k') u_n(x''k'') \\ &\quad + \sum_{n \neq m} a_n^* a_m u_n^*(x'k') u_m(x''k'') \\ &= \sum_{p_0 n > 0} N_n u_n^*(x'k') u_n(x''k'') - \sum_{p_0 n < 0} N'_n u_n^*(x'k') u_n(x''k'') \\ &\quad + \sum_{n \neq m} a_n^* a_m u_n^*(x'k') u_m(x''k''). \end{aligned} \quad (54)$$

¹⁾ P. Jordan u. E. Wigner, ZS. f. Phys. **47**, 631, 1928. — ²⁾ Vgl. z. B. W. Heisenberg, Ann. d. Phys. **10**, 888, 1931.

Diese Darstellung der Dichtematrix stimmt überein mit den Darstellungen, die von Pauli und Peierls¹⁾, Oppenheimer und Furry, Fock (l. c.) gewählt wurden. N_n bedeutet die Anzahl der Elektronen, N'_n die der Positronen, und die Symmetrie der Theorie im Vorzeichen der Ladung ist von vornherein gewahrt. Diese Darstellung ist aber nur in der nullten Näherung richtig. Geht man zur ersten Näherung über, so werden einerseits die Koeffizienten a_n als Funktionen der Zeit auch Glieder enthalten, die linear in den äußeren Feldstärken sind [vgl. z. B. l. c. Ann. d. Phys. 9, 341, Gleichung (9)], andererseits werden zur Bildung von r noch die in e linearen Glieder der Matrix S subtrahiert werden müssen, also die Glieder

$$-\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda \cdot S_0 + \frac{e}{48\pi^2 \hbar c} \left\{ \frac{x_\rho x^\sigma}{x_\tau x^\tau} \cdot \alpha^\lambda \left(\frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial \xi_\rho} - \delta_\lambda^\sigma \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial \xi_\mu} \right) + \alpha^\lambda \frac{\partial F_{\tau\lambda}}{\partial \xi_\tau} \log \left| \frac{x_\rho x^\rho}{C} \right| \right\}. \quad (55)$$

Diese Glieder, zusammen mit den in e linearen Gliedern in den Koeffizienten a_n geben dann einen Zusatz zur Matrix r , der zu einer endlichen Ladungs- und Stromdichte (erster Näherung) führt und der dazu dienen kann, die elektromagnetischen Felder in zweiter Näherung auszurechnen usw.

Statt dieses Verfahrens, das sich eng an die Integrationsmethoden der anschaulichen Theorie anschließt, kann man aber auch in der üblichen Weise eine Hamilton-Funktion bilden und dann die Störungstheorie in der zugehörigen Schrödinger-Gleichung durchführen. Zu diesem Zweck benutzen wir den Ausdruck für die Gesamtenergie, der aus Gleichung (16) folgt, gehen jedoch noch nicht zum limes $x^\lambda = 0$ über. Die Gesamtenergie nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} E = \int d\xi \left\{ & - \left(c i \hbar \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{e}{2} \left[A^1 \left(\xi + \frac{x}{2} \right) \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. A^1 \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right) \sum_{k'k''} \alpha_{k'k''}^1 \sum_{nm} \frac{1}{2} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^* \left(\xi + \frac{x}{2}, k' \right) u_m \left(\xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \right. \\ & - \sum_{k'k''} \beta_{k'k''}^m m c^3 \sum_{nm} \frac{1}{2} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^* \left(\xi + \frac{x}{2}, k' \right) u_m \left(\xi - \frac{x}{2}, k'' \right) \\ & - \sum_{k'} \left(c i \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{e}{2} \left[A^0 \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^0 \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right) \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | S | \xi - \frac{x}{2}, k' \right) \\ & \left. + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \right\} \quad (56) \end{aligned}$$

¹⁾ Für die briefliche Mitteilung dieser Resultate möchte ich Herrn W. Pauli herzlich danken.

an. Entwickelt man die Hamilton-Funktion wieder nach Potenzen der Elementarladung, und streicht man außerdem in den Gliedern $\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2$ sowie in den entsprechenden Gliedern der Ausdrücke (14) die Nullpunktenergie der Strahlung, so erhält man im limes $x \rightarrow 0$ für die Hamilton-Funktion nullter Ordnung:

$$H_0 = \sum_{E_n > 0} N_n E_n - \sum_{E_n < 0} N'_n E_n + \sum_{g e} M_{g e} h \nu_{g e}, \quad (57)$$

wobei $E_n = -c p_n^0$ gesetzt ist, und $M_{g e}$ die Anzahl der Lichtquanten im Zustand g mit der Polarisation e bedeutet. Ebenso ergibt sich für die Störungsenergie erster Ordnung im limes $x \rightarrow 0$ (A^0 wurde der Einfachheit halber $= 0$ gesetzt):

$$H_1 = \int d\xi e A^l(\xi) \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^l \left[\sum_{E_n > 0} N_n u_n^*(\xi k') u_n(\xi k'') - \sum_{E_n < 0} N'_n u_n^*(\xi k') u_n(\xi k'') + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^*(\xi k') u_m(\xi k'') \right]. \quad (58)$$

