Über eine Frage der Eigenwerttheorie.

Von **V. Ambarzumian** in Pulkowo.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. Dezember 1928.)

Es wird für einen Spezialfall (schwingende Saite, natürliche Randbedingungen) gezeigt, daß das Eigenwertspektrum die Differentialgleichung (in der Schrödingerschen Theorie „Amplitudengleichung") eindeutig bestimmt.

Für einige Gebiete der theoretischen Physik (Wellenmechanik, Schwingungstheorie), welche zum Eigenwertproblem führen, ist die Frage nach der eindeutigen Bestimmung des mechanischen Systems (d. h. der Hamiltonschen Funktion) durch das Eigenwertsspektrum der zugehörigen linearen Differentialgleichung von Wichtigkeit. Wenn das Spektrum die Differentialgleichung wirklich vollständig definiert, so wäre es möglich, z. B. den Aufbau irgend eines Atomsystems praktisch aus dem Spektrum zu bestimmen, d. h. die Aufgabe zu lösen, welche sozusagen reziprok zum Schrödingerschen Problem steht*. Aber die allgemeine Behandlung des Problems führt zu manchen Schwierigkeiten.

Wir wollen hier nur einen Spezialfall betrachten. Wir wollen beweisen, daß unter allen Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{d x^2} - q(x) \varphi + \alpha \varphi = 0,$$

wo α der Eigenwertparameter, $q(x)$ eine stetige Funktion und μ eine Konstante sind, bei „natürlichen Randbedingungen": $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$, nur die Gleichung:

$$\varkappa \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \alpha \varphi = 0$$

der schwingenden Saite mit freien Rändern die Eigenwerte:

$$\alpha_n = \varkappa n^2$$

hat.

§ 1. Zunächst wollen wir die Differentialgleichung:

$$(p y')' - g y - \lambda r y + \alpha y = 0 \tag{1}$$

betrachten, wo $\lambda r y$ das „Störungsglied", r, p, p' stetige Funktionen von x sind und $p > 0$ ist. Die Differentialgleichung (1) hat für die gegebenen Randbedingungen $y'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ eine abzählbare Menge von Eigenwerten, welche wir nach wachsender Größe ordnen können:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \tag{2}$$

* Diese Bemerkung verdanke ich Herrn D. Ivanenko.

Diese Eigenwerte sind Funktionen von λ. Es wird gezeigt, daß diese Funktionen keine reellen Singularitätspunkte haben. Es ist leicht zu sehen, daß es genügt zu beweisen, daß die $\alpha_i(\lambda)$ reguläre analytische Funktionen von λ in der Umgebung von $\lambda = 0$ sind, denn damit beweisen wir unsere Behauptung für die Gleichung:

$$(py')' + (g - \lambda_0 r)y - (\lambda - \lambda_0) r y + \alpha y = 0 \tag{3}$$

in der Umgebung von $\lambda = \lambda_0$, wo λ_0 eine beliebige reelle Zahl ist. Die Gleichung (3) ist aber mit (1) identisch. Zunächst setzen wir voraus, daß $\alpha = 0$ kein Eigenwert der Gleichung:

$$(py')' - gy - \alpha y = 0 \tag{1'}$$

ist. Dann hat der Differentialausdruck:

$$L[y] = (py')' - gy$$

die Greensche Funktion $G(x_1 \xi)$.

Die Potenzreihe

$$S(x, \xi; \lambda) = G(x, \xi) + \lambda G_2(x, \xi) + \lambda^2 G_3(x, \xi) + \cdots, \tag{4}$$

in welcher

$$G_n(x, \xi) = \int \cdots \int G(x, t_1) r(t_1) G(t_1, t_2) r(t_2) \cdots r(t_{n-1}) G(t_{n-1}, \xi) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}$$

ist, konvergiert innerhalb eines Kreises $|\lambda| < \varrho$, denn die Funktionen $G(x, \xi)$ und $r(x)$ sind beschränkt. Die Summe dieser Reihe, welche gleich

$$S(x, \xi; \lambda) = \frac{K(x, \xi; \lambda)}{r(\xi)}$$

ist, wo $K(x, \xi; \lambda)$ den lösenden Kern (die Resolvente) des Kernes $G(x, \xi) r(\xi)$ bedeutet, stellt für $|\lambda| < \varrho$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$L[y] - \lambda r y = (py')' - gy - \lambda r y$$

dar.

