Zeitschrift für Physik, Bd. 134, S. 286—305 (1953).

# Die Formulierung der Erhaltungssätze der Energie und des Impulses in der allgemeinen Relativitätstheorie. II.

Von

MAX KOHLER.

*(Eingegangen am 4. Oktober 1952.)*

Es wird eine auf 2 Maßbestimmungen aufgebaute allgemein relativistische Schwerkrafttheorie entwickelt. An deren Spitze steht ein HAMILTONsches Prinzip mit einer gegenüber EINSTEIN abgeänderten HAMILTON-Funktion. Aus diesem HAMILTON-Prinzip fließen 14 Differentialgleichungen. Davon sind 10 die Feldgleichungen, die ein bestimmtes, quasilineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung bilden. Die restlichen 4 Differentialbeziehungen sprechen die Divergenzfreiheit des Materietensors aus, sind aber nicht wie in EINSTEINs Theorie eine Folge der Feldgleichungen. Damit entfällt die Notwendigkeit von Koordinatenbedingungen. Im materiefreien Falle spielen diese 4 Bedingungen keinerlei Rolle. Im schwachen Felde erhält man die in der EINSTEINschen Integrationstheorie benutzten Gleichungen und Ergebnisse. Das Prinzip der geodätischen Linie bleibt unverändert erhalten, ebenso alle an der Erfahrung prüfbaren Ergebnisse der EINSTEINschen Theorie einschließlich der Perihelbewegung. Ein aus den 1. Ableitungen aufgebauter Energie-Impulstensor des Schwerefeldes wird angegeben, der zu differentiellen und integralen Erhaltungssätzen führt und außerdem symmetrisch ist. Er stimmt im schwachen Felde mit dem in Teil I angegebenen Tensor überein. Damit ist eine tensorielle Formulierung des Energie-Impulssatzes gefunden, die nun eine große Ähnlichkeit mit derjenigen in der MAXWELLschen Theorie aufweist.

## *Einleitung.*

In Teil I[1] wurde die Darstellung eines Schwerefeldes durch 2 Maßbestimmungen $g_{ik}$ und $\bar{g}_{ik}$ in der Raum-Zeit-Welt beschrieben. Es zeigte sich, daß die Differenz der CHRISTOFFEL-Symbole beider Maßbestimmungen Tensorcharakter hat, während dies ja bekanntlich für die CHRISTOFFEL-Symbole *eines* Maßtensors nicht der Fall ist. Der 1. Maßtensor $g_{ik}$ soll die Metrik der Raum-Zeit-Welt angeben, wie sie durch die Materie in der Welt erzeugt wird. Die Deutung des 2. Maßtensors kann in verschiedener Weise erfolgen. Entweder als Maßtensor eines auf das gleiche Koordinatensystem bezogenen ungekrümmten Vergleichsraumes, als metrischer Untergrund bei Wegnahme der Massen oder als Tensorpotentiale der Scheinkräfte.

Leider war mir entgangen, daß schon während des Krieges diese Konzeption der Beschreibung eines Schwerefeldes durch 2 Maßtensoren

[1] KOHLER, M.: Z. Physik **131**, 571 (1952).

von N. ROSEN[1] in analoger Weise entwickelt wurde. Derselbe Autor gibt in einer weiteren Arbeit[2] eine auf dem Boden der speziellen Relativitätstheorie stehende Gravitationstheorie, bei der die $g_{ik}$ Komponenten eines physikalischen Tensors sind und die $\bar{g}_{ik}$ diejenigen des Maßtensors der ungekrümmten Raum-Zeit-Welt bedeuten. Auf diese Deutungsmöglichkeit des mathematischen Formalismus jeder mit 2 Maßbestimmungen operierenden Relativitätstheorie, mit der sich noch andere Autoren[3] beschäftigt haben und die auch bei der in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Theorie gegeben ist, soll jedoch nicht weiter eingegangen werden.

In der früheren Arbeit wurde eine Relativitätstheorie mit 2 Maßbestimmungen für den Fall des schwachen Feldes entwickelt, bei der die EINSTEINschen Koordinatenbedingungen:

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

eine wichtige Rolle spielen. Aus den Feldgleichungen, den Koordinatenbedingungen und geeignet gewählten Rand- oder Anfangsbedingungen lassen sich dann beide Maßtensoren $g_{ik}$ und $\bar{g}_{ik}$ bei bekannter Materieverteilung eindeutig finden. In dieser Theorie läßt sich ein Energie-Impulstensor $t_n^m$ für das Gravitationsfeld finden, der dem einfachen, kovarianten differentiellen Erhaltungsgesetz:

$$\bar{D}_m \left[ \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} \, (T_n^m + t_n^m) \right] = 0 \tag{2}$$

genügt, wo die $\bar{D}_m$ die kovariante Ableitung nach der Koordinate $x_m$ in der Maßbestimmung der $\bar{g}_{ik}$ ist. Es existieren auch einfache integrale Erhaltungssätze.

Der Tensor $t_n^m$ hatte dieselbe Symmetriestruktur wie der Materietensor, d.h. es ist $t_{mn} = t_{nm}$. Die Komponenten $t_n^m$ sind homogene Funktionen 2. Ordnung der Tensorkomponenten $\varrho_{kl}^i$ des eigentlichen Gravitationsfeldes. Unter Normalkoordinatensystemen werden solche verstanden, in denen die $\bar{g}_{ik}$ konstant sind, in denen also die Scheinkräfte verschwinden.

Es entstand nun die Frage der Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf den Fall starken Feldes. Will man die EINSTEINschen Feldgleichungen unverändert in diese Theorie übernehmen, so hängt alles an dem Auffinden geeigneter Zusatzbedingungen, die bei gegebener Materieverteilung und mit Hilfe der Randbedingungen im Unendlichen

[1] ROSEN, N.: Phys. Rev. **57**, 147 (1940).

[2] ROSEN, N.: Phys. Rev. **57**, 150 (1940).

[3] BAND, W.: Phys. Rev. **61**, 698 (1942). — PAPAPETROU, A.: Proc. Roy. Irish Acad. **52**, 11 (1948).

beide Maßtensoren eindeutig festlegen. Als Möglichkeit bieten sich hier zunächst die LANCZOSschen[1] Zusatzbedingungen (in einem Normalkoordinatensystem formuliert):

$$\frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x_k} = 0 \qquad (l = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Wie von LANCZOS[2] gezeigt wurde, leisten diese Zusatzbedingungen zusammen mit den Feldgleichungen und Randbedingungen im Unendlichen eine eindeutige Festlegung der $g_{ik}$ aus der Materieverteilung, oder in der Sprache der Theorie mit 2 Maßbestimmungen, eine eindeutige Festlegung beider Maßbestimmungen aus der Materieverteilung. Beide Maßbestimmungen liegen natürlich nur fest bis auf eine willkürliche Wahl des gemeinsamen Koordinatensystems. Man könnte also daran denken, diese Beziehungen (3) in kovarianter Formulierung:

$$\overline{D}_k\left(\sqrt{\frac{g}{\overline{g}}}\, g^{kl}\right) = 0 \qquad (l = 1, 2, 3, 4) \tag{3a}$$

als die richtige Verallgemeinerung der EINSTEINschen Koordinatenbedingungen (1) für den Fall des starken Feldes ansehen.

Unbefriedigend an dieser Theorie ist jedoch der Umstand, daß diese Zusatzbedingungen insofern in gewissem Umfange willkürlich erscheinen, weil sie aus der alleinigen Forderung ermittelt sind, daß sie zusammen mit den Feldgleichungen und den Randbedingungen im Unendlichen zu einer eindeutigen Festlegung der beiden Maßtensoren im obigen Sinne bei bekannter Materieverteilung führen sollen. Diese Forderung allein wird nicht ausreichen, um die Zusatzbedingungen zu bestimmen. Liegen aber die Zusatzbedingungen nicht fest, so gelingt keine eindeutige Berechnung beider Maßbestimmungen (d.h. des Gravitationsfeldes) aus der Materieverteilung. Damit ist aber auch die Definition des Energie-Impulstensors des Schwerefeldes in Frage gestellt.