In den Ausdrücken für H_0 und H_1 stimmt die vorliegende Theorie daher mit den Resultaten von Oppenheimer und Furry, Peierls, Fock überein. Wir erhalten jedoch noch Glieder höherer Ordnungen, die von der Matrix S herrühren. In diesen Gliedern kann auch der Übergang zum limes $x \rightarrow 0$ nicht sofort ausgeführt werden. Vielmehr müssen bei der Durchführung der Störungsrechnung bis zur zweiten Näherung zuerst die Glieder in H_2 kombiniert werden mit den von H_1 herrührenden Gliedern vom Typus $\frac{H_1^i H_1^r}{W_n - W_i}$, erst dann läßt sich der Grenzübergang $x \rightarrow 0$ ausführen und liefert ein bestimmtes Resultat für die Energie zweiter Ordnung.

In dieser Weise kann das Störungsverfahren im Prinzip fortgesetzt werden, wenn nicht eine unendliche Selbstenergie wie in der bisherigen Quantenelektrodynamik zur Divergenz des Verfahrens führt¹⁾. Die Störungsenergie H_2 hat die folgende Form:

$$H_2 = \int d\xi \left[i \frac{e^2}{\hbar c} \left(\int A^\lambda d x_\lambda \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_0} S_0 + \frac{1}{48 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{x_\lambda x^\sigma}{x_\rho x^\rho} A^\lambda \left[\frac{\partial F_{0\sigma}}{\partial \xi_0} - \frac{\partial F_{\tau\sigma}}{\partial \xi_\tau} \right] - \frac{1}{96 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{x_\sigma x^\tau}{x_\rho x^\rho} F^{u\sigma} F_{\mu\tau} + \frac{1}{48 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \log \left| \frac{x_\rho x^\rho}{C} \right| \cdot \left(F_{\tau 0} F^{\tau 0} - \frac{1}{2} F_{\tau\mu} F^{\tau\mu} \right) \right]. \quad (59)$$

¹⁾ Vgl. hierzu V. Weisskopf, ZS. f. Phys. **89**, 27, 1934; ferner auch den Versuch, die unendliche Selbstenergie des Elektrons zu vermeiden, von M. Born Proc. Roy. Soc. London (A) **143**, 410 1934; M. Born u. L. Infeld, ebenda **144**, 425, 1934.

H_2 gibt wegen der Integration über ξ nur zu Matrixelementen Anlaß, die dem Entstehen oder Verschwinden von Lichtquanten des gleichen Impulses entsprechen; für die gewöhnlichen Prozesse, bei denen Lichtquanten emittiert oder absorbiert oder gestreut werden, spielen diese Matrixelemente also in erster Näherung keine Rolle. In der Störungsenergie H_3 , die die Form

$$H_3 = \int d\xi \frac{e^3}{6 c^2 \hbar^2} (A^\lambda x_\lambda)^3 \frac{\partial S_0}{\partial x_0} \quad (60)$$

hat, werden drei Lichtquanten mit der Impulssumme Null kombiniert; H_4 endlich reduziert sich auf das Glied

$$\begin{aligned} H_4 &= \int d\xi \left[-i c \hbar \frac{1}{24} \left(-\frac{i e}{\hbar c} A^\lambda x_\lambda \right)^4 \frac{\partial S_0}{\partial x_0} \right] \\ &= \frac{1}{48 \pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{\hbar c} \int d\xi \frac{(A^\lambda x_\lambda)^4}{(x_0 x^2)^2} \end{aligned} \quad (61)$$

und gibt Anlaß zu Matrixelementen, die zur Streuung von Licht an Licht führen (Verschwinden und Entstehen je zweier Lichtquanten mit gleicher Impulssumme). Auf die Tatsache, daß die Diracsche Theorie des Positrons die Streuung von Licht an Licht zur Folge hat — auch dort, wo die Energie der Lichtquanten zur Paarerzeugung nicht hinreicht —, haben schon Halpern¹⁾ und Debye²⁾ unabhängig hingewiesen. Die Matrixelemente in H_4 geben aber noch keinen Aufschluß über die Größe dieser Streuung, da sie vorher mit den von niedrigeren Näherungen herrührenden Beiträgen kombiniert werden müssen, um ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Streuprozesses zu liefern. Höhere Störungsglieder als H_4 treten nicht auf; H_5 , H_6 usw. verschwinden alle im limes $x = 0$.

