

## Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamik.

Von H. Tetrode in Amsterdam.

(Eingegangen am 14. Juni 1922.)

Die Elektrodynamik gestattet bekanntlich, die auf ein Elektron wirkende Kraft aus den Komponenten des elektromagnetischen Feldes zu berechnen; außerdem gehen in dieselbe nur noch die Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons ein und sie ist proportional seiner Ladung. Dagegen reichen die Maxwell-Lorentz'schen Differentialgleichungen nicht hin, die Feldstärken bzw. die Potentiale aus den Lagen und Bewegungen der Elektronen eindeutig abzuleiten. Zwar kann man die allgemeinen Lösungen für die Potentiale in einfacher Weise hinschreiben; sie bestehen aus retardiert gebildeten Integralen über die Ladungen innerhalb eines Raumes, daneben aber aus ebensolchen über die Potentiale und deren Differentialquotienten an der Oberfläche desselben. Statt die Ausdrücke retardiert oder „verspätet“ zu bilden, d. h. für einen im Abstände  $r$  befindlichen Quellenpunkt für den Zustand, der dort vor der Zeit  $r/c$  herrschte, kann man sie ebensogut auch „voraneilend“ bilden, d. h. für einen Zustand, der erst nach der Zeit  $r/c$  eintreten wird. Die beiden Resultate müssen aus mathematischen Gründen gleich sein. Nur wenn man die Oberflächenintegrale fortläßt, werden sie sich im allgemeinen unterscheiden.

Die Tatsache, daß zwar die Elektronenbewegungen — oder doch deren Änderungen — durch das Feld, nicht aber dieses durch jene eindeutig bestimmt wird, ist vollkommen verständlich, wenn man das Feld als das wesentliche und primäre, die Elektronen aber als besondere singuläre Modifikationen desselben ansieht, bedingt durch Abweichungen von den Maxwell-Lorentz'schen Gleichungen für hohe Werte der Feldstärken und Potentiale. Es ist dann eben kein Grund vorhanden, warum das ganze Feld durch einzelne seiner Stellen bestimmt sein sollte und es könnte sehr wohl Felder geben, die gar nicht von Elektronen herrühren und einfach aus der Unendlichkeit herausgekommen sind. Die betreffende „Theorie der Materie“ ist von Mie ausführlich gegeben worden. Sie ist aber dem Hamilton'schen Prinzip unterworfen und erklärt die Quantenerscheinungen nicht. Überhaupt scheinen letztere mit der Feldvorstellung nicht vereinbar zu sein.

Ich habe daher einen anderen Standpunkt gewählt und betrachte dasjenige als das primäre, dessen Existenz uns experimentell am unmittelbarsten gegeben ist, nämlich die — negativen und positiven — Elektronen, die man gelegentlich sogar zählen und individuell in ihrer Bewegung verfolgen kann. Ich nehme an, daß jede Bewegungsänderung (Beschleunigung) eines Elektrons von anderen Elektronen bedingt ist und betrachte das Feld als eine mathematische Konstruktion, die in dem Grenzfall, wo das quantenhafte der Erscheinungen vernachlässigt werden darf, zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen geeignet ist, darüber hinaus uns aber im Stiche läßt.

Nach diesem Grundsatz müssen wir annehmen, daß die oben erwähnten allgemeinen Ausdrücke für die Potentiale die richtigen Werte liefern, falls wir die Raumintegrale über alle Ladungen der Welt erstrecken, die Oberflächenintegrale aber fortlassen. Ferner wollen wir die positive und die negative Zeitrichtung vorläufig als gleichwertig behandeln. Es folgt dann, daß wir das arithmetische Mittel aus dem verspätet und dem voraneilend gebildeten Potential zu nehmen haben.

Wir erhalten dann für das Viererpotential  $\Phi$  in bekannter Bezeichnungsweise

$$\Phi = \frac{1}{2} \int [P]_{t-\frac{r}{c}} - \frac{r}{c} \frac{dS}{r} + \frac{1}{2} \int [P]_{t+\frac{r}{c}} + \frac{r}{c} \frac{dS}{r}, \quad (1)$$

wenn  $P$  der Viererstrom ist.

