Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen.

Von **P. Ehrenfest** in Leiden (Holland).

(Eingegangen am 16. August 1932.)

Einige Fragen und Bemerkungen betreffs: A. Die imaginäre Einheit in der Schrödingergleichung und der Transformationstheorie: — B. Die mangelnde Analogie zwischen Photon und Elektron. — C. Das Zugänglichermachen der Spinorrechnung.

Es sei gestattet, im folgenden einige Fragen zusammenzustellen, die sich in ähnlicher Weise fast jedem Dozenten aufgedrängt haben müssen, der einem interessierten und zur Kritik erzogenen Zuhörerkreis die Quantenmechanik einführend darzulegen hatte. Wohl können diese Fragen, besonders in der vorliegenden Fassung, als „sinnlos“ zur Seite geschoben werden, wenn man es sich bequem machen will. Der gute Ton verlangt das sogar. Nun, dann muß eben irgendwer das Odium auf sich nehmen, sie dennoch zu stellen. Im festen Vertrauen darauf, daß es noch immer einzelne Forscher gibt, die die Kunst verstehen, „sinnlose“ Fragen sinnvoll zu beantworten, und zwar in klarer, einfacher Weise.

A. Die imaginäre Einheit in der Schrödingergleichung und den Vertauschungsrelationen von Heisenberg-Born. Es ist ein großer, klar überblickbarer Komplex experimenteller Entdeckungen, der dazu führt, das elektromagnetische Feld durch *zwei reelle* Vektoren E, H darzustellen oder, wenn man will, durch den *einen komplexen* Vektor $M = H + iE$, der dann den nichtreellen Differentialgleichungen genügt:

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial M}{\partial t} = \operatorname{rot} M, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} M = i\varrho. \tag{2}$$

In Analogie dazu möchte man gut, d. h. einigermaßen axiomatisch geklärt, überblicken, warum die de Broglie-Schrödinger-Wellen mindestens *zwei reelle* Skalare erfordern oder deren bequeme Zusammenfassung in *einen komplexen* Skalar ψ. Die *weitere* Verdopplung bei der wellenmechanischen Behandlung des Spins hat Pauli ja völlig klar begründet.

Bemerkungen. 1. De Broglies und Schrödingers erste Arbeiten lassen noch ganz klar die Beschreibbarkeit durch *einen* reellen Skalar erwarten[1]). Wenn da schon gelegentlich „zur Bequemlichkeit“ ein kom-

[1]) L. de Broglie, Wellenmechanik, S. 64, 65. Leipzig 1929. E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, S. 25. Leipzig, Barth, 1927.

plexer Zeitfaktor eingeführt wird, um eine Sinuswelle zu behandeln, so wird doch ausdrücklich betont, daß am Schluß der Rechnung der Realteil genommen werden soll[1]). Später ist das natürlich nicht mehr möglich, sobald die linke Seite der Schrödingergleichung endgültig ihren imaginären Koeffizienten bekommen hat[2]). Das Nachsuchen, wie verschiedene Autoren später in mehr lehrbuchmäßigen Darstellungen diesen Punkt behandelt haben, bringt keine Hilfe[3]).

2. Im Hinblick auf die Rolle der imaginären Einheit in den Vertauschungsrelationen und in der ganzen Transformationstheorie wäre erfreulich, klar überblicken zu können, inwieweit schon in der alten Bohrschen Formulierung des Korrespondenzprinzips der Übergang von reellen Fourierreihen zu den komplexen Exponentialreihen mehr bedeutete als eine bloße Vereinfachung des Schreibens.

B. Grenzen der Analogie zwischen Photonen und Elektronen. Im Falle streng monochromatischer Lichtwellen liefert das E, H-Feld für die verschiedenen Stellen eines Interferenzfeldes direkt die relativen Wahrscheinlichkeiten für die Anwesenheit eines Photons, denn die „Anzahl" der Photonen unterscheidet sich von der durch sie getragenen Energie nur um den hier festliegenden Faktor $h\nu$. Sobald es sich aber um ein nichtmonochromatisches Strahlungsfeld handelt, geht dieser eindeutige Zusammenhang zwischen den *lokalen* E, H-Werten und der *lokalen* Wahrscheinlichkeit für die Anwesenheit eines Photons verloren. Es ist dann erst noch ergänzend eine Fourieranalyse des E, H-Feldes nötig, also eine wesentlich nichtlokale Integrationsoperation. Es ist das ein Beispiel für eine schon unangenehme, aber immerhin noch bescheidene Analogiestörung:

Für eine *materielle Partikel* bestimmen die den Differentialgleichungen genügenden ψ-Werte direkt die lokalen Wahrscheinlichkeitsdichten für die Anwesenheit der Partikel. Hingegen ist dies *nicht* der Fall für die den Maxwellschen Gleichungen genügenden $H + iE$-Felder bezüglich des *Photons*.