2. *Anwendungen.* Für die meisten praktischen Anwendungen, z. B. Paarerzeugung, Zerstrahlung, Compton-Streuung usw. liefert die hier durchgeführte Theorie nichts Neues gegenüber den bisherigen Formulierungen der Diracschen Theorie. Denn in allen genannten Fällen kann man die Störungsrechnung mit der zweiten Näherung abbrechen, und die neuen Glieder in H_2 tragen wegen ihrer speziellen Form nichts zu den gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten bei. Anders ist es bei dem vorhin genannten Problem der Streuung von Licht an Licht und bei der von Delbrück³⁾ diskutierten kohärenten Streuung von γ -Strahlen an festen

¹⁾ O. Halpern, Phys. Rev. **44**, 885, 1934. — ²⁾ Für die freundliche Mitteilung seiner Überlegungen möchte ich Herrn Debye herzlich danken. — ³⁾ M. Delbrück, Diskussion der experimentellen Ergebnisse von Frl. L. Meitner und ihren Mitarbeitern, ZS. f. Phys. **84**, 144, 1933.

Ladungszentren; die Durchrechnung dieser Probleme ist jedoch so kompliziert, daß sie hier nicht versucht werden soll.

Wir wollen daher die Anwendungen beschränken auf ein Beispiel, bei dem die Glieder H_2 in Gleichung (59) wichtig werden; es soll die mit einem Lichtquant verbundene Materiedichte und insbesondere die sich auf Grund dieser Materiedichte ergebende Selbstenergie des Lichtquants behandelt werden. Sieht man zunächst von den Gliedern H_2 ab und rechnet nach den bisher üblichen Methoden, so stellt sich der Vorgang folgendermaßen dar: Da in H_1 [Gleichung (58)] Matricelemente auftreten, die der Verwandlung eines Lichtquants in ein Paar entsprechen, so erzeugt ein Lichtquant in seiner Umgebung ein Materiefeld — ähnlich, wie ein Elektron in seiner Umgebung ein Maxwell'sches Feld erzeugt. Die Energie dieses Materiefeldes wird unendlich, in genauer Analogie zur unendlichen Selbstenergie der Elektronen. Ein Teil der singulären Glieder in der unendlichen Selbstenergie der Lichtquanten verschwindet nun, wenn man die Störungsglieder H_2 berücksichtigt. Denn diese sind gerade so eingerichtet, daß für eine klassische Lichtwelle keine unendliche Selbstenergie auftreten würde. Trotzdem zeigt die folgende Rechnung, daß ein durch die Anwendung der Quantentheorie bedingter unendlicher Teil der Selbstenergie übrig bleibt. Die Analogie zur Selbstenergie der Elektronen ist hier vollständig; denn auch eine kontinuierliche Ladungsverteilung würde nach der Maxwell'schen Theorie nur zu einer endlichen Selbstenergie führen; erst die „Quantelung“ der Ladungsverteilung führt zur unendlichen Selbstenergie. Stellt man die Quantelung des elektromagnetischen Feldes durch das Bild punktförmiger Lichtquanten dar, so ist das Unendlichwerden der Selbstenergie auch in der anschaulichen Theorie der Materiewellen einleuchtend, da die Inhomogenität in Gleichung (11) die Feldstärken und deren erste und zweite Ableitungen enthält, die in der Nähe des Lichtquants singulär werden.

Für die Berechnung der gesuchten Selbstenergie kann man ausgehen von einer bekannten Formel der Störungstheorie für die Energie zweiter Ordnung

$$W_2 = H_0 s_1^2 - s_1 H_0 s_1 + s_1 H_1 - H_1 s_1 + H_2. \quad (62)$$

Hierin bedeuten H_0 , H_1 , H_2 die verschiedenen Glieder der Hamilton-Funktion, s_1 ist das erste Glied der für die kanonische Transformation

$$W = s H s^{-1} \quad (63)$$

charakteristischen Matrix:

$$s = 1 + s_1 + \dots \quad (64)$$

Dem Sinn der im vorigen Abschnitt geschilderten Methode nach sind die Matrizen H in Gleichung (62) zunächst für endliche Abstände x_λ zu nehmen, erst am Schluß soll der Grenzübergang $x_\lambda \rightarrow 0$ vollzogen werden. Die Matrix s_1 ist aus dem Wert von H_1 im limes $x_\lambda = 0$ in der üblichen Weise zu berechnen:

$$s_1^{lm} = \frac{H_1^{lm}(x=0)}{W_0^l - W_0^m}. \quad (65)$$

Das Element der Matrix $H_1(x=0)$, welches zur gleichzeitigen Entstehung eines Elektrons vom Impuls p'' , eines Positrons vom Impuls p' und zum Verschwinden eines Lichtquants vom Impuls g (Polarisationsrichtung e) gehört, hat die Form:

