

Die Polarisation des Vakuums als Ursache einer Feldbegrenzung beim Elektron.

Von
ERICH BAGGE.

(Eingegangen am 27. August 1951.)

1. Einleitung.

Die Tatsache der *Elektronenpaarbildung* durch energiereiche Lichtquanten läßt sich als eine bis zum Aufreißen eines elektrischen Dipols vorangetriebene *Polarisation des Vakuums* auffassen, die durch das elektromagnetische Feld der Lichtwelle bewirkt wird. Es liegt nahe, auch dann schon eine solche *Polarisation als vorhanden* anzusehen, wenn das auslösende *Feld energetisch nicht in der Lage* ist, eine Paarbildung de facto hervorzurufen. Grundsätzlich ist es deshalb erforderlich, die Feldgleichungen auch in diesem Falle in solcher Form anzusetzen, wie sie für polarisierbare Medien gelten. Dies bedeutet, daß insbesondere die *Dielektrizitätskonstante* ϵ_0 als eine *ortsabhängige Raumbfunktion* aufzufassen ist.

Dieser an sich altbekannte Sachverhalt ist in den bisherigen Theorien des Elektrons offenbar *nicht hinreichend konsequent* beachtet worden. Seine Berücksichtigung liefert nämlich von selbst eine *natürliche Feldbegrenzung* in der Umgebung des Elektrons, die automatisch zu einem *endlichen Wert* für die rein elektromagnetisch berechnete *Selbstenergie des Elektrons* führt.

Im vorliegenden Artikel wird eine in *Analogie zur Optik polarisierbarer Medien* entwickelte *Theorie der Vakuum polarisation* durchgeführt, die, wie es scheint, im Grunde alles leistet, was man von einer quantisierten Elektronentheorie für eine *punktförmig lokalisierte Ladung* optimal erwarten darf.

2. Die Potentialgleichung für das Vakuum.

Aus den oben besprochenen Gründen betrachten wir also die *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* $\epsilon_0(\mathbf{r})$ als eine *nichtkonstante* ortsabhängige Funktion, deren *räumliche Veränderlichkeit* die *Potentialbildung* beeinflusst. Für das von einer Punktladung erzeugte skalare Potential φ gilt im reinen Vakuum dann aber *nicht* die bekannte LAPLACESche Gleichung

$$\Delta\varphi_1 = 0. \tag{1}$$

Das Potential hat vielmehr die folgende Differentialgleichung zu erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gl. (1) wesentlich dadurch, daß sie φ und ε_0 in einer *nichttrivialen* Weise eng miteinander verknüpft und damit die Werte von φ zwangsläufig von den jeweiligen Werten der Polarisation ε_0 abhängen läßt.

Wenn man speziell eine *punktförmige Ladung* betrachtet, wird das zugehörige Potentialfeld φ und ebenso ε_0 *kugelsymmetrisch*, d. h. nur vom Abstand r abhängig sein:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r); \quad \varphi = \varphi(r). \quad (3)$$

Die Differentialgleichung (2) nimmt dann die Gestalt an:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d(\ln \varepsilon_0)}{dr} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (4)$$

Für ein räumlich konstantes ε_0 würde der dritte Summand auf der linken Seite von Gl. (4) verschwinden. Die verbleibende Differentialgleichung besäße dann die bekannte Lösung von der *Form des COULOMB-Potentials*:

$$\varphi_1 = \frac{e}{r}. \quad (5)$$

Durch die Einflüsse des mit ε_0 behafteten Gliedes in Gl. (4) wird aber φ modifiziert. Es ist jedoch zu verlangen, daß für hinreichend große Werte von r die richtige Lösung von Gl. (4) in die Form (5) übergeht. Dies wird für das folgende von Bedeutung sein.

3. Der Ansatz für die Vakuumpolarisation.

Die zu entwickelnde Theorie erzwingt eine Aussage über die *Feldabhängigkeit der Vakuumpolarisation* ε_0 . Es werde nun angenommen, daß sich das „*Vakuum*“ bezüglich seiner *dielektrischen Polarisierbarkeit* ähnlich wie ein *mit Materie erfülltes Medium* verhalte, für dessen Dielektrizitätskonstante eine *Dispersionsformel* gilt.