Bietet sich eine Möglichkeit diese Schwierigkeit zu überwinden? Im folgenden soll gezeigt werden, daß durch ein geeignet gewähltes Variationsprinzip an der Spitze der Theorie sich ein System von Feldgleichungen finden läßt, das sich zur Berechnung beider Maßtensoren aus der Materieverteilung eignet. Die HAMILTONsche Funktion dieses Variationsprinzips enthält beide Maßtensoren. Variiert werden hierbei nicht nur die $g_{ik}$, sondern auch die $\overline{g}_{ik}$. Als Richtlinie für die richtige Wahl der HAMILTON-Funktion sehen wir folgende Forderungen an:

1. Sie muß zu einem Gleichungssystem führen, das beide Maßbestimmungen bei gegebener Materieverteilung festlegt.

2. Alle an der Erfahrung prüfbaren Effekte der EINSTEINschen Schwerkrafttheorie (Lichtablenkung am Sonnenrand, Rotverschiebung

[1] LANCZOS, C.: Phys. Z. **23**, 537 (1922).
[2] LANCZOS, C.: Z. Physik **13**, 7 (1923).

der Spektrallinien, Perihelverschiebung des Merkur) sollen aus ihr richtig folgen.

3. Sie soll zu einer Formulierung des Energie-Impulssatzes in der Form (2) führen, wo $t_n^m$ ein symmetrischer Tensor ist, dessen Komponenten homogene, quadratische Funktionen der Feldstärken (der 1. Ableitungen der $g_{ik}$ und $\bar{g}_{ik}$) sind.

4. Die HAMILTON-Funktion soll eine homogene, quadratische Funktion der tensoriellen Feldstärken $\varrho_{kl}^i$ sein. Sie ist eine Invariante.

Die unter 2. und 3. erwähnten Forderungen erweisen sich als entscheidend, um zu einer genügend starken Einschränkung der zur Konkurrenz zugelassenen HAMILTON-Funktionen zu kommen. Ein großer Teil der Forderungen ist in Analogie zur elektromagnetischen Theorie MAXWELLs gestellt.

### § 1. HAMILTON*sches Prinzip und Ableitung der Feldgleichungen.*

In Teil I wurde gezeigt (auch von ROSEN schon benutzt), daß folgendes invariantes Variationsprinzip als Grundlage der früheren Theorie angesehen werden kann:

$$\partial \int \mathfrak{H} \, dX + \varkappa \int \mathfrak{T}_{ij} \, \delta g^{ij} \, dX = 0, \tag{4a}$$

wo

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g} \cdot g^{kl} \left( \varrho_{kl}^n \varrho_{nm}^m - \varrho_{kn}^m \varrho_{lm}^n \right). \tag{4b}$$

Hierbei ist wie in Teil I: $\varrho_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \bar{\Gamma}_{kl}^i$, wo die $\Gamma_{kl}^i$ und $\bar{\Gamma}_{kl}^i$ die CHRISTOFFEL-Symbole der beiden Maßtensoren $g_{ik}$ und $\bar{g}_{ik}$ sind. Die Variation der $g_{ik}$ führt zu den bekannten EINSTEINschen Feldgleichungen:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R \cdot g_{ik} = -\varkappa \, T_{ik}, \tag{5}$$

während die Variation der $\bar{g}_{ik}$ Identitäten ergibt. Diese Formulierung des HAMILTONschen Prinzips gestattet also keine Festlegung beider Maßtensoren aus der Materieverteilung, denn die EINSTEINschen Feldgleichungen sind dazu allein nicht ausreichend. Um dies zu leisten, muß man in dieser Theorie noch Zusatzbedingungen einführen, die in gewissem Umfange willkürlich sind, und da sie aus dem HAMILTONschen Prinzip nicht folgen, ein fremdes Element in die Theorie hineinbringen.

Der tiefere Grund für das obige Verhalten des mit der HAMILTON-Funktion (4b) gebildeten Variationsprinzips wird bei den späteren Untersuchungen dieses Paragraphen klar zutage treten: Die Variation der $\bar{g}_{ik}$ führt nämlich zu 4 Beziehungen, welche die Divergenzfreiheit des Materietensors ausdrücken. Dieselben Beziehungen folgen aber noch ein zweites Mal aus den Feldgleichungen (5), die durch Variation der $g_{ik}$ gewonnen sind. Diese Koinzidenz beraubt uns der Möglichkeit, die genügende Anzahl von Gleichungen zu bekommen, die notwendig ist, um beide Maßtensoren aus der Materieverteilung berechnen zu können.

Der auf der Hand liegende Ausweg aus dieser Schwierigkeit ist eine geeignete Abänderung der HAMILTON-Funktion (4b). Dann wird im allgemeinen oben erwähnte Koinzidenz nicht mehr auftreten.

Folgende HAMILTON-Funktion wird sich als die zweckmäßige Verallgemeinerung der Funktion (4b) erweisen:

$$\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{kl}\,(\varrho^m_{kn}\,\varrho^n_{lm} + g^{mn}\,g_{ij}\,\varrho^i_{km}\,\varrho^j_{ln} - \varrho^j_{kj}\,\varrho^m_{lm})\,. \tag{6}$$

Hierbei ist:

$$\mathfrak{g}^{kl} = \sqrt{-g}\,g^{kl}. \tag{6a}$$

Der Unterschied dieser Funktion $\mathfrak{G}$ gegenüber der durch (4b) definierten Funktion $\mathfrak{H}$ tritt klarer zutage in der Formulierung in einem Normalkoordinatensystem:

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{g}^{*kl}\,(\Gamma^{*n}_{kl}\,\Gamma^{*m}_{nm} - \Gamma^{*m}_{kn}\,\Gamma^{*n}_{lm}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{g^*_{kl}}{(\sqrt{-g^*})}\,\mathfrak{g}^{*km}_n\,\mathfrak{g}^{*ln}_m\,, \tag{6b}$$

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{H}^* + \frac{g^*_{kl}}{2\,(\sqrt{-g^*})}\cdot\mathfrak{g}^{*km}_n\,\mathfrak{g}^{*lm}_m\,. \tag{6c}$$

Darin ist $\mathfrak{g}^{*km}_n$ eine Abkürzung für $\partial\mathfrak{g}^{km}/\partial x_n$.

Die Identität dieser Darstellung von $\mathfrak{G}$ in einem Normalkoordinatensystem mit der durch (6) gegebenen Definition von $\mathfrak{G}$ läßt sich durch einfache Rechnung nachweisen, wenn man in (6c) die $\mathfrak{g}^{*km}_n$ nach der bekannten Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\mathfrak{g}^{km}}{\partial x_n} = g^{km}\,\Gamma^j_{nj} - g^{kj}\,\Gamma^m_{nj} - g^{mj}\,\Gamma^k_{nj} \tag{7}$$

durch die $\Gamma^*$-Symbole ersetzt.

Das HAMILTONsche Prinzip soll also lauten:

$$\delta\int\mathfrak{G}\,dX + \varkappa\int\mathfrak{T}_{ij}\,\delta g^{ij}\,dX = 0. \tag{8}$$

Um die Differentialgleichungen aus diesem Prinzip abzuleiten, ist es vorteilhaft, ein Normalkoordinatensystem zugrunde zu legen, in dem der Maßtensor $\bar{g}_{ik}$ die pseudoeuklidischen Werte hat, was keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt. In einem solchen Koordinatensystem sind alle $\bar{\Gamma}^i_{kl} = 0$. Die $\varrho^i_{kl}$ sind daher mit den $\Gamma^i_{kl}$ identisch. Für $\mathfrak{G}$ erhält man dann die Darstellung (6c). Weiter ist es zweckmäßig, statt der Größen $g^*_{ik}$ die $\mathfrak{g}^{*ik}$ als Variable zu benutzen. Nun ist:

$$\delta\mathfrak{g}^{ij} = g^{ij}\,\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\,\delta g^{ij}$$

oder:

$$\delta g^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathfrak{g}^{ij} - g^{ij}\,\delta(\log\sqrt{-g}).$$

Nach bekannten Formeln für $\delta(\log\sqrt{-g})$:

$$\delta g^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathfrak{g}^{ij} - \frac{1}{2}\,\frac{g_{kl}\,g^{ij}}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathfrak{g}^{kl}\,.$$

Dies setzen wir in das 2. Integral von (8) ein. Vorher sei noch gesagt, daß indizierte Größen im benutzten Normalkoordinatensystem immer, wie schon in (6c) und (6d), gesternt sind.

