

Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen.

III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung*.

Von

ALFRED SEEGER, HANS DONTH und ALBERT KOCHENDÖRFER.

Mit 4 Figuren im Text.

(Eingegangen am 1. Oktober 1952.)

Der vorliegende Teil befaßt sich mit der Wechselwirkung zwischen Versetzungen und Schallwellen. Es wird gezeigt, daß es gewisse Kombinationen von thermischen Wellen gibt, die trotz der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in den Kraftgesetzen einfache, an Eigenschwingungen erinnernde Eigenschaften haben. Wir bezeichnen sie deshalb als oszillatorische Eigenbewegungen. In Analogie dazu werden Versetzungen als translatorische Eigenbewegungen beschrieben. Im Rahmen des sog. FRENKELschen Versetzungsmodells lassen sich mit Hilfe der BÄCKLUND-Transformation, deren wichtigste Eigenschaften in Punkt 3 besprochen werden, einfache Gesetze für die Superposition von Eigenbewegungen aufstellen. Die Eigenschaften der sich so ergebenden Wellengruppen und ihre Wechselwirkung mit Versetzungen werden in Punkt 4 und 5 untersucht. Es zeigt sich, daß die Wechselwirkung im Rahmen des eindimensionalen kontinuierlichen Modells keine Dämpfung bewegter Versetzungen zur Folge hat. Eine solche ergibt sich, wie in Punkt 6 ausgeführt wird, erst in dreidimensionalen Modellen und bei Berücksichtigung der diskontinuierlichen Struktur der Kristalle. Weitere Überlagerungen von Eigenbewegungen, die für die Entstehung von Versetzungen von Bedeutung sind, werden in Teil IV untersucht werden.

1. Einleitung und Problemstellung.

In zwei früheren Arbeiten^{1,2} haben wir uns mit dem sog. FRENKELschen Gittermodell für Versetzungen befaßt und dabei als Differentialgleichung für die Atomverschiebung $q(\xi, t)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{2\pi a}{L_0} \sin \frac{2\pi q}{a} \quad (1a)$$

bzw. ihre normierte Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin u \quad (1b)$$

(x = normierte Ortskoordinate, y = normierte Zeitkoordinate) benutzt. Gl. (1b) entsteht aus dem streng gültigen Differentialgleichungssystem

* Die Punkte 3 bis 5 fußen im wesentlichen auf der Diplomarbeit von H. DONTH an der Technischen Hochschule Stuttgart. 1951.

¹ KOCHENDÖRFER, A., u. A. SEEGER: Z. Physik **127**, 533 (1950) (als I zitiert).

² SEEGER, A., u. A. KOCHENDÖRFER: Z. Physik **130**, 321 (1951) (als II zitiert).

[vgl. I, Gl. (10), (10a)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\hbar^2} (u(x + \hbar, y) + u(x - \hbar, y) - 2u(x, y)) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin u \\ x = n \frac{2\pi a}{L_0} = n\hbar \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

durch eine TAYLOR-Entwicklung nach Potenzen von \hbar und Vernachlässigung höherer Potenzen¹. Gl. (1b) ist also nur eine Näherung für die partielle Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{4!} \hbar^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots + \frac{2}{(2n)!} \hbar^{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin u \quad (2a)$$

die mit Gl. (2) gleichwertig ist. Die Verwendung der Gl. (1a) an Stelle der strengen Gl. (2a) entspricht dem Ersatz des Diskontinuums durch ein Kontinuum. Sie wird dadurch gerechtfertigt, daß man mit Hilfe von Gl. (1a) eine Fülle von Ergebnissen erhält, die auf anderem Wege kaum zu erhalten sein werden. Auf einige Probleme, bei denen die Berücksichtigung der diskontinuierlichen Struktur der Kristalle auf wesentlich andere Ergebnisse führt als die an die Kontinuumsmechanik angelehnte Rechenweise nach Gl. (1b), werden wir in Punkt 6 eingehen.