Die Eigenwerte der Gleichung (1) sind die Nullstellen des Fredholmschen Nenners für den Kern $S(x, \xi; \lambda)$, d. h. wir können für $|\lambda| < \varrho$ diese Eigenwerte durch die Gleichung:

$$D(\alpha, \lambda) = 1 - \frac{1}{1!} D_1(\lambda) + \frac{1}{2!} D_2(\lambda) \alpha^2 - \frac{1}{3!} D_3(\lambda) \alpha^3 + \cdots = 0 \tag{5}$$

definieren, wo

$$D_n(\lambda) = \int \cdots \int \begin{vmatrix} S(x_1, x_1; \lambda), & S(x_1, x_2; \lambda) & \ldots & S(x_1, x_n; \lambda) \\ S(x_2, x_1; \lambda), & S(x_2, x_2; \lambda) & \ldots & S(x_2, x_n; \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S(x_n, x_1; \lambda), & S(x_n, x_2; \lambda) & \ldots & S(x_n, x_n; \lambda) \end{vmatrix} dx_1 \cdots dx_n.$$

Die Reihe (5) konvergiert für $|\lambda| \leqq \varrho - \varepsilon$, wo ε eine beliebige positive Zahl ist, und für alle endlichen α gleichmäßig*. Folglich stellt sie eine analytische Funktion beider Variablen dar, und die gemeinsamen Konvergenzkreise sind die ganze α-Ebene und der Kreis $|\lambda| < \varrho$.

Entwickeln wir $D(\alpha, \lambda)$ nach Potenzen von $\alpha - \alpha_i(0)$ und λ, so bemerken wir unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\alpha_i(0)$ eine einfache Wurzel von $D(\alpha, 0) = 0$ ist, daß das konstante Glied der Entwicklung verschwindet, aber der Koeffizient bei $[\alpha - \alpha_i(0)]$ von Null verschieden ist. Nach dem Satz über die impliziten Funktionen können wir nun behaupten, daß in einem Konvergenzkreis die Funktion $\alpha_i(\lambda)$, d. h. die Nullstelle von $D(\alpha, \lambda) = 0$, welche in $\alpha_i(0)$ übergeht, bei $\lambda = 0$, in eine Reihe nach Potenzen von λ entwickelbar ist. Also, die Eigenwerte sind analytische Funktionen des Störungsparameters λ in der Umgebung von $\lambda = 0$, wenn nur $\alpha = 0$ kein Eigenwert der Gleichung (1') ist. Die letzte Voraussetzung ist jedoch ganz unwesentlich. In der Tat, es sei, wenn $\alpha = 0$ ein Eigenwert der Gleichung (1') ist, k der absoluten Größe nach der nächstfolgende Eigenwert. Dann können wir die Gleichung:

$$(py')' - \left(g + \frac{k}{2}\right) y + \beta y = 0 \tag{6}$$

betrachten, für welche $\beta = 0$ kein Eigenwert ist. Wir können nun sagen, daß die Eigenwerte der Gleichung:

$$(py')' - \left(g + \frac{k}{2}\right) y - \lambda r y + \beta y = 0 \tag{7}$$

analytische Funktionen von λ (in der Umgebung der $\lambda = 0$) sind. Aber die Eigenwerte der Gleichungen (7) und (1) unterscheiden sich voneinander nur durch die konstante Größe $\frac{k}{2}$. Daher sind auch letztere analytische Funktionen von λ.

Wir können jetzt behaupten, daß für jedes reelle λ die Eigenwerte der Gleichung (1) analytische Funktionen von λ sind**.

§ 2. Dasselbe Verfahren wie im vorigen Paragraphen zeigt uns, daß auch $D(x, \xi; \alpha, \lambda)$ (Fredholmscher Zähler) eine analytische Funktion beider Variablen α und λ in der ganzen α-Ebene und in Kreise $|\lambda| < \varrho$ ist.

* Vgl. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik 1924, S. 126.

** Man kann diese Behauptung auf anderem Wege etwas kürzer beweisen, aber unser Beweis schließt vielleicht die Möglichkeit der Erweiterung auf das Gebiet von mehreren unabhängigen Variablen ein. In diesem Falle treten jedoch Schwierigkeiten auf, welche mit mehrfachen Eigenwerten verknüpft sind.

