

Über die Streuung von Neutronen an Protonen.

Von **E. Wigner**, zur Zeit in Budapest.

(Eingegangen am 17. März 1933.)

Die Streuung von Neutronen an Protonen wird unter der Annahme berechnet, daß sich ihre Wechselwirkung durch ein Potential beschreiben läßt, das sich auf nur sehr kleine Entfernungen erstreckt. Dieses Potential wird mit dem Massendefekt des Ureyschen Wasserstoffs in Zusammenhang gebracht.

1. Die Streuung von Neutronen an Atomkernen wurde schon von Massey¹⁾ behandelt. Wenn diese Frage im folgenden erneut angegriffen wird, so sei dies damit entschuldigt, daß sich die Masseyschen Untersuchungen in erster Reihe mit der Streuung an schweren Kernen beschäftigen, während im folgenden die Streuung an Protonen besprochen und mit dem Massendefekt des H^2 in Zusammenhang gebracht werden soll. Außerdem soll die Richtungsabhängigkeit der Streuintensität genauer besprochen werden.

Man kann die Streuung nach dem Verfahren von Faxén und Holtsmark²⁾ folgendermaßen berechnen: Man zerlegt zunächst die einfallende ebene, monochromatische Welle in Wellen, bei denen der Gesamtdrehimpuls feste, scharfe Werte hat. Zu diesem Zweck benutzt man das Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt des ganzen Systems ruht, dann hängt die Wellenfunktion nur von den Differenzen x, y, z der Koordinaten des Protons und Neutrons ab. Die einfallende Welle sei $e^{ipz/h}$; die Wellenfunktion eines Zustandes mit dem Gesamtdrehimpuls l und einer Komponente des Drehimpulses parallel Z gleich Null, sei ψ_l . Dann schreibt man zunächst

$$e^{ipz/h} = a_0 \psi_0 + a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots \quad (1)$$

Dabei ist

$$\psi_0 = r^{-1} \sin pr/h; \quad \psi_1 = \partial \psi_0 / \partial z;$$

$$\psi_2 = \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_0; \text{ usw.}$$

Die Koeffizienten a_l erhält man am einfachsten durch Vergleich des Wertes und der verschiedenen Differentialkoeffizienten nach z auf beiden Seiten

¹⁾ H. S. W. Massey, Proc. Roy. Soc. London (A) **138**, 460, 1932.

²⁾ H. Faxén u. J. Holtsmark, ZS. f. Phys. **45**, 307, 1927.

von (1) im Anfangspunkt des Koordinatensystems; die ersten $l - 1$ Differentialkoeffizienten von ψ_l verschwinden in diesem Punkt. Man erhält so

$$e^{i p z / \hbar} = \frac{\sin p r / \hbar}{p r / \hbar} - \frac{3 i \hbar}{p} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin p r / \hbar}{p r / \hbar} + \dots \quad (1a)$$

Dabei ist ϑ der Winkel zwischen der Z -Achse und der Richtung nach x, y, z . Die einzelnen Glieder in (1) sind Lösungen der potentialfreien Schrödingergleichung $-\hbar^2 \Delta \psi_l = p^2 \psi_l$, sie müssen ersetzt werden durch Lösungen φ_l der wirklichen Schrödingergleichung (\hbar ist die Plancksche Konstante dividiert durch 2π)

$$-\hbar^2 \Delta \varphi_l = (p^2 - M V(r)) \varphi_l, \quad (2)$$

wo M die Protonenmasse ist und p den Impuls der Teilchen im Schwerpunktsystem bedeutet, so daß die Relativgeschwindigkeit $2p/M$ ist. Das Ersetzen der ψ_l durch die φ_l geschieht durch Addition von Funktionen f_l zu den ψ_l , die denselben Drehimpuls wie die entsprechenden ψ_l haben und deren Benehmen im Unendlichen die einer auslaufenden Welle ist, die also im Unendlichen proportional den Ausdrücken

$$r^{-1} e^{i p r / \hbar}, \quad \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} e^{i p r / \hbar}, \quad \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) r^{-1} e^{i p r / \hbar} \text{ usw.}$$