In Punkt 2 wird dargelegt werden, in welcher Weise das FRENKELSche Modell Erweiterungen der harmonischen Gitterschwingungen enthält, die wir als oszillatorische Eigenbewegungen bezeichnen. Daran anschließend diskutieren wir den Begriff der Eigenbewegungen in einem Gitter und deren Wechselwirkungen. Von den zu diesen Eigenbewegungen gehörenden Überlagerungs- und Schwebungsformen besprechen wir in Punkt 4 die zu den oszillatorischen Eigenbewegungen gehörenden Wellengruppen und in Punkt 5 deren Wechselwirkung mit Versetzungen. Auf weitere Überlagerungsformen von Eigenbewegungen, die vor allem bei der dynamischen Behandlung der Versetzungswechselwirkung und Versetzungsentstehung eine Rolle spielen, werden wir in Teil IV eingehen.

Das mathematische Hilfsmittel für die Behandlung der eben skizzierten Probleme ist die sog. BÄCKLUND-Transformation, die es erlaubt, eine unendlich große Mannigfaltigkeit von physikalisch interessanten Lösungen aus wenigen Grundlösungen abzuleiten. Wir werden sie in Punkt 3 besprechen.

2. Oszillatorische und translatorische Eigenbewegungen.

a) *Oszillatorische Eigenbewegungen.* In II, Punkt 1 war gezeigt worden, daß die statischen Lösungen $u = u_0(x)$ der Gl. (1b) für verschiedene Werte des Moduls k der dort eingeführten elliptischen Funktionen Folgen

¹ \hbar hat einen Zahlenwert von der Größenordnung 1. Der genaue Wert hängt von der Interpretation des vorliegenden Modells ab.

gleichnamiger Versetzungen darstellen, und daß man aus diesen statischen Lösungen durch eine LORENTZ-Transformation die mit Unterschallgeschwindigkeit $v < 1$ gleichförmig bewegten Zustände

$$u = u_0 \left(\frac{x - v y}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (3)$$

gewinnen kann¹. Wir glauben jedoch, daß von diesen Lösungen mit $0 < v < 1$ aus energetischen Gründen nur die schon von FRENKEL und KONTOROVA² angegebene und untersuchte gleichförmig bewegte Einzelversetzung ($k=1$) auf physikalische Probleme angewendet werden kann.

Eine zweite Schar von Lösungen, die mit Überschallgeschwindigkeit $v > 1$ bewegte Zustände beschreibt, bekommt man in der Form

$$u = u_0 \left(\frac{v y - x}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) + \pi. \quad (4)$$

Den Übergang von Gl. (3) zu Gl. (4) nennen wir π -Transformation. Er ist mit einer kleinen Modifikation auch für die von FRANK und VAN DER MERWE³ im statischen Fall (unter anderem in Verbindung mit dichtesten Kugelpackungen) betrachteten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin u + A \sin 2u \quad (5)$$

möglich. Ist nämlich

$$u = u_0 \left(\frac{x - v y}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (6a)$$

eine stationäre Lösung von Gl. (5), so ist

$$u = u_0 \left(\frac{v y - x}{\sqrt{v^2 - 1}}; -A \right) + \pi \quad (6b)$$

die π -Transformierte von (6a). Da Gl. (5) für einen gewissen Bereich von A dieselben Typen von stationären Lösungen wie Gl. (1b) hat⁴, so gelten die allgemeinen Überlegungen des vorliegenden Abschnitts auch für diese Gleichung.

Von der Lösungsschar (4) dürfte vor allem

$$u = 2 \operatorname{arc} \sin \dot{k} \operatorname{sn} \left(\frac{v y - x}{\sqrt{v^2 - 1}}, \dot{k} \right) \quad 0 < \dot{k} < 1 \quad (7)$$

¹ Siehe auch FRANK, F. C., u. J. H. VAN DER MERWE: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **201**, 261 (1950).