Bezeichnen wir die normierten Eigenfunktionen der Differentialgleichung (1') durch:

$$\varphi_1(x,\lambda), \quad \varphi_2(x,\lambda), \quad \ldots, \tag{8}$$

so ist bekannt, daß die Produkte $\varphi_i(x,\lambda)\,\varphi_i(\xi,\lambda)$ die Residuen der Resolvente

$$\Gamma(x,\xi;\alpha,\lambda) = \frac{D(x,\xi;\alpha,\lambda)}{D(\alpha,\lambda)}$$

an den Stellen $\alpha = \alpha_i(\lambda)$ bilden. Wir haben:

$$\varphi_i(x,\lambda)\,\varphi_i(\xi,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Gamma(x,\xi;\alpha,\lambda)\,d\alpha, \tag{9}$$

wo die Kurve C in der α-Ebene die Stelle $\alpha_i(\lambda)$ umschließt, aber keine andere $\alpha_j(\lambda)\,(j \neq i)$ mehr enthält. Bei Änderung der λ im Gebiet $|\lambda| < a < \varrho$, wo a eine positive Zahl ist, welche wir später wählen wollen, ändert sich jeder Eigenwert in einem Gebiet B_i. Es ist leicht zu sehen, daß für hinreichend kleine a keines aus den Gebieten $B_j\,(j \neq i)$ mit B_i gemeinsame Punkte hat. Denn einerseits sind wegen der Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte bei beschränkten Änderungen von λ alle Änderungen von Eigenwerten gleichmäßig beschränkt. Andererseits, es seien $\alpha_1(\lambda), \ldots, \alpha_N(\lambda)$ die ersten N-Eigenwerte, welche analytische Funktion von λ sind, so können wir N so groß wählen, daß die $\alpha_{N+1}(\lambda), \ldots$ für jedes $|\lambda| < \varrho$ größer sind als die $\alpha_i(\lambda)$ für dasselbe λ Da kein Paar von $\alpha_i(0)$ miteinander zusammenfällt, können wir a so klein annehmen, daß für $|\lambda| < a$ alle $\alpha_i(\lambda)\,(i = 1, \ldots N)$ regulär sind und kein Paar der Gebiete B_i gemeinsame Punkte hat. Wir wählen nun C so, daß es das Gebiet B_i, aber keinen Punkt der $B_j\,(j \neq i)$ einschließt (vgl. Fig. 1). Die Formel (9) zeigt dann, daß für hinreichend kleine λ die Funktion $\varphi_i(x,\lambda)\,\varphi_i(\xi,\lambda)$ von λ analytisch abhängt. Duraus können wir schließen, daß auch $\varphi_i(x,\lambda)$ eine analytische Funktion von λ ist.

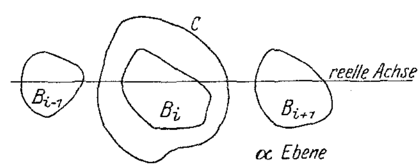

Fig. 1.

Für weitere Überlegungen ist es wichtig, die Ausdrücke für gestörte Eigenwerte einzuführen. Wir wollen hier nur die ersten Glieder der Entwicklung hinschreiben:

$$\alpha_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)\,\varepsilon_{ii}(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)^2 \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{\varepsilon_{ij}(\lambda_0)}{\alpha_i(\lambda_0)-\alpha_j(\lambda_0)} + \cdots, \tag{10}$$

wo der Strich bei Summationszeichen andeutet, daß die Summation auf alle j, außerhalb $j = i$ zu erstrecken ist und außerdem die Bezeichnung:

$$\varepsilon_{ij}(\lambda_0) = \int_0^\pi r(x)\, \varphi_i(x, \lambda_0)\, \varphi_j(x, \lambda_0)\, dx \tag{11}$$

eingeführt ist.

§ 3. Wir setzen jetzt voraus, daß die Gleichung:

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{d x^2} - r(x)\varphi + \alpha \varphi = 0 \tag{12}$$

dasselbe System von Eigenwerten hat, wie die Gleichung:

$$\varkappa \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \alpha \varphi = 0,$$

für das System der Randbedingungen: $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$.