sind. Die gestreute Welle ist dann $f_0 + f_1 + f_2 + \dots$

Schon die Streuversuche von I. Curie und Joliot¹⁾ lassen erkennen, daß die Streuung im wesentlichen kugelsymmetrisch ist und jedenfalls die Vorwärtsstreuung nicht so ausgesprochen bevorzugt ist, wie etwa bei der Streuung von α -Teilchen. Dieser allgemeine Charakter der Streuung wird auch durch die neueren Versuche von Dunning und Pegram²⁾ bestätigt. Daher liegt es nahe, anzunehmen, daß die gestreute Welle im wesentlichen aus dem kugelsymmetrischen f_0 allein besteht. Dem würde entsprechen, daß ψ_1, ψ_2, \dots schon beinahe Lösungen der Schrödingergleichung (2) mit Potential sind, d. h. das Glied $M V \varphi_l$ in (2) für $l \neq 0$ klein ist. Das ist sicher der Fall, sobald der Abstand a , in dem V sehr klein wird, wesentlich kleiner als die Wellenlänge \hbar/p ist. Dies führt dazu, die Halbwertsbreite des Potentials kleiner als \hbar^2/mc^2 anzunehmen³⁾.

2. Nun sei die Rechnung durchgeführt, zunächst mit einem „kastenförmigen“ Potential, das für $r < a$ gleich $-v$, für $r > a$ gleich Null ist.

¹⁾ I. Curie u. F. Joliot, La projection des noyaux atomiques par un rayonnement très pénétrant. Paris 1932. J. L. Destouches, Etat actuel de la théorie du neutron. Paris 1932.

²⁾ J. R. Dunning u. G. B. Pegram, Phys. Rev. **43**, 497, 1933.

³⁾ Vgl. auch E. Wigner, ebenda **43**, 252, 1933.

Die Wellenfunktion des *diskreten* stationären Zustandes ist für $r < a$ gleich $r^{-1} \sin p_0 r/h$, für $r > a$ gleich $c r^{-1} e^{i p_1 (r-a)/h}$, wo p_1 positiv imaginär, $-p_1^2/M = \varepsilon$ die Bindungsenergie [nach Bainbridge¹] ungefähr das Dreifache der Ruheenergie des Elektrons] und $p_0^2 = M(v - \varepsilon)$ ist. Die Forderung der Stetigkeit der Wellenfunktion und ihres Differentialquotienten ergibt in bekannter Weise (es ist $a/h = a'$):

$$p_0 \operatorname{ctg} p_0 a' = i p_1 = -\sqrt{M\varepsilon}, \quad (3)$$

d. h. es muß, damit überhaupt ein stationärer Zustand existiere,

$$\sqrt{M(v - \varepsilon)} a' > \frac{\pi}{2}$$

sein. Durch Reihenentwicklung erhält man (man setze $p_0 a' = \pi/2 + x$ und entwickle nach x):

$$\sqrt{M(v - \varepsilon)} = \frac{\pi}{2a'} + \frac{2\sqrt{M\varepsilon}}{\pi} - \frac{8M\varepsilon a'}{\pi^3} \dots \quad (3a)$$

Diese Reihe konvergiert um so besser, je kleiner a' ist, für alle wirklich in Frage kommenden a' genügen die ersten zwei bis drei Glieder.

Nun berechnen wir f_0 , den kugelsymmetrischen Teil der gestreuten Welle. Für $r < a$ ist wiederum $\varphi_0 = c r^{-1} \sin p_i r/h$, für $r > a$ jedoch

$$\varphi_0 = \frac{\sin p_a r/h}{p_a r/h} + b r^{-1} e^{i p_a (r-a)/h}, \quad (4)$$

wo p_a diesmal reell ist. Es ergibt sich

$$b = -\frac{h}{p_a} \frac{p_i \operatorname{ctg} p_i a' \sin p_a a' - p_a \cos p_a a'}{p_i \operatorname{ctg} p_i a' - i p_a} \quad (4a)$$

oder mit Hilfe von $p_i^2 = p_a^2 + Mv$ und (3a) die Reihe

$$b = -\frac{h}{i p_a + \sqrt{M\varepsilon}} - \frac{h a'}{2} + \dots \quad (4b)$$

Die erste Näherung der Bornschen Stoßtheorie würde für b ergeben²):

$$b = \frac{h M v}{2 p_a^2} e^{i p_a a'} \left(a' - \frac{1}{2 p_a} \sin 2 p_a a' \right).$$

Sie ist also im vorliegenden Falle nicht ausreichend.