² FRENKEL, J., u. T. KONTOROVA: J. Physics. USSR, **1**, 137 (1939).

³ FRANK, F. C., u. J. H. VAN DER MERWE: Proc. Roy. Soc. Lond., A **200**, 125 (1949).

⁴ Auf die explizite Form dieser Lösungen wird in anderem Zusammenhang eingegangen werden.

physikalische Bedeutung besitzen. Diese Lösungen gehen nämlich für $\dot{k} \ll 1$ in sinusförmige laufende Wellen

$$u = 2\dot{k} \sin\left(\frac{v y - x}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \quad (7a)$$

über und stellen somit deren Erweiterungen für endliche Amplituden dar. Mit den Abkürzungen

$$\sin \alpha_0 = \dot{k} \quad (8a)$$

für den Modul, sowie

$$\mathbf{K}(\dot{k}) = \int_0^{\pi/2} (1 - \dot{k}^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (8b)$$

und

$$\mathbf{E}(\dot{k}) = \int_0^{\pi/2} (1 - \dot{k}^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (8c)$$

für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung ist die Amplitude der durch Gl. (7)¹ dargestellten Welle

$$A_0 = 2\alpha_0 < \pi, \quad (9)$$

ihre Schwingungsdauer

$$T_0 = 4 \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} \mathbf{K}(\dot{k}) \geq 2\pi \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} \quad (10)$$

und ihre Wellenlänge

$$\lambda_0 = 4 \sqrt{v^2 - 1} \mathbf{K}(\dot{k}). \quad (11)$$

Natürlich haben nicht beliebig kleine Wellenlängen einen physikalischen Sinn, sondern nur solche, die nicht kleiner als der doppelte Atomabstand sind, so daß

$$\lambda_0 \geq \frac{4\pi a}{L_0}, \quad (12)$$

$$v^2 \geq 1 + \left(\frac{\pi a}{4L_0 \mathbf{K}(\dot{k})}\right)^2 \quad (13)$$

ist. Die Energiedichte, d.h. die Energie innerhalb einer Wellenlänge geteilt durch λ_0 , ist

$$H = \frac{4}{v^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{E}(\dot{k})}{\mathbf{K}(\dot{k})} - 1\right) + 2\dot{k}^2 \frac{v^2 + 1}{v^2 - 1}. \quad (14)$$

Wir wenden uns nunmehr der physikalischen Interpretation der durch Gl. (7) gegebenen Wellen zu. Von ihr hängt letzten Endes die Bewertung aller Resultate dieser Untersuchungen über die Wechselwirkung von Schallwellen und Versetzungen im Rahmen des FRENKEL'Schen Modells ab.

¹ Die folgenden Angaben sind alle in normierten Koordinaten [s. I, Punkt 2 und II, Gl. (22)] gemacht.

Eliminiert man aus den Gln. (10) und (11) die Geschwindigkeit v , so erhält man die für die Dispersion maßgebende Beziehung zwischen normierter Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T_0$ und normierter Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda_0$. Sie enthält noch als Parameter die Amplitude $2\alpha_0$ der Wellen. Bildet man aber auf Grund der Gleichung $d\omega/dk = V$ die Gruppengeschwindigkeit V , ohne zunächst auf die Frage der Realisierbarkeit von Wellengruppen einzugehen, so ergibt sich das einfache Resultat

$$v \cdot V = 1. \quad (15)$$

Es legt die Vermutung nahe, daß sich trotz der Nichtlinearität der Gl. (1b) aus den laufenden Wellen (7) Wellenpakete aufbauen lassen. Wir werden in Punkt 4 solche Wellengruppen explizit angeben, deren Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten der Gl. (15) genügen.