Hierfür kann man auch schreiben

$$\Phi = \int_{t'=-\infty}^{+\infty} c dt' \int \int \int \frac{f(\sigma^2)}{\sigma^2} P' dx' dy' dz', \quad (2)$$

wo  $\sigma$  den „Weltabstand“

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - c^2(t-t')^2} = \sqrt{r^2 - c^2(t-t')^2}$$

vom jedesmaligen Quellenpunkt mit den gestrichenen zum Aufpunkt mit den ungestrichenen Koordinaten bedeutet, während die Funktion  $f$  für jedes von Null verschiedene positive  $\Delta$  den Bedingungen

$$f(\pm \Delta) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{f(x)}{x} dx = 1$$

genügen soll (für negative  $\Delta$  ist das Integral dann natürlich  $= -1$ ). Hieraus folgt, daß nur die infinitesimale Umgebung des „Lichtkegels“  $\sigma = 0$  für das Resultat in Betracht kommt.

Der Beitrag eines einzigen Elektrons mit Ladung  $e'$  und Geschwindigkeit  $v'$  zum Potential ist, weil

$$e' = \int \frac{P'_i}{i} dS' \quad \text{und} \quad e' \frac{v'_x}{c} = \int P'_x dS' \text{ usw.},$$

falls wir die Dimensionen desselben als sehr klein voraussetzen:

$$\Phi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( i e', e' \frac{v'}{c} \right) \frac{f(\sigma^2)}{\sigma^2} c dt' = e' \int \frac{f(\sigma^2)}{\sigma^2} dQ', \quad (3)$$

wenn  $dQ'$  das vektorielle Linienelement der Weltlinie dieses Elektrons mit den Komponenten  $dQ'_i = ic dt'$ ,  $dQ'_x = dx'$  usw. ist. Die Integration ist natürlich auch im zweiten Integral über die ganze Weltlinie zu erstrecken. Bei der Auswertung des ersten ist zu beachten, daß der räumliche Abstand  $r$  der in  $\sigma^2$  eingeht, hier mit  $t'$  veränderlich ist. Man erhält:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( i e', e' \frac{v'}{c} \right)}{r \left( 1 - \frac{v'_r}{c} \right)} \right]_{t - \frac{r}{c}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( i e', e' \frac{v'}{c} \right)}{r \left( 1 + \frac{v'_r}{c} \right)} \right]_{t + \frac{r}{c}}$$

entsprechend den bekannten Formeln.

Die Hamiltonsche Funktion für die Bewegung eines Elektrons mit Masse  $m_1$  und Ladung  $e_1$  in einem elektromagnetischen Felde ist bekanntlich (mit umgekehrtem Vorzeichen wie in der gewöhnlichen Mechanik):

$$W_1 = m_1 \int \sqrt{-\Sigma dQ_1^2} - \frac{e_1}{c} \int (\Phi_1 \cdot dQ_1) = m_1 \int ds_1 - \frac{e_1}{c} \int (\Phi_1 \cdot dQ_1),$$

worin  $Q_{1\alpha}$  usw. die raumzeitlichen Koordinaten des Elektrons sind,  $ds_1$  also das Element seiner Weltlinie ist und die skalare Multiplikation in der üblichen Weise geschrieben wurde. Die Integrationen sind über die ganze Weltlinie zu erstrecken.

Wird das Feld von einem zweiten Elektron verursacht, so ist nach (3)

$$\Phi_1 = e_2 \int \frac{f(\sigma_{12}^2)}{\sigma_{12}^2} dQ_2,$$

daher

$$W_1 = m_1 \int ds_1 - \frac{e_1 e_2}{c} \iint \frac{f(\sigma_{12}^2)}{\sigma_{12}^2} (dQ_1 \cdot dQ_2).$$

Für eine infinitesimale Variation der Weltlinie des ersten Elektrons, die für  $t = \pm \infty$  verschwindet, liefert die Bedingung  $\delta W_1 = 0$

bekanntlich die Bewegungsgleichungen desselben in dem Felde des zweiten;  $W_1$  kann man durch

$$W_{12} = m_1 \int ds_1 + m_2 \int ds_2 - \frac{e_1 e_2}{c} \iint \frac{f(\sigma_{12}^2)}{\sigma_{12}^2} (d\varrho_1 \cdot d\varrho_2) \quad (4)$$

ersetzen, da die  $\varrho_2$  nicht variiert werden. Dieser Ausdruck ist aber in den beiden Indizes symmetrisch und liefert bei Variation der  $\varrho_2$  die Bewegungsgleichungen des zweiten Elektrons in dem Felde des ersten. Folglich ist  $W_{12}$  die Wirkungsfunktion für die Bewegung der zwei Elektronen unter ihrer gegenseitigen Beeinflussung. Sie ist keine Hamiltonsche Funktion mehr, da sie nicht auf ein einfaches Zeitintegral reduziert werden kann.