¹) K. T. Bainbridge, Phys. Rev. **42**, 1, 1932; J. D. Hardy, E. F. Barker u. D. U. Dennison, Phys. Rev. **42**, 279, 1932.

²) Vgl. L. Brillouin, Die Quantenstatistik, S. 262. Berlin 1931.

Es sei nun f_1 berechnet. Für $r < a$ gilt

$$\varphi_1 = c \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin p_i r/h}{p_i r/h},$$

für $r > a$ dagegen

$$\varphi_1 = -\frac{3 i h}{p_a} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin p_a r/h}{p_a r/h} + b \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i p_a (r-a)/h}}{i p_a r/h}. \quad (5)$$

Die Stetigkeitsbedingungen für $r = a$ ergeben

$$b = \left(\frac{12}{\pi^2} - 1 \right) i h p_a a'^2. \quad (5a)$$

Die Streuung der Neutronen mit dem Drehimpuls 1 fällt daher schon in die Größenordnung, die wir bei (4b) vernachlässigt haben. Wir führen (5) trotzdem weiter mit, um die Bedeutung einer Vorwärtsstreuung beurteilen zu können.

Die gesamte gestreute Welle ergibt sich mithin für $r \rightarrow \infty$

$$f_0 + f_1 + \dots = r^{-1} e^{i p_a (r-a)/h} \left(-\frac{h}{\sqrt{M \varepsilon + i p_a}} - \frac{a}{2} + \frac{0,21 i p_a a^2}{h} \cos \vartheta \right). \quad (6)$$

Die Intensität der Streuung im Schwerpunktsystem in der Richtung ϑ ist daher

$$J_\vartheta = \left(\frac{h \sqrt{M \varepsilon}}{M \varepsilon + p_a^2} + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{p_a h}{M \varepsilon + p_a^2} + \frac{0,21 p_a a^2}{h} \cos \vartheta \right)^2. \quad (6a)$$

Eine wesentliche Vorwärtsstreuung ist also dann zu erwarten, wenn erstens p_a nicht viel kleiner als $\sqrt{M \varepsilon}$ ist (diese Bedingung ist bei den meisten Versuchen erfüllt), außerdem muß aber $0,21 a^2 (p_a^2 + M \varepsilon)/h^2$ nicht viel kleiner als 1 sein. Die Asymmetrie der Streuung im Schwerpunktsystem ist daher nach (6a) direkt ein Maß für die Ausbreitung des Wechselwirkungspotentials zwischen Neutron und Proton. Eine bevorzugte Rückwärtsstreuung ist nur zu erwarten, wenn dieses Potential auch abstoßende Gebiete hat.

Um die absolute Größe des Wirkungsquerschnitts q von Proton und Neutron zu berechnen, müssen wir beachten, daß die Dichte beider Teilchenarten für die Wellenfunktion (1) gleich 1 ist, die Anzahl der Zusammenstöße pro Kubikzentimeter und Sekunde daher $2 q p_a/M$ (da die Relativgeschwindigkeit $2 p_a/M$ ist). Die Anzahl der aneinandergestreuten Paare mit dem Schwerpunkt im betrachteten Kubikzentimeter und dem gegenseitigen Abstand zwischen r und $r + 1$ ist daher gerade q . Durch Quadrieren

von (6) und Integrieren in diesem Gebiet erhält man für diese Größe bis auf Glieder mit a^2 .

$$q = \frac{8\pi h^2}{M} \frac{1 + a\sqrt{M\varepsilon}/h}{E + 2\varepsilon}, \quad (7)$$

wo E die kinetische Energie $2p_a^2/M$ des Neutrons bei ruhendem Proton ist.

Bei dem Eckartschen Potential¹⁾ $V(r) = -4v_0/(1 + e^{r/\rho})(1 + e^{-r/\rho})$ tritt an Stelle des Faktors $1 + a\sqrt{M\varepsilon}/h$ der Ausdruck $1 + 4\rho\sqrt{M\varepsilon}/h$. Das Eckartsche schmiegt sich an das hier benutzte Kastenpotential mit $a = 2,5\rho$ und $v = 0,61v_0$ am besten an. Die beiden Ausdrücke für die Streuung sind daher nicht allzu verschieden.