Auf Grund der Resultate der BORNschen Gittertheorie sollte man erwarten, daß sich für kleine Amplituden und große Wellenlängen eine endliche Phasengeschwindigkeit, nämlich die Schallgeschwindigkeit für Scherungswellen in der betreffenden

Gitterrichtung, ergibt. Dies ist nicht der Fall; wenn die Wellenlänge λ_0 unendlich groß wird, so wird nach (11) auch die Phasengeschwindigkeit v unendlich groß. Im Sinne von BORN erhält man vielmehr nach (10) für $v = \infty$ eine optische Grenzschwingung, bei der die eine Gitterreihe als Ganzes gegen die andere mit der Grenzfrequenz

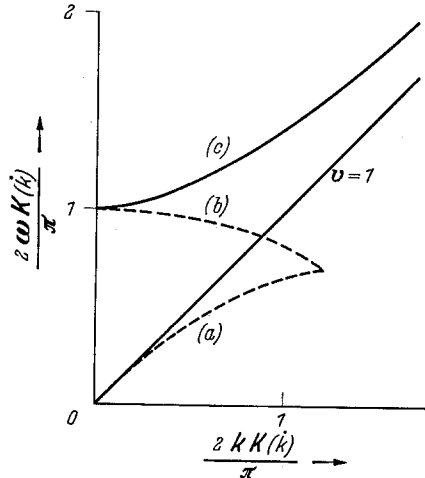


Fig. 1. Frequenz-Wellenzahl-Diagramm. Gestrichelt: (a) akustischer, (b) optischer Zweig der BORNschen Gittertheorie (schematisch). Ausgezogen: (c) $\omega = \omega(k)$ gemäß Gl. (7).

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2K(k)} \quad (16)$$

schwingt¹. Wenn man aber zu endlichen Wellenlängen übergeht, so bekommt man ein von der BORNschen Gittertheorie abweichendes Resultat insofern, als die Frequenz mit abnehmender Wellenlänge nicht ab-, sondern zunimmt (Fig. 1). Die Wellen nach Gl. (7) verhalten sich also für endliche Wellenlängen wesentlich anders als man vom Standpunkt der Gittertheorie aus erwarten würde. Andererseits aber gibt es bei

¹ Der akustischen Grenzschwingung entspricht die Schwingung innerhalb einer isolierten Gitterreihe mit unendlich großer Wellenlänge, die tatsächlich [s. I, Gl. (6)] die richtige Geschwindigkeit aufweist.

allotropen Umwandlungen in festen Körpern empirische Tatsachen (s. unten), die auf die Möglichkeit der Schwingung ganzer Netzebenen gegeneinander hinweisen und die Existenz von Oszillationen des oben beschriebenen Typus wahrscheinlich machen.

Eine Klärung erfährt dieser Sachverhalt durch die Betrachtung entsprechender Wellentypen im PEIERLSSchen Modell¹. Es zeigt sich dabei, daß die Wellen Gl. (7) durch Interferenz elastischer Wellen zustande kommen, die sich schräg zur Gleitebene ausbreiten.

Obwohl die Wellen vom Typus der Gl. (7) aus unendlich vielen harmonischen ebenen Wellen zusammengesetzt sind, haben sie doch gewisse einfache Eigenschaften, die an diejenigen der Eigenschwingungen (unter denen man allerdings meist stehende Wellen versteht) erinnern. Sie sind z. B. stationär, d. h. ihre Bewegungsform ändert sich im Laufe der Zeit nicht, und sie lassen sich (in einem unendlich ausgedehnten Gitter und im Rahmen der in Punkt 1 dargelegten Näherung) ohne Energiezufuhr dauernd aufrechterhalten. Wir nennen daher diese Bewegungsformen *Eigenbewegungen*, und zwar, wegen ihres Wellencharakters und zum Unterschied von den sogleich zu betrachtenden translatorischen Eigenbewegungen, *oszillatorische Eigenbewegungen*.