Der Ausdruck

$$- \frac{e_1 e_2}{c} \iint \frac{f(\sigma_{12}^2)}{\sigma_{12}^2} (d\varrho_1 \cdot d\varrho_2)$$

ist, bis auf die Funktion  $f$ , das vierdimensionale Analogon zu Neumanns elektrodynamischem Potential zweier Stromkreise

$$- i_1 i_2 \iint \frac{(dl_1 \cdot dl_2)}{r}.$$

Die Wirkungsfunktion für die ganze Welt ist:

$$W = \sum_i m_i \int ds_i - \sum_{\substack{ik \\ (i \neq k)}} \frac{e_i e_k}{c} \iint \frac{f(\sigma_{ik}^2)}{\sigma_{ik}^2} (d\varrho_i \cdot d\varrho_k), \quad (5)$$

wo die erste Summe über alle Elektronen, die zweite über alle Elektronenpaare zu erstrecken ist, also für jedes Paar nur einmal genommen werden muß; wollten wir sie als Doppelsumme schreiben, so wäre ein Faktor  $\frac{1}{2}$  hinzuzufügen; die Terme mit gleichen Indizes wären aber dann fortzulassen, da ein Doppelintegral mit solchen unendlich werden würde. Dies kommt daher, daß wir die endlichen Elektronendurchmesser nicht berücksichtigt haben; die einfachen Integrale  $\int m_i ds_i$  sind der Ersatz dafür.

Setzt man die Vierergeschwindigkeit eines Elektrons  $\frac{d\varrho_i}{ds_i} = v_i$ , so kann man auch schreiben:

$$W = \sum_i m_i \int ds_i - \sum_{\substack{ik \\ i \neq k}} \frac{e_i e_k}{c} \iint \frac{f(\sigma_{ik}^2)}{\sigma_{ik}^2} (v_i \cdot v_k) ds_i ds_k. \quad (6)$$

Wir wollen diesen Ausdruck, den wir aus den klassischen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes unter Beschränkung der mathematisch möglichen Lösungen hergeleitet haben, gleich so verallgemeinern, daß wir erwarten dürfen, mit ihm auch die Quantenerscheinungen umfassen zu können. Statt der bestimmten Funktion  $f$  von  $\sigma_{ik}^2$  setzen wir

irgend eine, zunächst unbekannte, Funktion der Vierergeschwindigkeiten und der relativen Koordinaten der beiden Elektronen. Wir können dann schreiben:

$$W = \sum_i m_i \int ds_i + \sum_{\substack{ik \\ (i \neq k)}} \iint w_{ik} ds_i ds_k, \quad (7)$$

wo  $w_{ik} = w_{ki}$  eine skalare Funktion der drei Vektoren  $v_i, v_k$  und  $q_i - q_k = \sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$  ist, die sich für die verschiedenartigen Elektronenpaare unterscheiden wird, d. h. verschieden sein wird für die drei Kombinationen negativ-negativ, positiv-positiv und negativ-positiv, falls wir nur die negativen Elektronen und die Protonen (Wasserstoffkerne) als Urteilchen gelten lassen.

Die Bedingung  $\delta W = 0$  liefert, falls die Variationen der Koordinaten für  $t = \pm \infty$  verschwinden, für jeden Index  $i$  die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{ds_i} \left[ m_i v_i - \sum_{k(\neq i)} \int \left( \frac{\partial w_{ik}}{\partial v_i} + v_i \left( \frac{\partial w_{ik}}{c v_i} \cdot v_i \right) - v_i w_{ik} \right) ds_k \right] \\ & = \frac{d\pi_i}{ds_i} = - \sum_{k(\neq i)} \int \frac{\partial w_{ik}}{\partial q_i} ds_k, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wenn wir den Ausdruck zwischen den eckigen Klammern mit  $\pi_i$  bezeichnen.  $\frac{d}{ds_i}$  bedeutet Differentiation in der Richtung der Weltlinie.