Die Analogiestörung ist aber im Grunde natürlich eine viel tiefere: Die klassischen Maxwellgleichungen repräsentieren ja eine echte Feldtheorie innerhalb des vierdimensionalen x, y, z, t-Kontinuums. In der ursprünglichen Konzeption von de Broglie schienen sich auch die „Materiewellen"

[1]) E. Schrödinger, l. c. S. 57, Fußnote 1.

[2]) E. Schrödinger, l. c. S. 141, 142 und 169.

[3]) Z. B. A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband S. 8 und 46. H. Weyl, S. 44, J. Frenkel, S. 60. — Ja selbst W. Pauli (Müller-Pouillet, Bd. II. S. 1820, 1821) scheint es hier vermeiden zu wollen, „schlafende Hunde wach zu machen"!

in eine vierdimensionale Feldtheorie fügen zu wollen, für die dann auch die einfachen Typen von Interferenzexperimenten als klare Bestätigungen hätten gelten können. Der Glaube an die Möglichkeit einer solchen Feldtheorie ist uns aber (vorläufig?!) geraubt, seit Schrödinger bei der Wechselwirkung zwischen n Elektronen schon die Ausbreitung einer ψ-Funktion in einem $3\,n$-dimensionalen „Konfigurationsraum" zu Hilfe nehmen mußte und alle bisherigen Versuche, irgendwie zum vierdimensionalen Kontinuum heimzukehren, gescheitert sind[1]).

Es ergibt sich so die Frage: Wie soll man bei der *Einführung* in die Quantenmechanik die „Analogien zwischen Photon und Elektron" behandeln, da man sich bei dem gegenwärtigen Zustand der Quantenmechanik doch keinesfalls den Luxus erlauben kann, diese heuristisch so enorm verdienstlichen Vergleiche ganz einfach zu ignorieren?

Bemerkungen. 1. Der aus dem Laplace-Operator Δ abgeleitete lineare Operator $\sqrt{\Delta}$, den Landau und Peierls[2]) als Hilfsmittel für ihre Behandlung der Photonen eingeführt haben, ist natürlich kein Differentialoperator, sondern ein Integraloperator, also wesentlich *nichtlokal*[3]). Wenn diese Autoren also dem Schrödingerschen ψ, ψ^* nicht mehr $H + iE$, $H - iE$, sondern ihr F, F^* gegenüberstellen, so tut man gut, sorgfältig im Auge zu behalten, daß die Schrödingersche Größe seiner *Differential*gleichung genügt, das Landau-Peierlsche F dagegen der (verführerisch eleganten!) *Integral*gleichung:

$$\frac{1}{c}\dot{F} = -\sqrt{\Delta}F. \tag{3}$$

Und nun das Peierls-Landausche Selbstbekenntnis: „Man kann jedoch nicht etwa $F^* \frac{1}{\sqrt{\Delta}} F$ als Wahrscheinlichkeitsdichte definieren,

---

1) Man gewöhnt sich, den tiefen Konflikt zu vergessen, der hier mit einer unserer fundamentalsten physikalischen Überzeugungen vorliegt; nämlich mit der Überzeugung, daß die Weltmaschine ein direktes, *primäres* Zusammenspiel nur zwischen solchen Zustandsgrößen herstellt, die infinitesimal benachbarten $t\,x\,y\,z$-Punkten zugehören. Die Schrödingersche Differentialgleichung für zwei Elektronen verlangt dagegen ein Zusammenspiel der ψ-Werte in einem infinitesimalen Gebiet des $t\,x_1\,y_1\,z_1\,x_2\,y_2\,z_2$-Kontinuums, in welchem

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

beliebig viele Kilometer lang sein kann. Wir sollten uns immer wieder daran erinnern, eine wie *unheimliche Fernwirkungstheorie* also die Schrödingersche Wellentheorie ist, um unser Heimweh nach einer vierdimensionalen *Nahwirkungstheorie* wach zu halten! Gewisse, durch Einstein ersonnene, aber nie im Druck publizierte Gedankenexperimente sind hierfür sehr geeignet.

2) L. Landau und H. Peierls, ZS. f. Phys. **62**, 188, 1930.

3) Siehe l. c. Gleichung (4).

denn diese Größe ist nicht positiv definit." Als ob von ihr nichts Übleres zu erzählen wäre! Falls ich recht verstehe, haben spätere daran anschließende Arbeiten in der hier angedeuteten Frage keine Veränderungen gebracht[1]).

2. Man möchte klar überblicken, was es bedeutet, daß man nur $\psi\psi^*$ messen kann und nicht ψ selber, während man im elektromagnetischen Feld außer $^1/_2 (E^2 + H^2)$ auch E und H selber messen kann. Handelt es sich hier um eine Asymmetrie, von der man zu erwarten hat, daß sie auch dann noch bestehen bleiben wird, wenn man die *reziproke* Wechselwirkung zwischen „Materie" und „elektromagnetischem Feld" besser als derzeit in der Theorie wird darstellen können?

3. All die virtuosen Abhandlungen über die Analogien zwischen den Maxwellschen Gleichungen einerseits und speziell den Diracgleichungen andererseits haben, wenn ich richtig sehe, absolut nichts ergeben.