Zwei Eigenbewegungen überlagern sich nicht wie Eigenschwingungen unabhängig voneinander, sondern sie beeinflussen sich gegenseitig. Jedoch gelten gerade für die physikalisch interessantesten Fälle einfache Superpositionsgesetze, die den Charakter der einzelnen Eigenbewegungen im wesentlichen bewahren. Wir werden im späteren Teil dieser Arbeit mehrfach solche Schwebungs- und Interferenzbewegungen betrachten.

b) *Translatorische Eigenbewegungen*. Da in der hier verwendeten Näherung keine Wanderungsenergieschwelle für eine Versetzung auftritt, ist die translatorische Bewegung einer Versetzung ohne Änderung ihrer Gestalt und ohne eine dauernde Energiezufuhr möglich. Die Bewegung einer Versetzung wird zwar durch die Wechselwirkung mit anderen Versetzungen oder mit Schwingungen beeinflußt, doch bleibt dabei der Versetzungscharakter erhalten. Versetzungen haben also alle diejenigen Eigenschaften, die wir am Ende des vorhergehenden Abschnitts in Verbindung mit dem Begriff der Eigenschwingung genannt haben. Da das Wandern von Versetzungen, das stets mit Unterschallgeschwindigkeit erfolgt, mit dem Transport von Materie verbunden ist, bezeichnen wir wandernde Versetzungen als *translatorische Eigenbewegungen*.

Der Begriff der Eigenbewegungen ist keineswegs neu. Er wurde von U. DEHLINGER und A. KOCHENDÖRFER² in Zusammenhang mit dem Wandern der Versetzungen einerseits und mit der Ausbreitung von

¹ SEEGER, A.: Z. Naturforsch. (demnächst).

² DEHLINGER, U., u. A. KOCHENDÖRFER: Z. Physik **116**, 576 (1940).

thermisch angeregten Kettenreaktionen bei allotropen Umwandlungen andererseits geprägt und mit der FRENKEL-KONTOROVASchen Lösung¹ in Verbindung gebracht. Diese Autoren verstanden also unter Eigenbewegungen im wesentlichen die jetzt als translatorische Eigenbewegungen bezeichneten Vorgänge. Sie suchten jedoch im Hinblick auf Experimente von FÖRSTER und SCHEIL² auch nach Zwischenformen zwischen den kleinen Schwingungen der Atome um ihre Gleichgewichtslage und den aperiodischen, sich durch das ganze Gitter hinziehenden Wanderungsbewegungen der Versetzungen. Die genannten Experimente fordern die Möglichkeit von Schwingungen einzelner Gittergeraden und Netzebenen gegen ihre Nachbarn. Man darf wohl mit Recht annehmen, daß die im Abschnitt a beschriebenen Bewegungsformen (bzw. das ihnen zugrunde liegende Zusammenwirken von ebenen Wellen) gerade dieser Möglichkeit entsprechen.

c) *Zusammenhang zwischen den translatorischen und oszillatorischen Eigenbewegungen.* Wir gehen nun noch kurz auf den Zusammenhang zwischen den mit Überschallphasengeschwindigkeit sich fortpflanzenden oszillatorischen Eigenbewegungen und den mit Unterschallgeschwindigkeit fortschreitenden translatorischen Eigenbewegungen ein. Dieser Zusammenhang ist keineswegs so, daß die beiden Bewegungsformen für $v=1$ ineinander übergehen würden, was allein schon daraus zu ersehen ist, daß für $v=1$ die Energie der Versetzungen ebenso wie die Energiedichte der oszillatorischen Bewegungen unendlich groß wird und daß die Phasengeschwindigkeit $v=1$ für letztere nach Gl. (13) gar keinen Sinn hat. Dagegen wird durch die Beziehung (15) nahegelegt, daß die beiden Bewegungsformen im Verhältnis von ebener Welle und Wellengruppe zueinander stehen. Daß dieser Gedanke richtig ist, und daß man ein Paar ungleichnamiger Versetzungen sowohl als Schwebung zwischen zwei Versetzungen wie als Grenzfall von Wellengruppen, die durch Interferenz von Gitterschwingungen entstanden sind, auffassen kann, werden wir im Teil IV zeigen. Wir werden dort einen qualitativen Einblick in die Entstehung von Versetzungspaaren durch das Zusammenwirken von thermischen Schwingungen und äußeren Schubspannungen erhalten.