Die Größen mit dem Index  $i$  beziehen sich auf einen bestimmten Punkt der Weltlinie des  $i$ -ten Elektrons, während die mit den übrigen Indizes  $k$  ihrer ganzen Weltlinie entlang integriert werden.

Wir haben für jedes Elektron vier Gleichungen, entsprechend den vier Komponenten der Vektorgleichung (8). Zwischen ihnen muß aber eine Abhängigkeit bestehen, da die Zuordnung der Punkte der variierten Weltlinie zu denen der unvariierten innerhalb gewisser Grenzen willkürlich ist und eine Änderung dieser Zuordnung keine Bedeutung hat, weil sie die Weltlinie in sich selbst überführt. Tatsächlich erhält man durch skalare Multiplikation von (8) mit  $v_i$  eine identische Gleichung, wenn man bedenkt, daß  $(v_i \cdot v_i) = v_i^2 = -1$ , und daß

$$\frac{d w_{ik}}{ds_i} = \left( \frac{\partial w_{ik}}{\partial q_i} \cdot v_i \right) + \left( \frac{\partial w_{ik}}{\partial v_i} \cdot \frac{d v_i}{ds_i} \right).$$

Man beachte noch, daß, falls etwa die konstante Größe  $v_i^2$  explizite in  $w_{ik}$  vorkommen sollte (was man willkürlich bewirken kann), dies an den Gleichungen nichts ändern würde; die durch eine derartige Abhängigkeit entstehenden Glieder in  $\frac{\partial w_{ik}}{\partial v_i}$  und in  $v_i \left( \frac{\partial w_{ik}}{\partial v_i} \cdot v_i \right)$  kompensieren einander nämlich.

Die Gleichungen (8) verknüpfen die Bewegung eines Elektrons mit den Bewegungen und Lagen der übrigen zu allen möglichen Zeiten, wenn auch einzelne Zeitabschnitte mehr als andere ins Gewicht fallen werden, ähnlich wie in der klassischen Theorie, wo nur gewisse Zeitpunkte in Betracht kamen.

Die Funktionen  $w_{ik}$  werden natürlich gewisse Konvergenzeigenschaften haben müssen, da die Integrale in (8) sonst unendlich würden. Wir werden im allgemeinen wohl annehmen müssen, daß  $\int w_{ik} ds_k$  für große räumliche Abstände  $r$  des Punktes  $i$  von der Weltlinie  $k$  wie  $1/r$  unendlich klein wird, obwohl dies für einzelne Punkte vielleicht nicht immer zutreffen wird; der Mittelwert von  $\int w_{ik} ds_k$  über ein kleines Stück der Weltlinie  $i$  wird dann aber im allgemeinen doch wohl  $\sim 1/r$  sein. Ausnahmen hiervon werden wir weiter unten als quantenhafte Energieübertragung deuten.

Vielleicht müssen auch die einfachen Integrale in (7) verallgemeinert werden und sind sie durch Doppelintegrale, zweifach über dieselbe Weltlinie, zu ersetzen. Es wäre dann

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \iint w_{ik} ds_i ds_k. \quad (9)$$

Bei gleichen Indizes ist hier dennoch ein Unterschied zu machen, da die beiden sich auf verschiedene Stellen der nämlichen Weltlinie beziehen. Also wäre dann etwa zu schreiben

$$\frac{1}{2} \iint w_{ii} ds_i ds_i.$$

Für gerade Weltlinien und auch für längere gerade Weltlinienstücke wird sich dies jedoch auf  $m_i \int ds_i$  reduzieren müssen. Falls  $w_{ii}$  gewisse Stetigkeits- (und Konvergenz-) eigenschaften hat, wird man überhaupt  $\int m_i ds_i$  dafür schreiben dürfen, nur mit im allgemeinen veränderlichem  $m_i$ , abhängig von den Beschleunigungen und höheren Beschleunigungen gerader Ordnung. Wir werden von dieser Verallgemeinerung in dieser Arbeit keinen Gebrauch machen, da wir nur Bewegungen genauer betrachten, wobei sie auf das Resultat ohne Einfluß ist.