Es folgt nun:

$$\delta \int \mathfrak{G}^* dX + \varkappa \int (T_{ij}^* - \tfrac{1}{2} T g_{ij}^*)\, \delta \mathfrak{g}^{*ij} dX = 0. \tag{8a}$$

Die Variation der $\mathfrak{g}^{*ik}$ liefert folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{G}_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{G}_{ik}^{*s}) = -\varkappa \left(T_{ik}^* - \frac{1}{2} T \cdot g_{ik}^*\right), \tag{9}$$

wobei:

$$\mathfrak{G}_{ik}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ki}}\right]; \qquad \mathfrak{G}_{ik}^{*s} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ki}}\right].$$

Nun ist bekanntlich:

$$\mathfrak{H}_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{H}_{ik}^{*s}) = R_{ik}^*, \tag{10}$$

mit:

$$\mathfrak{H}_{ik}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ki}}\right); \qquad \mathfrak{H}_{ik}^{*s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ki}}\right),$$

wo die $R_{ik}^*$ die Komponenten des verjüngten RIEMANNschen Krümmungstensors sind im zugrunde gelegten Normalkoordinatensystem.

Wir führen weiter folgende Abkürzung ein:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{A}, \tag{10a}$$

und schreiben:

$$\mathfrak{A}_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{A}_{ik}^{*s}) = P_{ik}^*, \tag{11}$$

wobei:

$$\mathfrak{A}_{ik}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ki}}\right); \qquad \mathfrak{A}_{ik}^{*s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ik}} + \frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ki}}\right).$$

Damit kann man die Feldgleichungen (9) auf die Form bringen:

$$R_{ik}^* + P_{ik}^* = -\varkappa (T_{ik}^* - \tfrac{1}{2} T g_{ik}^*). \tag{12}$$

Die Größen $P_{ik}^*$ in dieser Gleichung geben die Abänderung der Feldgleichungen gegenüber den EINSTEINschen an, die man mit $P_{ik}^* = 0$ erhält. Nun kommen wir zur Variation des Maßtensors $\bar{g}_{ik}$, bei festgehaltenem $g_{ik}$. Diese Variation muß nach (8a) verschwinden. Bezeichnen wir diese Art von Variation mit $\bar{\delta}$, so gilt also:

$$\bar{\delta} \int \mathfrak{G}\, dX = 0. \tag{13}$$

Nun soll $\bar{g}_{ik}$ auch nach Ausführung der Variation noch das Linienelement eines ungekrümmten Raumes sein. Die $\delta \bar{g}_{ik}$ sind also nicht unabhängig voneinander. Die allgemeine Variation eines ungekrümmten Linienelementes läßt sich nun durch eine infinitesimale Koordinatentransformation herstellen. Diese laute:

$$x'^i = x^i + \delta \xi^i. \tag{14}$$

Wenn wir allgemein das Integral:

$$\int \mathfrak{G}\, dX$$

der infinitesimalen Transformation (14) unterwerfen, so ändert dieses Integral seinen Wert hierbei nicht, weil $\mathfrak{G}$ eine skalare Dichte. Hierbei ändern sich aber sowohl die $g_{ik}$ als auch die $\bar{g}_{ik}$. Es ist also:

$$\delta' \int \mathfrak{G}\, dX + \bar{\delta} \int \mathfrak{G}\, dX = 0, \tag{15}$$

wo $\delta'$ die Änderung des Integrals infolge der infinitesimalen Transformation ist bei alleiniger Abänderung der $g_{ik}$. Daher folgt aus (13) und (15):

$$\delta' \int \mathfrak{G}\, dX = 0. \tag{16}$$

Es handelt sich nun um die Berechnung einer Variation des Integrals bei alleiniger Abänderung der $g_{ik}$ infolge der infinitesimalen Transformation (14). Diese Variation berechnen wir in einem Normalkoordinatensystem, da ja der Tensor $\bar{g}_{ik}$ in (16) festzuhalten ist.

Es ist:

$$\left.\begin{aligned}
\delta \mathfrak{g}^{*ik} &= \mathfrak{g}'^{ik} - \mathfrak{g}^{*ik}\\
\delta \mathfrak{g}^{*ik} &= \mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} + \mathfrak{g}^{*kr}\frac{\partial(\delta\xi^i)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Und:

$$\left.\begin{aligned}
\delta \mathfrak{g}_s^{*ik} &= \frac{\partial \mathfrak{g}'^{ik}}{\partial x_s'} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{*ik}}{\partial x_s} = \frac{\partial(\mathfrak{g}^{*ik} + \delta\mathfrak{g}^{*ik})}{\partial x_s'} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{*ik}}{\partial x_s}\\
&= \frac{\partial}{\partial x_s}(\delta \mathfrak{g}^{*ik}) - \mathfrak{g}_r^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_s},\\
\delta \mathfrak{g}_s^{*ik} &= \mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial^2(\delta\xi^k)}{\partial x_r\,\partial x_s} + \mathfrak{g}^{*kr}\frac{\partial^2(\delta\xi^i)}{\partial x_r\,\partial x_s} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial^2(\delta\xi^r)}{\partial x_r\,\partial x_s} +\\
&\quad + \mathfrak{g}_s^{*ir}\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} + \mathfrak{g}_s^{*kr}\frac{\partial(\delta\xi^i)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}_s^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}_r^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_s}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Nun setzen wir:

$$\mathfrak{G} = \sqrt{-g}\, G. \tag{19}$$

Damit:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{-g^*}\,\delta' G^* = \sqrt{-g^*}\, & G_{ik}^*\left(2\mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r}\right) +\\
& + G_{ik}^{*s}\left(2\mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial^2(\delta\xi^k)}{\partial x_r\,\partial x_s} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial^2(\delta\xi^r)}{\partial x_r\,\partial x_s} + \right.\\
& \left. + 2\mathfrak{g}_s^{*ir}\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}_s^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}_r^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_s}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

$$G_{ik}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ik}} + \frac{\partial G^*}{\partial \mathfrak{g}^{*ki}}\right); \qquad G_{ik}^{*s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ik}} + \frac{\partial G^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*ki}}\right). \tag{20b}$$

Weiter ist:

$$\mathfrak{G}^*_{ik} = \sqrt{-g^*}\, G^*_{ik} + \tfrac{1}{2} G^* \mathfrak{g}^*_{ik}. \tag{21}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g^*}\,\delta' G^* = {} & \mathfrak{G}^*_{ik}\left(2\mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r} + \mathfrak{G}^*\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r}\right) + \\ & + \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\left(2\mathfrak{g}^{*ir}\frac{\partial^2(\delta\xi^k)}{\partial x_r\,\partial x_s} - \mathfrak{g}^{*ik}\frac{\partial^2(\delta\xi^r)}{\partial x_r\,\partial x_s} + \right. \\ & \left. + 2\mathfrak{g}^{*ir}_s\frac{\partial(\delta\xi^k)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}^{*ik}_s\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_r} - \mathfrak{g}^{*ik}_r\frac{\partial(\delta\xi^r)}{\partial x_s}\right).\end{aligned} \tag{20c}$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\sqrt{-\mathfrak{g}^*}\,\delta' G^* = {} & \{2\mathfrak{G}^*_{i\beta}\mathfrak{g}^{*i\alpha} + (\mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}^*_{ik}\mathfrak{g}^{*ik} - \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}_s)\,\delta^\alpha_\beta + \\ & + 2\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\mathfrak{g}^{*i\alpha}_s - \mathfrak{G}^{*\alpha}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}_\beta\}\frac{\partial(\delta\xi^\beta)}{\partial x_\alpha} + \\ & + \{2\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\mathfrak{g}^{*ir} - \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}\cdot\delta^r_\beta\}\frac{\partial^2(\delta\xi^\beta)}{\partial x_r\,\partial x_s}.\end{aligned} \tag{22}$$

Nun ist $G$ eine Invariante. Bei allen Affintransformationen, die von einem Normalkoordinatensystem zu einem anderen führen, ist die Form (6c) von $G$ invariant. Daher muß für eine solche spezielle Koordinatentransformation $\delta' G^* = 0$ sein. Für alle solche Transformation sind die $\delta\xi^i$ lineare Funktionen. Es verschwinden daher die 2. Ableitungen von $\delta\xi^i$. Daher muß diejenige Klammer in (22), die den Faktor $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\delta\xi^\beta)$ trägt, verschwinden, d.h.:

$$\begin{aligned}2\mathfrak{G}^*_{i\beta}g^{*i\alpha} + (\mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}^*_{ik}\mathfrak{g}^{*ik} - \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}_s)\,\delta^\alpha_\beta + & \\ + 2\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\mathfrak{g}^{*i\alpha}_s - \mathfrak{G}^{*\alpha}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}_\beta = 0. &\end{aligned} \tag{23}$$

