Zur Übertragung der Kettensätze.

Von

GÜNTER PICKERT in Tübingen.

E. NOETHER[1]) hat bewiesen, daß sich die Kettensätze von den Idealen eines Ringes $\mathfrak{R}$ mit Einselement auf die Untermoduln eines endlichen $\mathfrak{R}$-Moduls übertragen. Es liegt nun nahe, in Abänderung dieses Beweises vollständige Induktion nach der Anzahl der Basiselemente des $\mathfrak{R}$-Moduls durchzuführen. Der Induktionsschluß ergibt sich dann am einfachsten als Anwendung eines allgemeinen *Übertragungssatzes* für modulare Verbände.

In der Bezeichnungsweise der Verbandstheorie[2]) heißt ein Verband *modular*, wenn in ihm

$$(1) \qquad a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c \quad \text{für} \quad a \subseteqq c$$

gilt. $a \cup (b \cap c) \subseteqq (a \cup b) \cap c)$ gilt für $a \subseteqq c$ bereits allgemein als Folge aus den Verbandsaxiomen. Unter einer *O-Kette* versteht man eine Elementenfolge mit $a_1 \subseteqq a_2 \subseteqq \ldots$, entsprechend unter einer *U-Kette* eine solche mit $a_1 \supseteqq a_2 \supseteqq \ldots$. Für die aus den Untermoduln eines Moduls bestehenden modularen Verbände, in denen also $\cup$ die Summen- und $\cap$ die Durchschnittsbildung bedeutet, sind die Fälle wichtig, in denen der *O- bzw. U-Satz* gilt: „*Eine O (U)-Kette enthält nur endlich viele verschiedene Elemente*". Das *Einselement* e und das *Nullelement* n eines Verbandes sind durch $n \subseteqq a \subseteqq e$ (für alle Elemente a) ausgezeichnet. Im folgenden soll die Existenz von e und n vorausgesetzt werden. Nach ORE[3]) wird der Teilverband der Elemente x mit $x \subseteqq a$ als der *Quotient* a/n bezeichnet. Aus den Verbandsaxiomen folgt sofort

Hilfssatz 1. Aus $a \subseteqq b$ folgt $a \cap c \subseteqq b \cap c$ und $a \cup c \subseteqq b \cup c$.

Weiter wird benötigt

Hilfssatz 2. Ein Verband ist dann und nur dann modular, wenn aus den Beziehungen

$$(2) \qquad a \subseteqq b \subseteqq c \cup d$$

$$(3) \qquad a \cap c = b \cap c$$

$$(4) \qquad (a \cup c) \cap d = (b \cup c) \cap d$$

stets $a = b$ folgt[4]).

Beweis. In einem modularen Verband folgen nach (1) aus (2) die Beziehungen

$$(5) \qquad c \cup (d \cap (a \cup c)) = (c \cup d) \cap (a \cup c) = a \cup c$$

$$(6) \qquad c \cup (d \cap (b \cup c)) = (c \cup d) \cap (b \cup c) = b \cup c$$

$$(7) \qquad (a \cup c) \cap b = a \cup (c \cap b).$$

[1]) Math. Ann. **96**, 35 (1927).

[2]) Enzyklopädie der math. Wiss. I/1, 13 (1939).

[3]) Ann. of Math. **36** (1935).

[4]) Diesen Satz habe ich in der Literatur nicht formuliert gefunden. Im folgenden wird nur die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung für Modularität benutzt.

Aus (5) und (6) ergibt sich mittels (4) $a \cup c = b \cup c$, also

$$(a \cup c) \cap b = b.$$

Aus (7) und (3) folgt aber

$$(a \cup c) \cap b = a \cup (a \cap b) = a,$$

womit $a = b$ bewiesen ist. Ein nichtmodularer Verband enthält nun nach DEDEKIND[5]) immer einen aus fünf Elementen n_0, a, b, c, e_0 bestehenden Teilverband, für den durch

$$n_0 \subset a \subset b \subset e_0, \quad n_0 \subset c \subset e$$

alle $\subset$-Beziehungen angegeben sind. Mit $a = d$ sind dann aber (2), (3), (4) erfüllt, obwohl $a \neq b$ ist.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich sehr leicht der

Übertragungssatz. Besitzt in einem modularen Verband M das Einselement die Darstellung $e = e' \cup e''$, so überträgt sich die Gültigkeit des $O(U)$-Satzes von den Verbänden $M' = e'/n$ und $M'' = e''/n$ auf M.