Wir betrachten jetzt eine solche Bewegung von  $n$  Elektronen, wobei sie aus unendlichen räumlichen Entfernungen heraus sich nähern, gegenseitig ihre Bahnen beeinflussen, um sich dann wieder in verschiedene Richtungen der Unendlichkeit zu verlieren. Während der Wechselwirkung sollen sie von den übrigen Elektronen der Welt keinen merklichen Einfluß empfinden. Wir wollen dies eine hyperbelartige Wechselwirkung nennen, und dem obigen entsprechend an-

nehmen, daß vor und nach derselben die Integrale mit  $w_{ik}$  zu vernachlässigen sind, so daß dann  $\pi_i = m_i v_i$  ist.

Multiplizieren wir die Gleichungen (8) mit  $ds_i$ , integrieren durch die Wechselwirkung hindurch, also zwischen unendlichen Grenzen, und summieren über die  $n$  Elektronen, so erhalten wir für die Änderung des Gesamtimpulses und der Gesamtenergie  $\sum_n m_i v_i$  eine Summe von Doppelintegralen über  $ds_i ds_k$ , die sich paarweise aufheben, da

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial q_i} = - \frac{\partial w_{ik}}{\partial q_k}$$

ist. Die Energie und der Impuls sind daher nach einer hyperbelartigen Wechselwirkung dieselben wie zuvor. In diesem verallgemeinerten Sinne gilt auch in unserer Theorie das Erhaltungsgesetz für diese Größen. Es hat aber nicht die strenge Form der klassischen Dynamik, wo es für jedes infinitesimale Zeitelement gilt.

Es ist ein wesentlicher Zug unserer Theorie, daß die auf ein Elektron wirkende Kraft nicht nur, nach Art der retardierten Potentiale, von der Vergangenheit, sondern auch von der Zukunft der übrigen bedingt wird. Indessen brauchen die beiden Zeitrichtungen deshalb noch nicht gleichwertig zu sein. Aus invariantentheoretischen Gründen kann, wie man sich leicht überzeugt,  $w_{ik}$  nur von den vier skalaren  $\sigma_{ik}^2$ ,  $(v_i \cdot v_k)$ ,  $(v_i \cdot \sigma_{ik})$  und  $(v_k \cdot \sigma_{ki})$  abhängen. Falls nun die beiden Elektronen eines Paares verschiedenartig sind, braucht  $w_{ik}$  in  $(v_i \cdot \sigma_{ik})$  und  $(v_k \cdot \sigma_{ki})$  nicht symmetrisch zu sein. Da die imaginär-zeitartigen Komponenten von  $v_i$  und  $v_k$  aber immer positiv-imaginär sind, die von  $\sigma_{ik}$  aber  $= ic(t_i - t_k)$  und die von  $\sigma_{ki} = -ic(t_i - t_k)$  ist, und da das Vorzeichen von  $(v_i \cdot \sigma_{ik})$  bzw.  $(v_k \cdot \sigma_{ki})$ , wenn  $\sigma_{ik}^2 < 0$  ist, durch die räumlichen Komponenten nicht beeinflusst wird und daher dem von  $-(t_i - t_k)$  bzw.  $+(t_i - t_k)$  entspricht, wird eine Asymmetrie eine prinzipielle Verschiedenheit der beiden Zeitrichtungen bedeuten, derart, daß etwa das negative Elektron hauptsächlich oder auch ausschließlich durch die Vergangenheit des positiven, dann aber das letztere durch die Zukunft des ersteren beeinflusst wird. Die Transformation  $t' = -t$  gehört eben nicht zur Gruppe der Lorentztransformationen und die Naturgesetze brauchen ihr gegenüber nicht invariant zu sein. Bei der Massenverschiedenheit der beiden Elektronenarten könnte diese Ungleichwertigkeit der beiden Zeitrichtungen möglicherweise sehr bedeutungsvoll sein für die Erklärung der irreversiblen Erscheinungen. Bekanntlich ist man dabei bisher so verfahren, daß man von den klassischen, in den beiden Zeitrichtungen symmetrischen, dynamischen Gleichungen ausging, da-

neben aber eine statistische Hypothese, die sogenannte Hypothese der molekularen Unordnung, einführte, die eine Verschiedenheit der positiven und negativen Zeitrichtung implizite enthält. Ob aber diese Hypothese mit den klassischen Gleichungen verträglich ist, scheint nicht erwiesen zu sein; sie folgt aus ihnen sicher nicht.