Die Messungen von Meitner und Philipp²⁾ ergeben bei Energien von $0,5 \cdot 10^6$ bis $2 \cdot 10^6$ Elektronenvolt für die Neutronen einen Wirkungsradius, der größer als $8 \cdot 10^{-13}$ cm ist. Für $a = 0$ gibt (7) bei diesen Energien die Werte $8 \cdot 10^{-13}$ bzw. $10 \cdot 10^{-13}$ cm, bei größeren a noch größere. Die Werte, die man aus den Messungen von I. Curie und Joliot³⁾ ableiten kann, sind viel kleiner und stehen im Widerspruch zu (7). Die Messungen von Dunning und Pegram entsprechen dagegen den Meitner-Philippischen.

3. Am einfachsten wird das Bild, wenn man $a = 0$ annimmt, d. h. ein in einem unendlich schmalen Gebiet unendlich großes Potential. Dann wird der Stoßquerschnitt unabhängig davon, wie das Potential im einzelnen aussieht. Aus diesem Grunde und da die Meitner-Philippischen Versuche dieser Vorstellung vorläufig nicht widersprechen, seien ihre Konsequenzen etwas ausführlicher erörtert.

Die Wellenfunktion wird für jeden endlichen Abstand der Teilchen voneinander der Gleichung $-\hbar^2 \Delta \psi = i\hbar M \partial \psi / \partial t$ genügen, und die Existenz des Potentials wird sich nur in einem singulären Benehmen der Wellenfunktion äußern, wenn man die Teilchen einander nähert⁴⁾. Entwickelt

¹⁾ C. Eckart, Phys. Rev. **35**, 1303, 1930.

²⁾ L. Meitner u. K. Philipp, Naturwissensch. **20**, 929, 1932.

³⁾ l. c.

⁴⁾ Die Möglichkeit, gewisse Singularitäten in der Wellenfunktion zuzulassen und insbesondere die Notwendigkeit, bei gewissen singulären Potentialen ($1/r^n$ bei $n > 2$) solche Singularitäten anzunehmen, wurde in einer bisher nicht publizierten Arbeit von J. v. Neumann untersucht. Für die Möglichkeit, seine unpublizierte Arbeit zu studieren, sowie für andere mannigfache Anregungen sei Herrn v. Neumann auch an dieser Stelle bestens gedankt.

man die Wellenfunktion nach Kugelfunktionen der Richtung ϑ , φ der Verbindungslinie der Teilchen

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \varphi_{lm}(\xi, \eta, \zeta, r) P_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (8)$$

(ξ, η, ζ sind die Schwerpunktskoordinaten, r der Abstand der Teilchen voneinander), so werden die φ_{lm} mit $l \neq 0$ auch für $r = 0$ regulär sein (sogar verschwinden): je kleiner der Radius des Potentialberges ist, um so weniger wird er sich bei den φ_{lm} mit $l \neq 0$ bemerkbar machen. Dies geht für φ_{10} auch aus (5 a) hervor: b verschwindet, wenn a zu Null geht.

In φ_0 tritt dagegen bei $r = 0$ eine Singularität auf. In (4) haben wir die stationären Zustände bestimmt, sie haben für $r > a$, also im vorliegenden Falle überall, die Form

$$\varphi_0 = \frac{\sin pr/h}{pr/h} + \frac{b}{r} e^{ipr/h} = c \left(\frac{\sin pr/h}{pr/h} + b' \frac{\cos pr/h}{r} \right). \quad (9)$$

Dabei ergibt sich b' aus (4 b) zu

$$b' = \frac{b}{1 + ibp/h} = -\frac{h}{\sqrt{M\varepsilon}}, \quad (9a)$$

so daß der Koeffizient des Gliedes $1/r$ zum Koeffizienten des konstanten Gliedes in einem vom Energieparameter unabhängigen Verhältnis steht. Da sich jede Wellenfunktion als eine Linearkombination stationärer Zustände schreiben läßt, gilt dies für alle Wellenfunktionen. Man kann das Potential ganz weglassen und an seine Stelle diese Grenzbedingung einführen, — ε ist dabei der einzige diskrete Eigenwert.

Ob diese Annahme über das Potential zur Beschreibung der Streuversuche geeignet ist (und ob man die Verhältnisse überhaupt durch ein Potential beschreiben kann), kann wohl nur an Hand weiterer Versuche entschieden werden. Es ist ja bekannt¹⁾, daß man dieses Potential für das Diracsche Elektron nicht mehr verallgemeinern kann.

¹⁾ Vgl. J. L. Destouches, l. c.