3. Die BÄCKLUND-Transformation.

Wir haben in II, Punkt 2, ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man alle diejenigen zeitabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (1b) finden kann, die sich als kleine Störungen einer gleichförmig bewegten Einzelversetzung auffassen lassen. Von der eben genannten Einschränkung frei ist das nunmehr zu besprechende, auf der sog. BÄCKLUND-Transformation beruhende Verfahren, das ebenfalls physi-

¹ FRENKEL, J., u. T. KONTOROVA: J. Physics. USSR. 1, 137 (1939).

² FÖRSTER, F., u. E. SCHEIL: Z. f. Metallkunde 32, 165 (1940)

kalisch bedeutsame dynamische Lösungen liefert. Diese Methode gestattet es jedoch in ihrer gegenwärtigen Form nicht (im Gegensatz zu dem Verfahren von II), beliebig vorgegebene Anfangszustände oder äußere Kräfte zu behandeln.

a) *Gl. (1b) in der Differentialgeometrie*¹. Das Quadrat des Linienelements $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ einer Fläche mit festem GAUSSSchen Krümmungsmaß $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2 = -1$ kann, wenn die Parameterlinien $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ Krümmungslinien der Fläche sind, auf die Form

$$ds^2 = du^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} + dv^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \quad (17)$$

gebracht werden. Hierbei ist ω der Winkel zwischen den Asymptotenlinien der Fläche, die im vorliegenden Fall durch die Linien $u \pm v = \text{const}$ gegeben sind. Führt man diese Linien durch $u = p - q$, $v = p + q$ als Parameterlinien $p = \text{const}$ und $q = \text{const}$ ein, so erhält man an Stelle von (17) die Gleichung

$$ds^2 = dp^2 + 2 dp dq \cos \omega + dq^2. \quad (18)$$

Nach der GAUSSSchen Grundformel hat dabei ω der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \sin \omega \quad (19)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial p \partial q} = \sin \omega \quad (20)$$

zu genügen. Durch Integration der Gl. (19), die mit der Differentialgleichung (1b) identisch ist, erhält man mit Hilfe von Gl. (18) die Linienelemente aller Flächen mit festem negativem Krümmungsmaß. Die Bemühungen von seiten der Differentialgeometrie um die Integration der Gl. (20) haben zwar nicht zur vollständigen Lösung dieser Gleichung, aber doch zu einer Reihe praktisch verwertbarer Ergebnisse geführt. Über einen Teil derselben berichten wir in Abschnitt b ohne Angabe der Beweise.

b) *Eigenschaften der BÄCKLUND-Transformation*². 1. Die wichtigste Eigenschaft der BÄCKLUND-Transformation ist, daß man zu einer

¹ In diesem Abschnitt verwenden wir unabhängig von der Bedeutung der Buchstaben in I und II und den übrigen Teilen dieser Arbeit die in der Differentialgeometrie üblichen Bezeichnungen. Siehe BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I. Berlin: Springer 1945.

² Ausführliche Darstellungen bei L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, 3. Aufl., Bd. I, Pisa 1920, bzw. Vorlesungen über Differentialgeometrie, Teubner-Verlag Leipzig und bei G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III. Teil, Paris 1894; kürzere Überblicke über Teilergebnisse enthalten Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. III/3, Leipzig 1902 bis 1927 und L. P. EISENHART, *A treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York 1909, S. 280—289.