Wir fragen jetzt nach der Erhaltung des Drehimpulses bei einer hyperbelartigen Wechselwirkung. Es ist leicht diese nachzuweisen, wie wir es oben für Impuls und Energie getan haben, wenn man als Drehimpuls die Summe der Vektorprodukte  $[\varrho_i \cdot \pi_i]$  definiert und bedenkt, daß Glieder mit  $[v_i \cdot v_i]$  verschwinden. Man erhält dann für die Änderung des Drehimpulses Doppelintegrale mit den Integranden

$$\left[ \sigma_{ik} \cdot \frac{\partial w_{ik}}{\partial \sigma_{ik}} \right] + \left[ v_i \cdot \frac{\partial w_{ik}}{\partial v_i} \right] + \left[ v_k \cdot \frac{\partial w_{ik}}{\partial v_k} \right].$$

Die Summe dieser drei Vektorprodukte verschwindet aber identisch, wie man sich leicht durch direkte Ausrechnung überzeugen kann, wenn man  $w_{ik}$  als Funktion der oben angegebenen vier Skalare betrachtet. Es wird nun aber als Drehimpuls gewöhnlich die Größe  $\Sigma [\varrho_i \cdot m_i v_i]$  betrachtet und bei großen Entfernungen wird nun zwar, bis auf Glieder  $\sim 1/r$ ,  $m_i v_i = \pi_i$ , allein die  $\varrho_i$  werden groß wie  $r$ , so daß die Gleichheit von  $\Sigma [\varrho_i \cdot \pi_i]$  und  $\Sigma [\varrho_i \cdot m_i v_i]$  nicht ohne weiteres verbürgt ist. Ich habe gefunden, daß eine hinreichende Bedingung dafür die Symmetrie von  $w_{ik}$  in  $(v_i \cdot \sigma_{ik})$  und  $(v_k \cdot \sigma_{ki})$  ist; doch ist diese Bedingung, soweit ich sehe, keine notwendige.

Es ist mir bisher nicht gelungen, diejenigen Funktionen  $w_{ik}$  ausfindig zu machen, die zu den wirklichen Naturgesetzen und namentlich zu denen der Quanten führen und ich kann den exakten Nachweis ihrer Existenz auch nicht erbringen; doch sprechen die allgemeinen Überlegungen, die ich jetzt vorbringen möchte, und wobei die bisher unbegreiflich erscheinenden Widersprüche der Quantentheorie ihre prinzipielle Lösung finden werden, meines Erachtens sehr für die Richtigkeit der angenommenen Grundsätze. Übrigens könnte deren Form noch erheblich verallgemeinert werden, indem man nur voraussetzt, daß die Naturgesetze sich als Funktionalbeziehungen ganz allgemeiner Art zwischen den Weltlinien der Elektronen darstellen lassen; die nachstehenden Betrachtungen brauchen deshalb nicht geändert zu werden. Vermutlich wird diese Verallgemeinerung jedoch nicht nötig sein.

In der klassischen Dynamik erhält man immer eine (und nur eine) mögliche Bewegung eines Systems, wenn man die Koordinaten und Momente für einen bestimmten Zeitpunkt willkürlich vorschreibt;

dies kommt daher, daß ihre zeitlichen Differentialquotienten durch die Hamiltonschen Gleichungen als Funktionen der gleichzeitigen Werte dieser Größen selbst gegeben sind. Nach unseren Gleichungen (8) dagegen kommen wesentlich auch die früheren und späteren Werte in Betracht und es ist von vornherein durchaus nicht sicher, ob man durch jeden Punkt des Phasenraumes eine Bahnkurve legen kann, die diesen Gleichungen genügt. Bei hyperbelartiger Bewegung wird dies vermutlich wohl der Fall sein, da hier die Kurve beiderseits in die Unendlichkeit verläuft und man die beiden Zweige anscheinend hinreichend beliebig verlegen können, um den Gleichungen zu genügen. Bei quasiperiodischer Bewegung jedoch erscheint es sehr wohl möglich, daß die Funktionen  $w_{ik}$  solche Eigenschaften haben, daß nur durch bestimmte Phasenpunkte eine mögliche Bahnkurve hindurchgeht, daß also z. B. im Bohrschen Wasserstoffatom nur die durch die beiden Sommerfeldschen Quantenzahlen diskret ausgezeichneten Bewegungen möglich sind. Wenn dies der Fall ist, wird z. B. auch ein solches Zusammentreffen zweier negativen und eines positiven Elektrons, das zu einem Wasserstoffatom und einem freien Elektron führt, immer nur ein Atom mit ganzen Quantenzahlen liefern können.