$$\frac{e\hbar}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{c}{g}} (p', p_0 < 0 | \alpha e | p'', p_0' > 0) \cdot M_{g,e}^{\frac{1}{2}}, \quad (66)$$

wobei V das Volumen darstellt, das durch die periodischen Randbedingungen vorgegeben ist, und $M_{g,e}$ die Anzahl der Lichtquanten im Zustand g, e bedeutet. Ferner ist

$$\begin{aligned} & (p', p_0' < 0 | \alpha e | p'', p_0' > 0) \\ &= \int d\mathbf{r} \sum_{k'k''} u_{p', p_0' < 0}^* (\alpha^l e_l) u_{p'', p_0' > 0} \end{aligned} \quad (67)$$

gesetzt.

Geht man nun mit den aus (65) und (66) folgenden Ausdrücken für s_1 in Gleichung (62) ein — wobei man außer den Matrixelementen (66) auch noch die berücksichtigen muß, die dem Prozeß: gleichzeitige Entstehung von Elektron, Positron und Lichtquant entsprechen —, so erhält man von den Gliedern $s_1 H_1 - H_1 s_1$ Beiträge, die endlich bleiben, solange $x_\lambda x^\lambda$ nicht verschwindet, und die, wenn man sie mit den entsprechenden Gliedern in H_2 kombiniert, auch im limes $x_\lambda \rightarrow 0$ einen endlichen Beitrag zu W_2 liefern. Dies gilt jedoch nicht für die Anteile $(H_0 s_1 - s_1 H_0) s_1$. Zerlegt man H_0 in einen zu den Materiewellen und einen zu den Lichtwellen gehörigen Teil, so gibt zwar der erste auch einen für $x_\lambda x^\lambda \neq 0$ endlichen Beitrag, der mit H_2 kombiniert im limes $x_\lambda \rightarrow 0$ endlich viel zu W_2 beisteuert. Der zum elektromagnetischen Feld gehörige Teil hängt jedoch gar nicht von x_λ ab, er führt zu der Summe

$$\sum_{p' + p'' = g} |(p' | s_1 | p'')|^2 g c. \quad (68)$$

Diese Summe divergiert; man kann den Ausdruck (68) unmittelbar als die unendliche Selbstenergie der Lichtquanten bezeichnen; führt man die

Summation in (68) nur bis zu großen, aber endlichen Werten $|p'| = P$ aus und berücksichtigt nur den zu $M_{g,e}$ proportionalen Teil in (62), so erhält man einen Ausdruck der Form

$$g \cdot c \cdot M_{g,e} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \log \frac{P}{m c}. \quad (69)$$

In der Quantentheorie der Wellenfelder ist der Anwendungsbereich der Diracschen Formulierung der Positronentheorie also nicht wesentlich größer als der Anwendungsbereich der elementaren Formeln von Pauli, Peierls, Fock, Oppenheimer und Furry. Die Gleichungen (48) bis (61) zeigen jedoch, wie diese Formeln als erste Schritte eines konsequenten Näherungsverfahrens aufgefaßt werden können, das den Forderungen der relativistischen und der Eichinvarianz genügt; ferner liefert der hier beschriebene Formalismus endliche Erwartungswerte für Strom- und Energiedichte in erster Näherung auch dort, wo die elementaren Formeln zu unendlichen Werten führen. Daß schon in der zweiten Näherung der Quantentheorie der Wellenfelder Divergenzen auftreten würden, war nach den bisherigen Ergebnissen der Quantenelektrodynamik zu erwarten.

Der Umstand, daß erst die Anwendung der Quantentheorie zu Divergenzen führt, die in der anschaulichen Theorie der Wellenfelder nicht auftreten, legt die Vermutung nahe, daß zwar diese anschauliche Theorie schon im wesentlichen die richtige korrespondenzmäßige Beschreibung des Geschehens enthält, daß jedoch der Übergang zur Quantentheorie nicht in der primitiven Weise vorgenommen werden kann, wie es in den bisher vorliegenden Theorien versucht wird. In der Diracschen Theorie des Positrons ist ferner eine reinliche Scheidung der auftretenden Felder in Materiefelder und elektromagnetische Felder kaum mehr möglich; dies geht insbesondere daraus hervor, daß in der Quantentheorie der Wellen die Matrix R_S — nicht die Matrix r — einfach durch die Materiewellenfunktionen ψ dargestellt werden kann. Es dürfte also erst in einer einheitlichen Theorie von Materie- und Lichtfeldern, die der Sommerfeldschen Konstanten $e^2/\hbar c$ einen bestimmten Wert gibt, eine widerspruchsfreie Vereinigung der Forderungen der Quantentheorie mit denen der Korrespondenz zur anschaulichen Feldtheorie möglich sein.