Wir setzen diese in nur *loser*, aber *analytisch sehr zweckmäßiger*¹ *Anlehnung an das optische Analogon* in folgender Form an:

$$\varepsilon_0 = \frac{C}{(E_r - E)^2 + D}. \quad (6)$$

¹ Dies gilt im Hinblick auf die folgenden Rechnungen und auf die relativistische Verallgemeinerung von (6):

$$\varepsilon = \frac{C}{\sum_{\alpha=1}^4 (c p_{\alpha} - e \Phi_{\alpha})^2 + D}.$$

Dabei sei: C eine noch zu bestimmende Konstante, E_r eine *Resonanzenergie*, die physikalisch durch den *Einsatzpunkt der Paarbildung* gekennzeichnet sei. E stelle eine feldabhängige Energiegröße dar, über die wir noch weitere Annahmen festsetzen müssen. D entspricht der *Dämpfung* bzw. der *Resonanzbreite* des Polarisationsvorganges.

Solange wir keine weiteren physikalischen Gesichtspunkte kennenlernen, die eine solche Annahme widerlegen, scheint es sinnvoll zu sein, die *Dämpfungskonstante* D gleich Null zu setzen. Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß für $E = E_r$ die Polarisation ϵ_0 unendlich groß werden kann. Dies möge dem *Fall der echten Paarbildung* zugeordnet werden.

Bezüglich E wollen wir die folgende Annahme vorschlagen. Dem Ansatz (6) entsprechend muß die Größe E die *Dimension einer Energie* besitzen, weiterhin muß sie eine *skalare Feldfunktion* darstellen. Es liegt deshalb aus *Einfachheitsgründen* nahe, E mit $e\varphi$ zu identifizieren.

Damit nimmt die Gl. (6) die Gestalt an:

$$\epsilon_0 = \frac{C}{(E_r - e\varphi)^2}. \quad (7)$$

Die Konsequenzen dieses Ansatzes werden wir in den folgenden Abschnitten diskutieren. Es wird sich dabei zeigen, daß die spezielle Form der Gl. (7) besondere analytische Vorteile besitzt, die für die strenge Lösung der neuen Potentialgleichung (4) von Bedeutung sind.

4. Das statische Potential einer Punktladung bei Berücksichtigung der Vakuumpolarisation.

Geht man mit dem Ansatz (7) in die erweiterte Potentialgleichung (4) ein, so erhält man für φ die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2e}{E_r - e\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 0. \quad (8)$$

Es ist für das folgende zweckmäßig, die *Resonanzenergie* E_r durch eine andere Konstante r_0 von der Dimension einer Länge auszudrücken:

$$E_r = \frac{e^2}{r_0}. \quad (9)$$

Damit erhält die Gl. (8) die Form:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2}{e/r_0 - \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 0. \quad (10)$$

Die allgemeine Lösung dieser *nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung* läßt sich auf einem fast systematischen Wege auffinden, dessen Darstellung wir bei anderer Gelegenheit geben wollen.

Wie sich jedoch durch Einsetzen unmittelbar nachprüfen läßt, besitzt die gesuchte allgemeine Lösung die Gestalt:

$$\varphi = \frac{e}{r_0} \cdot \frac{Ar_0 + (B-1)r}{Ar_0 + Br}. \quad (11)$$

Die Größen A und B stellen die beiden willkürlich wählbaren Integrationskonstanten dar, über die wir so verfügen werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\varphi = 0$ für $r \rightarrow \infty$,
ergibt: $B = 1$, (12)

b) $\varphi \rightarrow \frac{e}{r}$ für $r \gg r_0$,
ergibt: $A = 1$. (13)

Damit erhält das *Potentialfeld einer Punktladung e bei Berücksichtigung der Polarisierungseffekte des Vakuums* im Sinne des Ansatzes (7) die endgültige Gestalt:

$$\varphi = \frac{e}{r + r_0}. \quad (14)$$

Das Potential φ wird damit an der Stelle $r = 0$ *nicht singulär*, sondern besitzt dort den *endlichen Wert*:

$$\varphi_0 = \frac{e}{r_0}. \quad (15)$$

Die Gl. (14) ist dabei von geradezu verblüffend *einfacher analytischer Struktur*, obwohl sie doch die Lösung einer ziemlich verwickelten nicht-linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt. Sie erlaubt nunmehr ohne weitere Schwierigkeiten die Feldstärke \mathfrak{E} , die Verschiebung \mathfrak{D} und die Feldenergie für eine Punktladung zu berechnen.