Befinden sich nun z. B. zwei gleichartige Atome verschiedener Quantenzahlen in großer gegenseitiger Entfernung, so werden sie im allgemeinen nur geringe und unbedeutende Wirkungen aufeinander ausüben; bei ganz bestimmten Geschwindigkeiten und relativen Lagen, die eventuell erst durch vorübergehende Einwirkung eines dritten Atoms (beliebiger Art) herbeigeführt werden müssen, könnten die Kräfte jedoch sehr groß werden, ähnlich wie der zeitliche Mittelwert von  $\cos mt \cos nt$  gleich Null ist, außer wenn  $m = n$ . Es könnte dies dann zu einem kurzdauernden Energieübergang führen, wobei die Atome ihre Quantenzahlen vertauschen. Der Energieverlust des einen und der Energiegewinn des anderen werden zu Zeitpunkten eintreten, die der Entfernung entsprechend verschieden sind, d. h. wir haben dasjenige vor uns, was gewöhnlich als Strahlungsemission und nachherige -absorption betrachtet wird. Während nach der klassischen Auffassung aber Strahlung einfach aufs Geratewohl emittiert wird, um eventuell irgendwo wieder absorbiert zu werden, sind nach unserer Theorie Emission und Absorption einander bedingende Vorgänge und bei jeder Emission ist schon prädestiniert, wann, wo und wie die Absorption erfolgen wird.

Es würde die Sonne nicht strahlen; falls sie allein im Weltall vorhanden wäre und keine anderen Körper ihre Strahlung absorbieren könnten. Zwischen Wärmestrahlung und Wärmeleitung gibt es in

unserer Theorie keinen prinzipiellen Unterschied, und ebensowenig wie ein Körper durch Leitung Wärme verlieren kann, wenn die Molekeln seiner Oberfläche nicht mit denen anderer Körper in Wechselwirkung stehen, ebensowenig kann er es durch Strahlung, nur sind im letzteren Falle die Abstände viel größer.

Bei ganz allgemein gehaltenen Grundgleichungen würde die Absorption der Emission auch zeitlich vorgehen können, doch erscheint es wenig wahrscheinlich, daß dies in Wirklichkeit zutreffen wird. Die Absorption kann natürlich auch durch ein ungleichartiges Atom, z. B. durch Ionisation desselben erfolgen, oder auch durch zusammengesetztere Gebilde.

Es können auch auf dem Lichtweg zwischen dem emittierenden und dem absorbierenden System andere, eventuell sehr zahlreiche und komplexe Systeme, z. B. ganze Körper, sich befinden, die an dem Vorgang teilnehmen und die Strahlung reflektieren, brechen und beugen werden. Das Licht, das als Quant emittiert wurde, wird aber auch als solches wieder absorbiert werden, obwohl es inzwischen sehr große Ausdehnung gehabt haben mag, wie die Interferenzerscheinungen zeigen. Nach der bisherigen Theorie, die die unmittelbare Beziehung zwischen Absorption und Emission leugnete, war dies schlechthin unverständlich und erschien als ein logischer Widerspruch.

Aber noch ein anderes leistet die neue Auffassung. Nach der bisherigen Ansicht wird die Emission eines Lichtquanten, z. B. durch ein Wasserstoffatom, durch Zufall bedingt. Man versteht aber gar nicht, wo der herkommen soll. Nach der neuen Theorie aber erfolgt die Emission dann, wenn feststeht, daß an einem anderen, späteren Weltpunkt die Absorption in einem bestimmten Atom oder Atomkomplex wird erfolgen können. Man könnte hiernach auf die Ansicht verfallen, daß die Menge der Materie des Weltalls für die Häufigkeit der Emissionen wesentlich sei. Doch verhält sich dies wohl nicht notwendig so, da zwei konkurrierende Absorptionszentren sich nicht unterstützen werden, sondern einander vermutlich entgegenwirken. Wenn die Menge der Materie nur groß genug und nur einigermaßen in alle Richtungen verteilt ist, wird ihre Größe weiter wohl ohne Einfluß sein. Ohne nähere mathematische Betrachtungen erscheint ein weiteres Eingehen auf diese Frage aber zwecklos.