Nun kehren wir zum Fall einer beliebigen infinitesimalen Transformation (14) zurück. Unter Berücksichtigung von (23) folgt jetzt:

$$\begin{aligned}\delta' \int \mathfrak{G}^*\,dX &= \int \sqrt{-g^*}\cdot\delta' G^*\,dX \\ &= \int [2\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\mathfrak{g}^{*ir} - \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}\,\delta^r_\beta]\frac{\partial^2(\delta\xi^\beta)}{\partial x_r\,\partial x_s}\,dX = 0,\end{aligned}$$

denn $\sqrt{-g^*}\,dX$ ist eine Invariante gegenüber Änderungen des Koordinatensystems. Führen wir nun die Änderung des Koordinatensystems so durch, daß die $\delta\xi^\beta$ und deren 1. Ableitungen an der Oberfläche des Integrationsbereiches verschwinden, so folgt in bekannter Weise:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_s}\left[\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\mathfrak{g}^{*i\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\mathfrak{g}^{*ik}\cdot\delta^\alpha_\beta\right] = 0. \tag{24}$$

Dies sind 4 Beziehungen mit $\beta = 1, 2, 3, 4$. Sie sind zusammen mit den Feldgleichungen (12) Folgen des HAMILTONschen Prinzips. Es wird sich später herausstellen, daß (24) das Verschwinden der Divergenz des Materietensors zur Folge hat.

Wir gehen aus von den Feldgleichungen:

$$-\varkappa\,\mathfrak{T}^*_{\beta\gamma} = \sqrt{-g^*}\left(\mathfrak{G}^*_{\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\mathfrak{G}^{*s}_{\beta\gamma}\right)\right) - \frac{\mathfrak{g}^{*ik}}{2}\, g_{\beta\gamma}\left(\mathfrak{G}^*_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_s}\,\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\right). \tag{25}$$

Daraus durch Überschieben mit $g^{*\alpha\gamma}$:

$$-\varkappa\,\mathfrak{T}^{*\alpha}_{\beta} = \mathfrak{g}^{\alpha\gamma}\left(\mathfrak{G}^*_{\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\mathfrak{G}^{*s}_{\beta\gamma}\right)\right) - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\beta\left[\mathfrak{g}^{*ik}\left(\mathfrak{G}^*_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_s}\,\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\right)\right].$$

Durch Umformung:

$$\varkappa\,\mathfrak{T}^{*\alpha}_{\beta} + \mathfrak{g}^{*i\alpha}\,\mathfrak{G}^*_{i\beta} + \mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha}_{s} - \frac{1}{2}\cdot\delta^\alpha_\beta\left(\mathfrak{G}^*_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik} + \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}_{s}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_s}\left[\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}\cdot\delta^\alpha_\beta\right].$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\varkappa\,\mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta} = \mathfrak{G}^*_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha} + \mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha}_{s} - \tfrac{1}{2}\,\delta^\alpha_\beta\left(\mathfrak{G}^*_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik} + \mathfrak{G}^{*s}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}_{s}\right), \tag{26}$$

dann kann man obenstehende Gleichungen so schreiben:

$$\varkappa\left(\mathfrak{T}^{*\alpha}_{\beta} + \mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left[\mathfrak{G}^{*s}_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha} - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\beta\,\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}\right]. \tag{27}$$

Aus diesen Gleichungen und (24) folgt sofort:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{T}^{*\alpha}_{\beta} + \mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta}\right) = 0. \tag{28}$$

Diese Gleichungen mit $\beta = 1, 2, 3, 4$ betrachten wir, in vollkommener Analogie zu EINSTEIN, als differentielle Formulierung des Energie-Impulssatzes in einem Normalkoordinatensystem.

Die durch (26) definierten $\mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta}$ lassen sich mit Hilfe der Beziehungen (23) wesentlich vereinfachen. Man findet:

$$\varkappa\,\mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta} = -\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^*\,\delta^\alpha_\beta - \mathfrak{G}^{*\alpha}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}_{\beta}\right). \tag{29}$$

Dieser Ausdruck deckt sich mit dem EINSTEINschen, wenn wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ setzen. Die Gln. (27) stellen die Feldgleichungen in einer Form dar, in der die Komponenten des Materietensors und diejenigen des Energie-Impulstensors des Schwerefeldes in gleicher Weise beide felderzeugend wirken.

Die Größen $\mathfrak{t}^{*\alpha}_{\beta}$ sind nach (25) oder (28) homogene Funktionen 2. Ordnung der 1. Ableitungen der $\mathfrak{g}^{*ik}$.

Wir gehen einmal mehr von den Feldgleichungen:

$$-\varkappa\,\mathfrak{T}^*_{ik} = \sqrt{-g^*}\left(\mathfrak{G}^*_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\mathfrak{G}^{*s}_{ik}\right)\right) - \frac{g^*_{ik}}{2}\,\mathfrak{g}^{*pq}\left(\mathfrak{G}^*_{pq} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\mathfrak{G}^{*s}_{pq}\right)\right)$$

aus. Diese Gleichungen multiplizieren wir mit $\mathfrak{g}_\beta^{*ik}$ und erhalten:

$$-\varkappa\, \mathfrak{T}_{ik}^* \cdot g_\beta^{*ik} = \sqrt{-g^*}\, g_\beta^{*ik} \left( \mathfrak{G}_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} \mathfrak{G}_{ik}^{*s} \right) -$$

$$- \frac{g_{ik}^*}{2} g_\beta^{*ik}\, \mathfrak{g}^{*pq} \left( \mathfrak{G}_{pq}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} \mathfrak{G}_{pq}^{*s} \right).$$

Nun ist:

$$\sqrt{-g^*}\, g_\beta^{*ik} = \mathfrak{g}_\beta^{*ik} - g^{*ik} \frac{\partial (\sqrt{-g^*})}{\partial x_\beta}$$

$$= \mathfrak{g}_\beta^{*ik} + \frac{\mathfrak{g}^{*ik}}{2} \cdot g_{uv}^* \cdot g_\beta^{*uv}.$$

Das setzen wir ein und bekommen:

$$-\varkappa\, \mathfrak{T}_{ik}^* g_\beta^{*ik} = \mathfrak{g}_\beta^{*ik} \left( \mathfrak{G}_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{G}_{ik}^{*s}) \right)$$

$$= \mathfrak{G}_{ik}^* \mathfrak{g}_\beta^{*ik} + \mathfrak{G}_{ik}^{*s} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\mathfrak{g}_s^{*ik}) - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{G}_{ik}^{*s}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{G}^* \delta_\beta^s - \mathfrak{G}_{ik}^{*s}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik})$$

oder nach (29):

$$\mathfrak{T}_{ik}^* g_\beta^{*ik} = 2 \frac{\partial \mathfrak{t}_\beta^{*s}}{\partial x_s}.$$

Weiter nach (28):

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\beta^{*s}}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{ik}^* \frac{\partial g^{*ik}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{30}$$

Diese Gleichung besagt aber nichts anderes als die Divergenzfreiheit der als Tensorkomponenten im benutzten Normalkoordinatensystem betrachteten Größen $\mathfrak{T}_\beta^{*\alpha}$. Man kann umgekehrt auch zeigen, daß aus (30) und den Feldgleichungen die Beziehungen (24) folgen. Die Gln. (24) und (30) sind daher gleichwertig.

Die Größen $T_{ik}$ sind nach (9) bisher nur in einem Normalkoordinatensystem definiert. Unterwerfen wir die Größen aber den Transformationsformeln für Tensorkomponenten bei Änderungen des Koordinatensystems, so verschwindet nach (30) die Divergenz des so definierten Tensors in allen Koordinatensystemen, da dies in Normalkoordinatensystemen der Fall ist.