gegebenen Lösung $\omega = \omega_1$ der Gl. (20) eine zweite Lösung $\omega = \omega_2$ durch die Integration des Systems zweier partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)}{\partial p} = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \quad (21 a)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\partial q} = \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad (21 b)$$

finden kann. Wie man durch Differenzieren nachweist, ist gerade $\partial^2 \omega_2 / \partial p \partial q = \sin \omega_2$ die Integrabilitätsbedingung des Systems (21)¹. Man nennt ω_2 die BÄCKLUND-Transformierte von ω_1 und bezeichnet sie mit

$$\omega_2 = B_\sigma \omega_1. \quad (22)$$

Das Gleichungssystem (21) läßt sich auch als eine totale Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_2}{2} = & \left[\frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) + \frac{\partial(\omega_1/2)}{\partial p} \right] dp + \\ & + \left[\frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) - \frac{\partial(\omega_1/2)}{\partial q} \right] dq \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

schreiben, welche durch die Substitution $\operatorname{tg}(\omega_2/4) = w$ in die folgende totale Differentialgleichung vom RICCATISCHEN Typ übergeht:

$$dw = (aw^2 + bw + c) dp + (a'w^2 + b'w + c') dq \quad (24)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a \Big\} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial p} \mp \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{\omega_1}{2} \right] \\ c \Big\} & \\ a' \Big\} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial q} \pm \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{\omega_1}{2} \right] \\ c' \Big\} & \\ b \Big\} &= \frac{1 \pm \sin \sigma}{\cos \sigma} \cos \frac{\omega_1}{2}. \\ b' \Big\} & \end{aligned} \right.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist notwendig und hinreichend dafür², daß die allgemeine Lösung von (23) die Form

$$\Phi(p, q, \omega_2) = C \quad (25)$$

hat. Die BÄCKLUND-Transformierten einer gegebenen Funktion $\omega = \omega_1$ bilden also eine zweiparametrische Funktionenschar, welche die Integrationskonstante C und den Transformationsparameter σ als frei wählbare Konstanten enthält. Da Gl. (23) bzw. (24) nicht linear ist, sind unter

¹ KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 2. Aufl., Bd. II, S. 60. Leipzig 1948.

² MADELUNG: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 4. Aufl., S. 289. 1950.

Umständen singuläre Lösungen vorhanden, die sich nicht aus (25) durch spezielle Wahl von C zu ergeben brauchen.

2. Man kann die BÄCKLUND-Transformation B_σ aus einer BIANCHISCHEN Transformation B_0 und zwei LIESCHEN Transformationen zusammensetzen.

Unter einer BIANCHI-Transformation B_0^\dagger versteht man die BÄCKLUND-Transformation mit $\sigma=0$. Die LIESCHE Transformation haben wir im Zusammenhang mit Gl. (2) als LORENTZ-Transformation bezeichnet. Ist

$$\omega_I = \Psi(p, q) \quad (26a)$$

eine Lösung der Gl. (20), so ist

$$\omega_{II} = \Psi(\varrho p, q/\varrho) \quad (26b)$$

mit einer beliebigen Konstanten ϱ ebenfalls eine Lösung. Wenn $\varrho = (1 + \sin \sigma)/\cos \sigma$ gesetzt wird, so bezeichnen wir ω_{II} als LIESCHE TRANSFORMIERTE L_σ von ω_I :

$$\omega_{II} = L_\sigma \omega_I; \quad \omega_I = L_\sigma^{-1} \omega_{II}. \quad (27)$$

Der obige Satz lautet in dieser Bezeichnungsweise

$$B_\sigma = L_\sigma B_0 L_\sigma^{-1}. \quad (28)$$

3. Der BIANCHISCHE Vertauschbarkeitssatz besagt, daß die Funktion, die durch wiederholte Anwendung von verschiedenen BÄCKLUND-Transformationen $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}, \dots$ aus einer bestimmten Ausgangsfunktion ω_0 entsteht, unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die BÄCKLUND-Transformationen ausgeübt werden.