Wenn ich nun z. B. gestern abend durch mein Fernrohr jenen Stern betrachtet habe, der, sagen wir, 100 Lichtjahre entfernt ist, so wußte nicht nur ich, daß das Licht, das er in mein Auge gelangen ließ, vor gerade 100 Jahren von ihm emittiert wurde, sondern auch der Stern oder doch einzelne seiner Atome wußten gewissermaßen

schon vor 100 Jahren, daß ich, der damals noch gar nicht existierte, gestern abend um so und soviel Uhr ihn betrachten würde und sie wußten auch etwas von den Dimensionen meines Fernrohres, dem Ort seiner Aufstellung, den Brechungsindizes seiner Linsen, von meinem Auge usw. Dies klingt freilich recht paradox, weil es unseren heutigen Denkgewohnheiten zuwider ist. Die neuzeitliche Entwicklung der Naturwissenschaften hat eben zur Lehre der Nahewirkung und der einseitig gerichteten, zum Teil zufallsmäßig bedingten Kausalität geführt. Man weiß aber, daß diese Auffassung nicht ursprünglich im menschlichen Geiste vorhanden war, und in früheren Zeiten nicht geteilt wurde, wo man bekanntlich ganz andersartige Zusammenhänge im Weltgeschehen vermutete, wenn auch manchmal in ziemlich naiver Weise.

Logisch ist gegen unsere Theorie meines Erachtens nichts einzuwenden. Sie ist eigentlich gar nichts anderes als diejenige Erweiterung der klassischen Mechanik diskreter Massenpunkte, die durch das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation notwendig geworden war.

Auch experimentell ist gegen sie, soweit wir ohne genauere Analyse beurteilen können, wohl nichts zu sagen. Wenn z. B. Strahlung von der Sonne emittiert und nach etwa acht Minuten auf der Erde wieder absorbiert wird, so ist sie nach der klassischen Theorie zu jedem Augenblick dieser Zwischenzeit an einer bestimmten Stelle des Raumes als Feldenergie vorhanden. Unsere Theorie kennt aber kein Feld und für sie ist die Strahlungsenergie zeitweilig verloren, um später wieder auf der Erde aufzutauchen. Einen beobachtbaren Unterschied macht dies aber nicht aus. Zwar können wir zwischen Sonne und Erdoberfläche einen dritten Körper stellen, der einen Teil der Strahlung absorbiert und so ihre Anwesenheit im Zwischenraum gewissermaßen konstatiert, allein dieser Teil gelangt dann eben nicht zur Erdoberfläche, so daß man nicht sagen kann, daß eine Strahlung sich unterwegs bemerkbar gemacht hätte. Ein etwaiger brechender Körper auf dem Zwischenweg könnte zwar Einfluß haben, jedoch können wir diesen Einfluß ohne Absorption nicht an Ort und Stelle konstatieren. Die klassische Auffassung erscheint natürlicher und entspricht mehr unserem Stetigkeitsbedürfnis; aber die Quantenerscheinungen zwingen uns meines Erachtens, sie im Prinzip aufzugeben, obwohl sie praktisch zur Vereinfachung der Rechnung in vielen Fällen (Brechung, Dispersion usw.) wohl noch beibehalten werden muß: die Wellenoptik wird in unserer Theorie eben nicht gerade sehr anschaulich sein.

Wir haben auf den letzten vier Seiten unsere Gedanken ziemlich weit über das hinausgehen lassen, was mathematisch exakt erwiesen war. Unsere Dynamik enthält, wie die klassische, eine unbestimmte Kräftefunktion. Da die Bestimmung der tatsächlich in der Natur vorliegenden Form dieser Funktion aber vermutlich nicht leicht sein wird und sich wohl noch einige Zeit hinziehen dürfte, schien es mir geboten, die Theorie einstweilen durch die gegebenen allgemeinen Betrachtungen zu vervollständigen, auf die Gefahr hin, daß gewisse Einzelheiten davon sich bei näherer mathematischer Untersuchung als änderungsbedürftig erweisen könnten. Denn nur so war es möglich, die voraussichtliche Fähigkeit unserer Ansätze zur Erfassung der Quantenerscheinungen und namentlich zur Lösung der Widersprüche zwischen den bisherigen Theorien überhaupt darzutun.

---