Hieraus folgt unmittelbar, daß $\mu = \varkappa$ ist. In der Tat lauten die asymptotischen Ausdrücke für die Eigenwerte der Gleichungen (11) und (12)

$$\alpha_n = n^2 \mu + 0(1)$$

bzw.

$$\alpha_n = n^2 \varkappa + 0(1),$$

woraus folgt: $\mu = \varkappa$.

Schreiben wir jetzt die Gleichungen:

$$\varkappa \frac{d^2 \varphi_i(x, 0)}{d x^2} + \alpha \varphi_i(x 0) = 0,$$

$$\varkappa \frac{d^2 \varphi_i(x, 1)}{d x^2} - r(x)\, \varphi_i(x, 1) + \alpha_i \varphi_i(x, 1) = 0,$$

multiplizieren die erste Gleichung mit $\varphi_i(x, 1)$ und die zweite mit $\varphi_i(x, 0)$, subtrahieren dann die zweite von der ersten und integrieren, so erhalten wir wegen der Greenschen Formel:

$$\int r(x)\, \varphi_i(x, 0)\, \varphi_i(x, 1)\, dx = 0. \tag{13}$$

Nun haben wir folgende asymptotischen Ausdrücke für die Eigenfunktionen:

$$\varphi_i(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos i x + 0\left(\frac{1}{i}\right),$$

$$\varphi_i(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos i x + 0\left(\frac{1}{i}\right).$$

Folglich haben wir für $\varphi_i(x, 0)\, \varphi_i(x, 1)$ den asymptotischen Ausdruck:

$$\varphi_i(x, 0)\, \varphi_i(x, 1) = \frac{2}{\pi} \cos^2 i x + 0\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\pi} [1 + \cos 2 i x] + 0\left(\frac{1}{i}\right).$$

Aus:

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^\pi r(x) \cos 2 i x \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{i \to \infty} \int_0^\pi r(x)\, O\left(\frac{1}{i}\right) dx = 0$$

und (13) schließen wir

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{\pi} \int r(x)\, \varphi_i(x, 0)\, \varphi_i(x, 1)\, dx = \frac{1}{\pi} \int r(x)\, dx = 0.$$

Da aber $\varphi_1(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist, so können wir nach (10) die Entwicklung von $\alpha_1(\lambda)$ für $\lambda_0 = 0$ in die Form bringen:

$$\alpha_1(\lambda) = -\lambda^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_{1j}^2}{\alpha_j(0)} + \cdots, \tag{14}$$

d. h. für hinreichend kleine λ ist $\alpha_1(\lambda)$ negativ. Ebenso ist auch $\alpha_1'(\lambda)$, wie man durch Differentiation von (14) leicht bestätigt, für hinreichend kleine positive λ negativ. Wir haben aber vorausgesetzt, daß $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = 0$, woraus man erkennt, daß $\alpha'(\lambda)$ an irgend einer Stelle zwischen 0 und 1 auch positiv ist und folglich irgendwo seine Zeichen ändert. Es sei $\lambda = \delta$ der Punkt, in welchem $\alpha'(\delta) = 0$ wird. Da wir $\alpha_1'(0) = 0$ haben, so müssen wir erwarten, daß in einem Punkte δ_1 die zweite Ableitung $\alpha''(\lambda)$ verschwindet:

$$\alpha''(\delta_1) = 0;$$

oder nach (10):

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^2(\delta_1)}{\alpha_1(\delta_1) - \alpha_j(\delta_1)} = 0.$$

Da alle Summanden negativ sind, so erhalten wir:

$$\varepsilon_{1j}^2(\delta_1) = 0, \quad \varepsilon_{1j}(\delta_1) = 0 \qquad (j \neq 1). \tag{15}$$

Nach (11) sind jedoch die ε_{1j} die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $q(x)\,\varphi_1(x, \delta_1)$ nach dem System von Orthogonalfunktionen $\varphi_j(x, \delta_1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Aus der Vollständigkeit des Systems und aus (15) folgt, daß

$$r(x)\,\varphi_1(x, \delta_1) = C\,\varphi_1(x, \delta_1)$$

oder $r(x) = C$.

Andererseits ist

$$\int_0^\pi r\, dx = 0; \quad \text{woraus} \quad C = 0$$

folgt. Also ist $r(x) = 0$.

Herrn Prof. Smirnow sage ich für seine wertvollen Bemerkungen zu dieser Arbeit auch an dieser Stelle meinen besten Dank.

Pulkowo, Sternwarte, 21. Dezember 1928.