Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik.

Von

HELMUT WIELANDT in Mainz.

Herr WINTNER hat kürzlich gezeigt, daß es kein Paar beschränkter HERMITEscher Operatoren gibt, die die HEISENBERGsche Vertauschungsrelation erfüllen[1]). Sein Beweis benutzt die Spektraltheorie. Dieselben Hilfsmittel benötigt auch derjenige Beweis, der sich durch Spezialisierung des Eindeutigkeitssatzes von Herrn RELLICH[2]) unmittelbar ergibt.

Es gibt eine einfachere Begründung, die noch ein wenig mehr liefert:

Sind A, B beschränkte Operatoren und 1 der identische Operator in einem linearen Raum $\mathfrak{R}$ mit linearer Metrik, so ist $AB - BA \neq 1$.

Beweis: Aus der Annahme

$$AB - BA = 1 \tag{1}$$

und der Identität

$$AB^{n+1} - B^{n+1}A = (AB^n - B^nA)B + B^n(AB - BA)$$

folgt durch einen Induktionsschluß:

$$AB^{n+1} - B^{n+1}A = (n+1)B^n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots;\ B^0 = 1). \tag{2}$$

Als beschränkter Operator besitzt A einen Betrag $|A|$, definiert durch

$$|A| = \underset{x \in \mathfrak{R}}{\text{fin sup}} \frac{|Ax|}{|x|},$$

mit den Rechenregeln

$$|A - B| \leqq |A| + |B|, \quad |AB| \leqq |A|\,|B|, \quad |nA| = n\,|A|. \tag{3}$$

Diese ergeben, auf (2) angewandt, die Abschätzung

$$(n+1)\,|B^n| \leqq 2\,|A|\,|B^{n+1}| \leqq 2\,|A|\,|B|\,|B^n| \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots), \tag{4}$$

daher

$$|B^{n_1}| = 0 \quad \text{für} \quad n_1 + 1 > 2\,|A|\,|B|.$$

Ist aber $|B^{n+1}| = 0$ für ein $n \geqq 0$, so ist nach (4) auch $|B^n| = 0$. So ergibt sich schrittweise ein Widerspruch:

$$0 = |B^{n_1}| = |B^{n_1 - 1}| = \cdots = |B^1| = |B^0| = 1.$$

Dieser Beweis zeigt allgemein die Unlösbarkeit der Gleichung (1) in bewerteten Ringen, in denen die Regeln (3) gelten.

---

[1]) WINTNER, AURÈL: The unboundedness of quantum-mechanical matrices. Physical Review **71**, 738—739 (1947).

[2]) RELLICH, FRANZ: Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1946**, 107—115.

(Eingegangen am 13. August 1948.)