Nun gehen wir zu expliziten Formulierung der Feldgleichungen und der Bedingungen (28) über. Bisher hatten wir von der speziellen Wahl der Hamilton-Funktion keinen Gebrauch gemacht. Man erhält nach wohlbekannten Formeln:

$$\mathfrak{H}_{ik}^* = \Gamma_{in}^{*m} \Gamma_{km}^{*n} - \Gamma_{ik}^{*n} \Gamma_{nm}^{*m}, \tag{31a}$$

$$\mathfrak{H}_{ik}^{*s} = \Gamma_{ik}^{*s} - \tfrac{1}{2} (\delta_k^s \Gamma_{in}^{*n} + \delta_i^s \Gamma_{km}^{*n}). \tag{31b}$$

Weiter erhält man (6c):

$$\mathfrak{A}^{*s}_{ik} = \frac{1}{2\sqrt{-g^*}}\left(g^*_{it}\,\mathfrak{g}^{*ts}_{k} + g^*_{kt}\,\mathfrak{g}^{*ts}_{i}\right) \tag{31c}$$

$$= -\Gamma^{*s}_{ik} + \tfrac{1}{2}\left(\delta^s_i\,\Gamma^{*n}_{kn} + \delta^s_k\,\Gamma^{*n}_{in} - g^*_{it}\,g^{*sj}\,\Gamma^{*t}_{kj} - g_{kt}\,g^{sj}\,\Gamma^{*t}_{ij}\right). \tag{31d}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}^*_{ik} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\mathfrak{g}^{*ik}}\left(\frac{g^*_{\mu\nu}}{\sqrt{-g^*}}\right) + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{g}^{*ki}}\left(\frac{g^*_{\mu\nu}}{\sqrt{-g^*}}\right)\right]\mathfrak{g}^{*\mu m}_{n}\,\mathfrak{g}^{*\nu n}_{m}\\ &= -\frac{1}{2\left(\sqrt{-g^*}\right)^2}\left(g^*_{\mu i}\,g^*_{\nu k} + g^*_{\mu k}\,g^*_{\nu i}\right)\mathfrak{g}^{*\mu m}_{n}\,\mathfrak{g}^{*\nu n}_{m}.\end{aligned}\right\} \tag{31e}$$

Beim Übergang von den Formeln (31c) zu (31d) ist Gebrauch gemacht von den Formeln (7). Die Beziehungen (31e) gewinnt man unter Benutzung der bekannten Formeln:

$$d\,g_{\mu\nu} = -g_{\mu s}\,g_{\nu t}\,d\,g^{st} \tag{32a}$$

und:

$$d\left(\sqrt{-g}\right) = \tfrac{1}{2}\,g_{st}\,d\,\mathfrak{g}^{st}. \tag{32b}$$

Zunächst sollen die Feldgleichungen in einem Normalkoordinatensystem explizit hingeschrieben werden. Bekanntlich ist:

$$\begin{aligned}R^*_{ik} &= \mathfrak{H}^*_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\mathfrak{H}^{*s}_{ik}\right)\\ &= \frac{\partial^2\log\sqrt{-g^*}}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{1}{\sqrt{-g^*}}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sqrt{-g^*}\,\Gamma^{*s}_{ik}\right) + \Gamma^{*m}_{in}\,\Gamma^{*n}_{km}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^*_{ik} = \frac{1}{2}\,g^{*rs}\,\frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r\,\partial x_s} &+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\log\sqrt{-g^*}}{\partial x_k} - \frac{\partial g^*_{kr}}{\partial x_s}\,g^{*rs}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\log\sqrt{-g^*}}{\partial x_i} - \frac{\partial g^*_{ir}}{\partial x_s}\,g^{*rs}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^*_{kr}}{\partial x_s}\,\frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^*_{ir}}{\partial x_s}\,\frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_k}\right) + \Gamma^{*m}_{in}\,\Gamma^{*n}_{km}.\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}&\left(\frac{\partial\log\sqrt{-g^*}}{\partial x_k} - \frac{\partial g^*_{kr}}{\partial x_s}\,g^{*rs}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{-g^*}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\sqrt{-g^*}}{\partial x_k} + \sqrt{-g^*}\,\frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_s}\,g^*_{kr}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\sqrt{-g^*}\right)^2}\,\frac{\partial\sqrt{-g^*}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\sqrt{-g^*}}{\partial x_k} + \sqrt{-g^*}\,g^*_{kr}\,\frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_s}\right).\end{aligned}$$

Weiter:

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{*rs}}{\partial x_s} = \sqrt{-g^*}\,\frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_s} + g^{*rs}\,\frac{\partial\sqrt{-g^*}}{\partial x_s}.$$

Diese Gleichungen überschieben wir mit $g^*_{kr}$ und erhalten:

$$g^*_{kr} \frac{\partial \mathfrak{g}^{*rs}}{\partial x_s} = \sqrt{-g^*} \frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_s} g^*_{kr} + \frac{\partial \sqrt{-g^*}}{\partial x_k}.$$

Die rechte Seite tritt aber oben auf. Damit:

$$\begin{aligned} R^*_{ik} = \frac{1}{2} g^{*rs} \frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} &+ \frac{1}{2\sqrt{-g^*}} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^*_{kr} \mathfrak{g}^{*rs}_s) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{-g^*}} \frac{\partial}{\partial x_k} (g^*_{ir} \mathfrak{g}^{*rs}_s) - \\ &- \frac{1}{2(\sqrt{-g^*})^2} \left[ \frac{\partial \sqrt{-g^*}}{\partial x_i} \mathfrak{g}^{*rs}_s \cdot g^*_{kr} + \frac{\partial \sqrt{-g^*}}{\partial x_k} \mathfrak{g}^{*rs}_s g^*_{ir} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g^*_{kr}}{\partial x_s} \frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^*_{ir}}{\partial x_s} \frac{\partial g^{*rs}}{\partial x_k} \right) + \Gamma^{*m}_{in} \Gamma^{*n}_{km} \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} R^*_{ik} = \frac{1}{2} g^{*rs} \frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{g^*_{kr}}{2\sqrt{-g^*}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathfrak{g}^{*rs}_s) + \frac{g^*_{ir}}{2\sqrt{-g^*}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{*rs}_s) + \\ + \text{Glieder 2. Grades in den 1. Ableitungen.} \end{aligned} \right\} \quad (33\text{a})$$

Weiter folgt mit Hilfe von (31c) und (31e):

$$\begin{aligned} P^*_{ik} &= \mathfrak{A}^*_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathfrak{A}^{*s}_{ik}) \\ &= -\frac{1}{2(\sqrt{-g^*})^2} (g^*_{\mu i} g^*_{\nu k} + g^*_{\mu k} g^*_{\nu i}) \mathfrak{g}^{*\mu m}_n \mathfrak{g}^{*\nu n}_m - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{g^*_{ir}}{\sqrt{-g^*}} \mathfrak{g}^{*rs}_k + \frac{g^*_{kr}}{\sqrt{-g^*}} \mathfrak{g}^{*rs}_i \right), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} P^*_{ik} = -\frac{1}{2\sqrt{-g^*}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathfrak{g}^{*rs}_s) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{*rs}_s) \right] + \\ + \text{Glieder 2. Grades in den 1. Ableitungen.} \end{aligned} \right\} \quad (33\text{b})$$

Durch Addition von (33a) und (33b) folgt:

$$\left. \begin{aligned} R^*_{ik} + P^*_{ik} = \frac{1}{2} g^{*rs} \frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} + \\ + \text{Glieder 2. Grades in den 1. Ableitungen.} \end{aligned} \right\} \quad (34\text{a})$$

Die Feldgleichungen lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} g^{*rs} \frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} + \text{Glieder 2. Grades in den Ableitungen} \\ = -\varkappa (T^*_{ik} - \tfrac{1}{2} T g^*_{ik}). \end{aligned} \right\} \quad (34\text{b})$$

Bemerkenswert an diesen Feldgleichungen ist die Erscheinung, daß die 2. Ableitungen nur auf $g^*_{ik}$ wirken.

Die kovarianten Feldgleichungen in einem beliebigen Koordinatensystem erhält man aus (34b) durch Ersetzen der gewöhnlichen Ableitung durch kovariante Ableitungen in der Maßbestimmung der $\bar{g}_{ik}$, Ersetzen der $\Gamma^{*i}_{kl}$ durch die entsprechenden tensoriellen Größen $\varrho^{i}_{kl}$, nachdem man zuvor die $\frac{1}{\sqrt{-g^*}}\,\mathfrak{g}^{*kl}_{m}$ nach (7) durch die $\Gamma^*$-Symbole ersetzte. Dort wo $\sqrt{-g^*}$ allein auftritt, wird $\sqrt{g/\bar{g}}$ geschrieben.