5. Feldstärke, Verschiebung und Feldenergie im Bereiche einer elementaren Punktladung.

Die *Feldstärke* \mathfrak{E} im Bereiche der Punktladung e ergibt sich aus dem Potential (14) durch einfache Gradientenbildung:

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{e}{(r + r_0)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (16)$$

Durch Einsetzen von (14) in Gl. (7) erhält man außerdem die zugehörige Dielektrizitätskonstante ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{Cr_0^2}{e^4} \cdot \frac{(r + r_0)^2}{r^2}. \quad (17)$$

Damit besitzt der Verschiebungsvektor \mathfrak{D} die Gestalt:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} = \frac{Cr_0^2}{e^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (18)$$

Die Gl. (18) gibt eine erste Möglichkeit, eine Beziehung zwischen den Konstanten C und r_0 herzustellen. Es muß ja die Beziehung erfüllt sein:

$$4\pi e = \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{f} = 4\pi \frac{Cr_0^2}{e^3}. \quad (19)$$

Andererseits ist zu verlangen, daß die gesamte Feldenergie des Elektrons gleich seiner Ruhenergie ist: Es muß also die weitere Gleichung gelten:

$$m_0 c^2 = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E} \mathfrak{D} d\tau = \frac{Cr_0}{2e^2}. \quad (20)$$

Damit sind die beiden Konstanten C und r_0 eindeutig festgelegt. Aus den Gl. (19) und (20) folgt nämlich:

$$a) \quad E_r = \frac{e^2}{r_0} = 2m_0 c^2 \quad \left(\text{d. h. } r_0 = \frac{e^2}{2m_0 c^2} \right), \quad (21)$$

$$b) \quad C = \frac{e^4}{r_0^2} = 4m_0^2 c^4. \quad (22)$$

Für die *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* ϵ_0 gilt mithin ganz allgemein:

$$\epsilon_0 = \frac{4m_0^2 c^4}{(2m_0 c^2 - e\varphi)^2}. \quad (23)$$

Diese Gleichung besagt, daß für *verschwindendes Potential* φ die Größe ϵ_0 gegen *Eins* strebt, während andererseits *spontane Paarbildung* eintritt, wenn $e\varphi$ den Wert $2m_0 c^2$ erreicht.

Beide Aussagen entsprechen physikalisch exakt unseren Erwartungen und sind demgemäß der ganzen Problemlage ausgezeichnet angepaßt.

Schlußbemerkung.

Mit den vorangegangenen Darlegungen glauben wir gezeigt zu haben, daß sich in einer klassischen (d.h. nicht quantisierten) Elektrodynamik *keine Divergenzschwierigkeiten für die Feldenergie des Elektrons* einstellen, wenn die *Polarisation des Vakuums* konsequent berücksichtigt wird.

Die Annahme einer solchen, schon *vor Eintritt der Paarbildung* vorbereiteten *dielektrischen Polarisation* ist andererseits angesichts unserer heutigen Vorstellungen von der Natur des Vakuums als einer mit *Elektronen in Zuständen negativer Energie* dicht aufgefüllten *DIRACschen See* nichts Ungewöhnliches.

Diese Vorstellungen haben ja auch in den bekannten Arbeiten von HEISENBERG und EULER und den daran anschließenden anderer Autoren ihre entsprechenden Niederschläge gefunden, in denen aus der *DIRACschen Löchertheorie* Aussagen über die möglichen Polarisationseffekte des Vakuums in gewissen speziellen Grenzfällen abgeleitet wurden.

Es mag darum nicht unberechtigt erscheinen, einmal den hier eingeschlagenen umgekehrten Weg zu versuchen, der die Möglichkeit der dielektrischen Polarisation des Vakuums *von vornherein* mit in die Grundlagen der Theorie aufnimmt. Der dabei erzielte Erfolg dürfte dieses Wagnis in gewisser Weise rechtfertigen, zumal sich neben der endlichen Feldenergie des Elektrons ganz von selbst recht plausible Aussagen über die möglichen Polarisierungseffekte des Vakuums mitegeben.

Ob weitergehende Konsequenzen, die man aus der Gl. (14) und (23) ableiten kann und die Gegenstand weiterer Untersuchungen sein müssen, durch die Erfahrung bestätigt werden, bedarf noch der Nachprüfung.

Die vorliegenden Betrachtungen erhielten ihren ersten Anstoß durch Diskussionen mit Herrn R. FLEISCHMANN über den *Vektorcharakter* physikalischer Rechengrößen. In diesen Besprechungen hat Herr FLEISCHMANN aus sehr allgemeinen und überzeugenden Gründen *den tensoriellen Charakter* gerade auch der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums mit allem Nachdruck betont. Dies veranlaßte mich zu dem vorliegenden Versuch. Es sei mir gestattet, Herrn FLEISCHMANN hierfür auch an dieser Stelle bestens zu danken.

Hamburg 36, Jungiusstraße 9, Physikalisches Staatsinstitut.