Beweis. Aus einer $O(U)$-Kette in M mit dem allgemeinen Glied a entstehen durch $a' = (a \cup e'') \cap e' \varepsilon M'$, $a'' = a \cap e'' \varepsilon M''$ nach Hilfssatz 1 wieder $O(U)$-Ketten in M' bzw. M''. Gilt daher der $O(U)$-Satz in M' und M'', so stimmen von einem gewissen Glied ab alle a' sowohl wie alle a'' überein. Aus Hilfssatz 2 folgt dann das Übereinstimmen der a, d. h. der $O(U)$-Satz gilt auch in M, w. z. b. w. Daß der Übertragungssatz für nichtmodulare Verbände nicht zu gelten braucht, ergibt sich aus dem durch seine $\subset$-Beziehungen

$$n \subset e' \subset a_1 \subset a_2 \subset \cdots \subset e, \quad n \subset e'' \subset e$$

definierten Verband.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ ein nicht notwendig kommutativer Ring und $(A_1, \ldots, A_\nu)$ der von den ν Elementen A_μ erzeugte $\mathfrak{R}$-Linksmodul[6]). Im Verband der Untermoduln dieses Moduls ist $e = (A_1, \ldots, A_\nu)$ das Einselement, und bei $\nu > 1$ sind mit $e' = (A_1)$, $e'' = (A_2, \ldots, A_\nu)$ die Voraussetzungen des Übertragungssatzes erfüllt. Durch vollständige Induktion nach ν folgt daher der $O(U)$-Satz für die Untermoduln von $(A_1, \ldots, A_\nu)$, falls er für die Untermoduln jedes $\mathfrak{R}$-Linksmoduls (A_μ) mit $\mu = 1, \ldots, \nu$ gilt. Erfüllt der Modul nun noch die Bedingung (E): „*Zu jedem Modulelement X gibt es ein ξ aus $\mathfrak{R}$ mit $\xi X = X$*“, so ordnet man jedem Untermodul $m \subseteq (A_\mu)$ das Linksideal $\mathfrak{m}$ der α aus $\mathfrak{R}$ mit $\alpha A_\mu \varepsilon m$ zu. Ist $\mathfrak{m}'$ das in gleicher Weise dem Untermodul m' zugeordnete Ideal, so erkennt man sofort, daß aus $m \subset m'$ stets $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$ folgt. Auf Grund des vorher Gezeigten übertragen sich daher die Kettensätze von den Linksidealen aus $\mathfrak{R}$ auf die Untermoduln jedes endlichen $\mathfrak{R}$-Linksmoduls, der (E) erfüllt.

Bei E. NOETHER[1]) ist nur deshalb die Existenz eines Einselements von $\mathfrak{R}$ eine (E) enthaltende, dabei aber scheinbar nur auf $\mathfrak{R}$ bezogene Forderung, weil die dort verwandte engere Moduldefinition[7]) die Bedingung einschließt, daß das Einselement von $\mathfrak{R}$ auch Einheitsoperator für den Modul ist. Bei der

---

[5]) Math. Ann. 53, 371—403 (1900).

[6]) Die folgenden Betrachtungen gelten natürlich genauso für Rechtsmoduln, wenn entsprechend Linksideal durch Rechtsideal ersetzt wird.

[7]) Math. Ann. 83, 54 (1921).

weiteren Moduldefinition[8]) lautet die entsprechende, (E) enthaltende Forderung: „*Es gibt in* $\mathfrak{R}$ *ein* α *mit* $\alpha X = X$ *für alle Modulelemente* X". Daraus folgt noch nicht die Existenz eines Einselements von $\mathfrak{R}$. Bezeichnet $\mathfrak{n}$ das zweiseitige Ideal der den gesamten Modul annullierenden Elemente von $\mathfrak{R}$, so ist jedoch mit $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ die Restklasse mod. $\mathfrak{n}$ von diesem α Einselement von $\mathfrak{R}'$. Für jedes ξ aus $\mathfrak{R}$ folgt nämlich $\alpha\,\xi\,X = \xi\,X$ und $\xi\,\alpha\,X = \xi\,X$, d. h. $\alpha\,\xi - \xi$ und $\xi\,\alpha - \xi$ liegen in $\mathfrak{n}$.

Ist (E) nicht erfüllt, so überträgt sich bekanntlich zwar nicht mehr der U-Satz (im allgemeinen), wohl aber noch der O-Satz von den Linksidealen auf die Untermoduln. Im Gegensatz zu dem oben behandelten Fall ist der Beweis dafür bei zyklischem, d. h. von einem Element erzeugten Modul nicht einfacher als bei beliebigem endlichen Modul. Daher bietet hier die Anwendung des verbandstheoretischen Übertragungssatzes keine Vorteile.

[8]) VAN DER WAERDEN: „Moderne Algebra" I, 146 (1937); II, 99 (1940).

(Eingegangen am 16. Januar 1947.)