## § 2. *Diskussion der Zusatzbedingungen* (24).

Die Zusatzbedingungen (24) sind äquivalent mit der Divergenzfreiheit des Materietensors, wie im vorigen Paragraphen gezeigt. Die Rolle dieser Zusatzbedingungen ist verschieden bei den beiden möglichen Auffassungen über den Zweck der Feldgleichungen. Sieht man den Zweck der Feldgleichungen darin, bei bekannter Materieverteilung die Metrik zu bestimmen, so spielen die Zusatzbedingungen (24) lediglich die Rolle von Identitäten, wenn nur der zugrunde gelegte Materietensor divergenzfrei ist. Die aus den Feldgleichungen resultierende Lösung erfüllt dann von selbst die Bedingungen (24).

Geht man aber umgekehrt vor und betrachtet die Metrik als das Primäre und die Materieverteilung als Folge des metrischen Feldes, so sind die Bedingungen (24) wesentliche Beziehungen, denen das metrische Feld genügen muß. Nur Lösungen, die sowohl den Feldgleichungen als auch den Bedingungen (24) gehorchen, führen zu einem divergenzfreien Materietensor. In der Einsteinschen Theorie ist dies anders. Dort führt jedes metrische Feld zu einem divergenzfreien Materietensor.

Im materiefreien Felde spielen die Bedingungen (24) keine Rolle, da sie eine Folge der Feldgleichungen sind. Dies folgt daraus, daß ein Nulltensor stets divergenzfrei ist.

Nun wenden wir uns der expliziten Formulierung der Bedingungen (24) zu. Ersetzt man in (24) die Funktion $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{H}$, so sind die so entstehenden Bedingungen sicher auch erfüllt, da in der Einsteinschen Theorie der Materietensor auch divergenzfrei ist. Es bleiben daher die 4 Beziehungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_s}\left[\mathfrak{A}^{*s}_{i\beta}\,\mathfrak{g}^{*i\alpha} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}^{*s}_{ik}\,\mathfrak{g}^{*ik}\cdot\delta^{\alpha}_{\beta}\right] = 0. \tag{35}$$

Setzt man die aus (31c) folgenden Werte für $\mathfrak{A}^{*s}_{ik}$ ein, so folgt schließlich:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_s}\left(g^{*i\alpha}\,g^{*}_{\beta t}\,\frac{\partial\mathfrak{g}^{*ts}}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{36}$$

Dies ist die explizite Form der aus dem Hamiltonschen Prinzip folgenden Zusatzbedingungen in einem Normalkoordinatensystem.

Interessant ist der Fall des schwachen Feldes, wo man die Faktoren $g^{*i\alpha}$ und $g^{*}_{\beta t}$ als konstant betrachten und mit dem pseudoeuklidischen $G^{i\alpha}$

bzw. $G_{\beta t}$ identifizieren kann. Diese $G^{i\alpha}$ oder $G_{\beta t}$ haben mit den gleichbezeichneten Größen des § 1 nichts zu tun. Wir können (36) dann in der Form schreiben:

$$G_{\beta t} G^{i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\alpha} (\mathfrak{g}_s^{*ts}) = 0 \quad (37\text{a}) \qquad \text{oder:} \qquad G^{i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\alpha} (\mathfrak{g}_s^{*\beta s}) = 0. \quad (37\text{b})$$

Der vor der Klammer in (37b) stehende Differentialausdruck ist nichts anderes als der gewöhnliche Wellenoperator der speziellen Relativitätstheorie. Aus der Theorie der retardierten Potentiale (bzw. der Potentialtheorie im statischen Falle) weiß man nun, daß dann die Klammer unter Hinzunahme geeigneter Annahmen über das Verhalten im Unendlichen und Voraussetzung der Regularität verschwinden muß. Dann ist also:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta s}}{\partial x_s} = 0. \tag{38}$$

Dies ist aber genau die LANCZOSsche Nebenbedingung (3), die sich in dem hier betrachteten Falle des schwachen Feldes auf die EINSTEINsche Koordinatenbedingung (1) reduziert. Damit haben wir ein Argument für die EINSTEINsche Koordinatenbedingung zur Ausmerzung von Scheinfeldern im Falle schwacher Felder gewonnen. Sie ergibt sich in der vorliegenden Theorie als Folge des HAMILTONschen Prinzips.

Im Falle starken Feldes decken sich die Gln. (36) aber nicht mit den LANCZOSschen Bedingungen (3), da man dann die Faktoren $g^{*i\alpha}$ und $g^*_{\beta t}$ in (36) nicht mehr als konstant ansehen darf wie oben.

Die kovariante Form der Zusatzbedingungen (36) erhält man, indem die Ableitungen durch kovariante in der Maßbestimmung der $\bar{g}_{ik}$ ersetzt werden und außerdem $\mathfrak{g}^{*ts}$ durch $\sqrt{\frac{g}{\bar{g}}}\, g^{ts}$. Sie lautet also:

$$\bar{D}_\alpha \bar{D}_s \left[ g^{i\alpha} g_{\beta t} \bar{D}_i \left( \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}}\, g^{ts} \right) \right] = 0. \tag{39}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Differentiationsfolge bei höheren kovarianten Ableitungen hier beliebig vertauscht werden kann, da die $\bar{g}_{ik}$ einem ungekrümmten Raum entsprechen.

### *§ 3. Das Bewegungsgesetz der geodätischen Linien.*

Da in der vorliegenden Theorie die Feldgleichungen andere sind als bei EINSTEIN, ist die Sicherstellung des Bewegungsgesetzes der geodätischen Linie für einen freien Massenpunkt im Schwerefeld notwendig.

Dieser Nachweis läßt sich hier in vollkommener Analogie zur EINSTEINschen Theorie führen, denn die grundlegende Bedingung:

$$\Delta\text{iv}\, T = 0 \tag{40}$$

ist auch hier erfüllt. Man geht aus von dem Ansatz:

$$T^{ik} = c^2 \mu \, Y^i \cdot Y^k, \tag{41}$$

wo $\mu$ die natürlich gemessene Ruhdichte und die $Y^i$ die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sind. Aus (40) und (41) folgt dann das Bewegungsgesetz.

### § 4. *Die Feldgleichungen im schwachen Felde.*

Um diese zu formulieren, ist es zweckmäßig, von der Form (34b) der Feldgleichungen in einem Normalkoordinatensystem auszugehen. In diesem Falle können wir die Glieder 2. Grades weglassen. Außerdem können wir die Faktoren $g^{*rs}$ der 2. Ableitung der $g^*_{ik}$ durch das pseudoeuklidische $G^{rs}$ ersetzen. Dann ergibt sich aus (34b):

$$\frac{1}{2} G^{rs} \frac{\partial^2 g^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} = -\varkappa \left( T^*_{ik} - \frac{1}{2} T g^*_{ik} \right). \tag{42}$$

Nun setzen wir:

$$g^*_{ik} = G_{ik} + \gamma_{ik} \quad (43\,\mathrm{a}); \qquad \psi^*_{ik} = \gamma^*_{ik} - \tfrac{1}{2} \gamma^* G_{ik}, \tag{43 b}$$

$$\gamma^* = \gamma^{*\,l}_l \tag{43 c}$$

und erhalten aus (42):

$$G^{rs} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} = \Box \, \psi^*_{ik} = -2\varkappa \, T^*_{ik}. \tag{44 a}$$

Dies sind aber genau die EINSTEINschen Gleichungen 1. Näherung, die man bei EINSTEIN erhält unter Hinzunahme der Koordinatenbedingung (1). Hier haben wir den Nebenbedingungen (24) bisher noch nicht Rechnung getragen. Man kommt aber sofort zu den Beziehungen (37b), wenn man die Divergenzfreiheit des Materietensors:

$$\frac{\partial T^s_i}{\partial x_s} = 0 \tag{45}$$

zum Ausdruck bringt.

*Damit führt die vorliegende Theorie in 1. Näherung auf die* EINSTEIN*sche Theorie zurück. Es können also alle aus diesen Näherungsgleichungen zu ziehenden physikalischen Folgerungen der* EINSTEIN*schen Theorie sofort übernommen werden (Lichtablenkung am Sonnenrand, Rotverschiebung der Spektrallinien, Gravitationswellen).*

### § 5. *Die Struktur des Energie-Impulstensors des Schwerefeldes.*

In der Einleitung war im Programm der vorliegenden Theorie verlangt worden, daß der Energie-Impulstensor des Schwerefeldes $t_{mn}$ Symmetrieeigenschaften haben soll wie der Materietensor. Der Nachweis dieser Symmetrie des durch (29) in einem Normalkoordinatensystem definierten Tensors soll nun erbracht werden. Es genügt, diesen Nachweis in einem speziellen Koordinatensystem zu erbringen, da die Symmetrieverhältnisse eines Tensors vom Bezugssystem unabhängig ist.