C. Bequemeres Zugänglichmachen der „Spinorenrechnung". Der reiche Vorrat von Analogien zwischen anschaulich sehr verschiedenen Vektoren und Vektorfeldern hat der Entwicklung der Mechanik und Physik immer wieder sehr geholfen. Der relativ viel geringere Vorrat von Analogien im Gebiet der Tensoren vom zweiten oder gar höheren Rang bedeutete in den Jahren zwischen 1900 und 1905 eine große Hemmung bei physikalischen Überlegungen. Man wird bei der Durchsicht von Abrahams Artikel in der mathematischen Encyklopädie IV, 14, 1900 lebendig daran erinnert! Ja selbst in Minkowskis berühmter Behandlung der speziellen Relativitätstheorie (1908) läßt die Bezeichnung des antisymmetrischen Feldtensors zweiten Ranges als „Raum-Zeit-Vektor zweiter Art" noch etwas davon fühlen. Nur erst Voigts „Lehrbuch der Kristallphysik" (1910) und besonders Einsteins Darstellung des absoluten Tensorkalküls in „Formalen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie" (1914) markieren so ungefähr das Aufhören dieser Hemmung für die Physiker, was die *Tensoren* betrifft.

Aber nun die *Spinoren*?! Die Physiker, die die Skizze kennen, die van der Waerden[2]) hauptsächlich im Anschluß an Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik) gab[3]), werden für diese Skizze sicher sehr aufrichtig dankbar sein. Aber noch immer fehlt ein *dünnes Büchlein,* aus dem man *gemütlich* die Spinorrechnung mit der Tensorrechnung vereinigt lernen könnte.

---

[1]) Siehe z. B. J. Solomon, Ann. de phys. **16**, 411, 1931.

[2]) Gött. Nachr. 1929, S. 100.

[3]) Siehe auch B. van der Waerden, Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, S. 82. Berlin, Julius Springer, 1932. O. Laporte u. C. Uhlenbeck, Phys. Rev. **37**, 1380, 1931.

Bemerkungen. 1. Es bleibt doch komisch, daß den Physikern nach 20 Jahren spezieller und 10 Jahren allgemeiner Relativitätstheorie nur erst aus Paulis Arbeit über die Wellenmechanik des Spinelektrons und der daran anschließenden Arbeit von Dirac die unheimliche Kunde kam, daß der isotrope Raum und die Einstein-Minkowski-Welt außer durch Tensoren auch noch durch das mysteriöse Geschlecht der Spinoren bevölkert werden kann. Nicht nur all das Geschreibe über die angebliche „Maxwellisierbarkeit" der Diracgleichungen wurde durch den ersten Schreck darüber ausgelöst, sondern auch die allzu tiefsinnige Verwendung des Spinelektrons als „Kreiselkompaß für Einsteinschen Fernparallelismus", mit der dann erst Fock[1]) aufräumte, indem er mit der nötigen Sorgfalt den Rechenapparat der Parallelübertragung von den Tensoren *richtig* auf die Spinoren ausbreitete.

2. Könnte sich nicht jemand, der diese Materie wirklich beherrscht, herablassen, in einer auch uns älteren Physikern lesbaren Form darzustellen, was für die Gruppe der *reellen Drehungen* in beliebig vieldimensionalen Räumen bekannt ist[2]): bezüglich der Topologie der Gruppe, ihren zweideutigen irreduziblen Darstellungen und den zu ihnen gehörigen spinorähnlichen Größen, insbesondere natürlich für die reelle Drehgruppe des *vier*dimensionalen Raumes? (Zusammenhang zwischen Tensoren und Quasispinoren in diesem Falle.) Eine klare, ungelehrte Übersicht über die Resultate wäre schon sehr erwünscht, selbst wenn von den Beweismethoden nur eine Andeutung gegeben würde!

3. Könnte nicht durch eine kompetente Diskussion geklärt werden, inwieweit Weyls Vermutung (Gruppentheorie und Quantenmechanik, S. 142) richtig ist, daß in der Physik nur solche Tensoren eine fundamentale Rolle spielen, deren Komponenten sich gemäß *irreduziblen* Darstellungen der Dreh- bzw. Lorentzgruppe transformieren?. (Der Energie-Spannungstensor eines Diracelektrons liefert, wie ich von Uhlenbeck höre, ein Gegenbeispiel.) Akzeptiert man Weyls Vermutung, so wird man wünschen, daß jenes „dünne Büchlein über Spinor- und Tensorrechnung" sich danach richtet.

4. Wäre es möglich, daß bei der Klassifikation von linear-homogenen Erscheinungszusammenhängen in Kristallen neben den Tensoren (siehe Voigts oben zitiertes Buch) auch noch Spinoren eine Rolle spielen könnten?

---

[1]) ZS. f. Phys. **57**, 261, 1929.

[2]) Siehe H. Weyl, Math. ZS. **23**, 270, 1925; **24**, 328, 377, 789, 1926.