Setzt man in den Formeln (29) $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, so erhält man die Komponenten des EINSTEINschen Affintensors $\underline{\mathfrak{t}}_\beta^\alpha$. Es genügt, die Komponenten mit $\alpha \neq \beta$ zu betrachten. Nach bekannten Formeln ist:

$$\varkappa\, \underline{\mathfrak{t}}_\beta^{*\alpha} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{H}_{ik}^{*\alpha}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik} \left(\Gamma_{ik}^{*\alpha} - \delta_k^\alpha \Gamma_i^{*j}\right). \tag{46}$$

Allgemein zerlegen wir:

$$\mathfrak{t}_\beta^{*\alpha} = \underline{\mathfrak{t}}_\beta^{*\alpha} + \tau_\beta^{*\alpha}, \tag{47}$$

wo:

$$\varkappa\, \tau_\beta^{*\alpha} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{A}_{ik}^{*\alpha}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik}. \tag{48}$$

Nach (31c) findet man:

$$\varkappa\, \tau_\beta^{*\alpha} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik} \left(\delta_k^\alpha \Gamma_{ij}^{j} - \Gamma_{ik}^{*\alpha}\right) - \tfrac{1}{2}\, g_{kt}^{*}\, g^{*\alpha j}\, \Gamma_{ij}^{*t}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik}. \tag{49}$$

Damit wird:

$$\varkappa\, \mathfrak{t}_\beta^{*\alpha} = \varkappa\left(\underline{\mathfrak{t}}_\beta^{*\alpha} + \tau_\beta^{*\alpha}\right) = -\tfrac{1}{2}\, g_{kt}^{*}\, g^{*\alpha j}\, \Gamma_{ij}^{*t}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik}. \tag{50a}$$

Benutzt man nun die Definition der CHRISTOFFEL-Symbole:

$$\Gamma_{ij}^{*t} = \frac{1}{2}\, g^{*tu} \left(\frac{\partial g_{iu}^{*}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ju}^{*}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}^{*}}{\partial x_u}\right)$$

so folgt:

$$\varkappa\, \mathfrak{t}_\beta^{*\alpha} = -\frac{1}{4}\, g^{*\alpha j} \left(\frac{\partial g_{ik}^{*}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}^{*}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}^{*}}{\partial x_k}\right) \mathfrak{g}_\beta^{*ik}.$$

Wegen der Symmetrie von $\mathfrak{g}_\beta^{*ik}$ in den beiden oberen Indizes folgt dann:

$$\varkappa\, \mathfrak{t}_\beta^{*\alpha} = -\frac{1}{4}\, g^{*\alpha j}\, \frac{\partial g_{ik}^{*}}{\partial x_j}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik}. \tag{50b}$$

Nun bilden wir die kovarianten Komponenten:

$$\varkappa\, \mathfrak{t}_{\alpha\beta}^{*} = -\frac{1}{4}\, \frac{\partial g_{ik}^{*}}{\partial x_\alpha}\, \mathfrak{g}_\beta^{*ik}. \tag{50c}$$

Dieser Darstellung sieht man die Symmetrie von $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}^{*}$ noch nicht ohne weiteres an. Nun ist aber:

$$\mathfrak{g}_\beta^{*ik} = \sqrt{-g^*}\left(g_\beta^{*ik} + g^{*ik}\, \frac{\partial\left(\log\sqrt{-g^*}\right)}{\partial x_\beta}\right)$$

und:

$$2\, \frac{\partial \log\sqrt{-g^*}}{\partial x_\alpha} = g^{*ik}\, \frac{\partial g_{ik}^{*}}{\partial x_\alpha}.$$

Somit:

$$\varkappa\, \mathfrak{t}_{\alpha\beta}^{*} = -\frac{\sqrt{-g^*}}{4}\left(\frac{\partial g_{ik}^{*}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial g^{*ik}}{\partial x_\beta} + 2\cdot \frac{\partial \log\sqrt{-g^*}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial\left(\log\sqrt{-g^*}\right)}{\partial x_\beta}\right). \tag{50d}$$

Das 2. Glied der Klammer ist symmetrisch. Das 1. Glied läßt sich umformen vermittels der bekannten Beziehung:

$$\frac{\partial g^{*ik}}{\partial x_\beta} = -g^{*ip} g^{*kq} \frac{\partial g^*_{pq}}{\partial x_\beta} \tag{51}$$

in:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\, \mathfrak{t}^*_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{-g^*}}{4}\Bigg[2\frac{\partial \log\sqrt{-g^*}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \log\sqrt{-g^*}}{\partial x_\beta} - \\ - g^{*ip} g^{*kq}\frac{\partial g^*_{pq}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g^*_{ik}}{\partial x_\alpha}\Bigg] \qquad (\alpha \neq \beta). \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

In dieser Darstellung ist die Symmetrie $\mathfrak{t}^*_{\alpha\beta} = \mathfrak{t}^*_{\beta\alpha}$ offensichtlich wegen der Vertauschbarkeit der beiden Indexpaare $pq$ und $ik$.

Die Formel (52) bezieht sich auf den Fall $\alpha \neq \beta$. Im allgemeinen Falle wird:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\, t^*_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{G}^* g^*_{\alpha\beta} - \\ -\frac{\sqrt{-g^*}}{4}\left(2\frac{\partial(\log\sqrt{-g^*})}{\partial x_\alpha}\frac{\partial(\log\sqrt{-g^*})}{\partial x_\beta} - g^{*ip} g^{*kq}\frac{\partial g^*_{pq}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g^*_{ik}}{\partial x_\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Dies ist der vollständige Energie-Impulstensor des Schwerefeldes in einem Normalkoordinatensystem. Seine allgemeine kovariante Formulierung lautet:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\, t_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} G \cdot g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\Bigg[2\overline{D}_\alpha\left(\log\left(\sqrt{\frac{g}{\overline{g}}}\right)\right)\overline{D}_\beta\left(\log\sqrt{\frac{g}{\overline{g}}}\right) - \\ - g^{ip} g^{kq}\,\overline{D}_\alpha(g_{ik})\,\overline{D}_\beta(g_{pq})\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{53a}$$

Im Falle schwachen Feldes geht dieser Tensor in denjenigen über, der in der früheren Arbeit zur Diskussion gestellt wurde. Es läßt sich nämlich verhältnismäßig einfach zeigen, daß die Tensordichte $\tau^{*\alpha}_\beta$ [definiert durch (48)] mit gleichbenannten Größen der 1. Arbeit [Gl. (62)] im schwachen Felde identisch wird.

Wir erhalten aus (48) vermittels der Beziehungen (31c) statt (49) auch folgenden Ausdruck:

$$\varkappa\, \tau^{*\alpha}_\beta = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}^*\delta^\alpha_\beta + \frac{1}{2\sqrt{-g^*}} g^*_{kt}\, \mathfrak{g}^{*t\alpha}_i\, \mathfrak{g}^{*ik}_\beta. \tag{54}$$

Nun spielt im schwachen Felde die Abweichung des $\sqrt{-g^*}$ von 1 keine Rolle in (54). Unter Benutzung der Definitionsgleichung (6c) für $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^* - \mathfrak{H}^*$ folgt:

$$\varkappa\, \tau^{*\alpha}_\beta = -\tfrac{1}{4} G_{kl}\, \mathfrak{g}^{*km}_n\, \mathfrak{g}^{*ln}_m\, \delta^\alpha_\beta + \tfrac{1}{2} G_{kl}\, \mathfrak{g}^{*l\alpha}_i\, \mathfrak{g}^{*ik}_\beta \tag{55}$$

Hier sind die $G_{kl}$ die durch (43 a) definierten Größen. Nun kann man leicht zeigen, daß für die durch (43 b) definierten Größen die Beziehungen gelten:

$$\mathfrak{g}_s^{*ik} = -\frac{\partial \psi^{*ik}}{\partial x_s} .$$

Mit deren Hilfe kann man die $\mathfrak{g}_s^{*ik}$ in (55) durch die Ableitungen der $\psi^{*ik}$ ersetzen. Der dann aus (55) entstehende Ausdruck für $\varkappa \tau_\beta^{*\alpha}$ ist dann genau identisch mit dem durch Formel (62) meiner früheren Arbeit gegebenen.

In der früheren Arbeit wurde auch gezeigt, daß sich im schwachen statischen Felde für die Komponenten des Energie-Impulstensors $t_{\alpha\beta}^*$ äußerst einfache Formeln ergeben. Es besteht eine große Ähnlichkeit mit dem MAXWELLschen Spannungstensor und die Energiedichte des Gravitationsfeldes ist stets positiv.

### *§ 6. Theorie der Planetenbewegung in der neuen Theorie.*

Soll die vorliegende Theorie nicht im Widerspruch zur Erfahrung stehen, so muß sie auch die Perihelbewegung des Merkur richtig liefern. Dies ist ein sehr empfindliches Kriterium für die Zulässigkeit der Wahl der HAMILTON-Funktion. Da die exakte zentralsymmetrische Punktlösung in der neuen Theorie noch nicht bekannt ist, soll dieses Problem mit Näherungsmethoden behandelt werden.

Das Bewegungsgesetz eines Planeten ist wie bei EINSTEIN durch eine geodätische Linie gegeben. Um die Planetenbewegung mit hinreichender Genauigkeit behandeln zu können, genügt es nach LEVI-CIVITA[1] von den $g_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ die 1. Näherung zu kennen und von $g_{44}$ die 2. Näherung. Da die geodätischen Linien vom Bezugssystem unabhängige Gebilde sind, genügt es, die Überlegungen in einem Normalkoordinatensystem durchzuführen.

Die Zusatzbedingungen spielen im materiefreien Falle keine Rolle. Auf die Bedingungen (36) brauchen wir daher keine Rücksicht zu nehmen.

Das aus der EINSTEINschen Theorie sich ergebende Linienelement dieser Näherung lautet[2]:

$$d s^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2) - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + 2\frac{\Phi^2}{c^4}\right) d x_4^2 , \qquad (56)$$

wo $\Phi$ das NEWTONsche Potential. Dieses Linienelement liefert die Perihelbewegung des Merkur in richtiger Größe.

Wir wissen schon, daß die vorliegende Theorie in 1. Näherung mit der EINSTEINschen übereinstimmt. Es handelt sich nun noch darum

[1] LEVI-CIVITA: Absoluter Differentialkalkül, S. 265f. Berlin 1928.

[2] LEVI-CIVITA: l. c.

zu zeigen, daß auch die 2. Näherung von $g_{44}^*$ sich wie bei EINSTEIN ergibt. Wir benutzen die Feldgleichung (9) mit den Indizes $i=k=4$. Diese lautet im materiefreien Fall:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*44}} - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}_s^{*44}}\right) = 0. \tag{57}$$

Nun ist $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{H}^*$ und:

$$R_{44}^* = \mathfrak{H}_{44}^* - \frac{\partial}{\partial x_s}(\mathfrak{H}_{44}^{*s}).$$

Daher können wir für (57) auch schreiben:

$$R_{44}^* + \mathfrak{A}_{44}^* - \frac{\partial}{\partial x_s}(\mathfrak{A}_{44}^{*s}) = 0. \tag{57a}$$

Nun gilt exakt[1]:

$$R_{44} = -\frac{V}{c^2}\Delta V, \tag{57b}$$

wo $-g_{44}^* = V^2/c^2$ gesetzt ist. Der $\Delta$-Operator ist der LAPLACEsche Operator des Streckenraumes. In der EINSTEINschen Theorie setzt man $R_{44}^* = 0$. Aus dieser Gleichung folgt dann der in (56) enthaltene Wert von $g_{44}^*$ in 2. Näherung, wenn man im LAPLACEschen Operator $\Delta$ den Maßtensor 1. Näherung des Streckenraumes benutzt.

Die Identität beider Theorien für unser Problem ist bewiesen, wenn der Nachweis gelingt, daß:

$$\mathfrak{A}_{44}^* - \frac{\partial}{\partial x_s}(\mathfrak{A}_{44}^{*s}) = 0. \tag{58}$$

Zunächst folgt aus der speziellen Form (6c) von $\mathfrak{A}^*$, daß: $\mathfrak{A}_{44}^{*s} = 0$ für jedes $s$, weil im statischen Falle keine Größen $\mathfrak{g}_s^{*44}$ in $\mathfrak{A}^*$ vorkommen. Es muß also bewiesen werden, daß:

$$\mathfrak{A}_{44}^* = 0. \tag{58a}$$

Der Nachweis der Richtigkeit dieser Beziehung erfordert einige Rechnungen. Denn sowohl $\sqrt{-g^*}$ als auch die $g_{kl}^*$ sind von $\mathfrak{g}^{*44}$ abhängig. Nun ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial \mathfrak{g}^{*44}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}^{*44}}\left(\frac{g_{kl}^*}{\sqrt{-g^*}}\right)\mathfrak{g}_n^{*km}\,\mathfrak{g}_m^{*ln}. \tag{58b}$$

Weiter:

$$d\mathfrak{g}^{*st} = \sqrt{-g^*}\,dg^{*st} + g^{*st}\,d\left(\sqrt{-g^*}\right).$$

Dies in (32a) eingesetzt ergibt:

$$dg_{kl}^* = -g_{ks}^*\,g_{lt}^*\left(\frac{d\mathfrak{g}^{*st}}{\sqrt{-g^*}} - g^{*st}\frac{d\sqrt{-g^*}}{\sqrt{-g^*}}\right).$$

[1] LAUE, M. v.: Die Relativitätstheorie, 2. Aufl., S. 185. 1923.

Unter Benutzung von (32b) folgt dann schließlich:

$$d g^*_{kl} = -\frac{g^*_{ks} g^*_{lt}}{\sqrt{-g^*}} \left(d \mathfrak{g}^{*st} - g^{*st} \cdot \frac{1}{2} g^*_{uv} d \mathfrak{g}^{*uv}\right).$$

Daraus:

$$d g^*_{kl} = -\frac{g^*_{ks} g^*_{lt}}{\sqrt{-g^*}} d \mathfrak{g}^{*st} + \frac{1}{2} \frac{g^*_{kl}}{\sqrt{-g^*}} g_{uv} d \mathfrak{g}^{uv}.$$

Nun laufen die Indizes $k$ und $l$ in der Summe (58b) nur über die Indizes von 1 bis 3. Daher ist das 1. Glied der rechten Seite Null wegen des Verschwindens von $g_{k4}$ $(i = 1, 2, 3)$ für ein statisches Linienelement. Es wird also:

$$\frac{\partial g^*_{kl}}{\partial \mathfrak{g}^{*44}} = \frac{1}{2} \frac{g^*_{kl} g^*_{44}}{\sqrt{-g^*}}. \tag{59a}$$

Unter Benutzung von (32b) folgt weiter:

$$\frac{\partial \sqrt{-g^*}}{\partial \mathfrak{g}^{*44}} = \frac{1}{2} g^*_{44}. \tag{59b}$$

Mit (59a) und (59b) wird schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}^*_{44}} \left(\frac{g^*_{kl}}{\sqrt{-g^*}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g^*}} \frac{\partial g^*_{kl}}{\partial \mathfrak{g}^{*44}} - \frac{g^*_{kl}}{(\sqrt{-g^*})^2} \frac{\partial (\sqrt{-g^*})}{\partial \mathfrak{g}^{*44}}$$
$$= \frac{1}{2(\sqrt{-g^*})^2} g^*_{kl} g^*_{44} - \frac{1}{2(\sqrt{-g^*})^2} g^*_{kl} g^*_{44} = 0.$$

Somit Beweis erbracht.

*Beide Theorien liefern also hinsichtlich der Perihelbewegung dasselbe Ergebnis.*

Auf Grund des Ergebnisses (58) sind wir in der Lage, eine exakte Feldgleichung für statische Linienelemente in der neuen Theorie hinzuschreiben. Sie lautet:

$$R^*_{44} = -\varkappa (T^*_{44} - \tfrac{1}{2} T g^*_{44}), \tag{60}$$

ist also identisch mit der entsprechenden Einsteinschen Gleichung.

Herrn Prof. M. v. Laue danke ich für wertvolle Diskussionen und Anregungen.

*Braunschweig*, Lehrstuhl für Theoretische Physik der Technischen Hochschule.