Wenn $\omega_1 = B_{\sigma_1} \omega_0$, $\omega_2 = B_{\sigma_2} \omega_0$, $\omega_3 = B_{\sigma_3} \omega_1$ ist, so gilt auch $\omega_3 = B_{\sigma_1} \omega_2$ oder

$$B_{\sigma_2} B_{\sigma_1} = B_{\sigma_1} B_{\sigma_2}. \quad (29)$$

4. Hat man zwei BÄCKLUND-Transformierte ω_1 und ω_2 der Ausgangsfunktion ω_0 gefunden, so kann man alle weiteren durch mehrfache Anwendung der BÄCKLUND-Transformation entstehenden Funktionen durch Eliminationsprozesse (und eventuell Differentiationen — siehe 5.) finden. Die Funktion ω_3 ist nämlich mit $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\omega_3 - \omega_0}{4} \right) = \frac{\cos [(\sigma_1 + \sigma_2)/2]}{\sin [(\sigma_1 - \sigma_2)/2]} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \right) \quad (30)$$

verknüpft.

5. Eine besondere Betrachtung benötigt der Fall, daß in Gl. (30) $\sigma_1 = \sigma_2$ ist. Wenn die Integrationskonstanten C_1 und C_2 in ω_1 und ω_2 verschieden sind, so ergibt sich

$$\omega_3 = \omega_0 \pm 2m\pi, \quad (31a)$$

† DARBOUX: l. c. Bd. III, S. 422.

wo m eine ungerade, Zahl ist. Ist dagegen gleichzeitig $\sigma_1 = \sigma_2$, und $C_1 = C_2$, so bekommt man aus (30) durch Grenzübergang

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\omega_3 - \omega_0}{4} \right) = \frac{1}{2} \cos \sigma_1 \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \omega_1}{\partial C} C' \right]_{\sigma = \sigma_1}, \quad (31 \text{ b})$$

wobei $C' = (\partial C / \partial \sigma)_{\sigma = \sigma_1}$ willkürlich gewählt werden kann.

c) *Anwendung der BÄCKLUND-Transformation.* Wir kehren in diesem Abschnitt wieder zu unserer alten Bezeichnungweise zurück und schreiben also u, x, y statt ω, v, u .

Elementare Funktionen.

Die einfachste Lösung der Differentialgleichung (1 b) ist $u = u_0 \equiv 0$. Als BÄCKLUND-Transformierte erhält man durch Quadraturen

$$u_1 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma \exp \left(\frac{x + (\sin \sigma) y}{\cos \sigma} \right) = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma \exp \left(\frac{x - v y}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (32)$$

also gleichförmig bewegte Einzelversetzungen. Durch Anwendung der Gl. (30) ergibt sich aus zwei Lösungen (32)

$$u_3 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\cos(\sigma_1 + \sigma_2)/2}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)/2} \frac{\gamma_1 \exp \varepsilon_1 - \gamma_2 \exp \varepsilon_2}{1 + \gamma_1 \gamma_2 \exp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right] \quad (33)$$

mit

$$\varepsilon_i = \frac{x + (\sin \sigma_i) y}{\cos \sigma_i} = \frac{x - v_i y}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (33 \text{ a})$$

Für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ und $\gamma_1 = \gamma_2$ bekommt man nach Gl. (31 b)

$$u_3 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\cos \sigma} \frac{y + x \sin \sigma + C'}{\mathfrak{Cof}([x + y \sin \sigma + C'] / \cos \sigma)} \right]. \quad (34)$$

Weitere einfache Grenzfälle sind¹

$$u_3 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\sin \sigma} \frac{\mathfrak{Sin}(y \operatorname{tg} \sigma)}{\mathfrak{Cof}(x / \cos \sigma)} \right] \quad (35)$$

mit

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1,$$

und

$$u_3 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\sin \sigma} \frac{\mathfrak{Cof}(y \operatorname{tg} \sigma)}{\mathfrak{Sin}(x / \cos \sigma)} \right] \quad (36)$$

mit

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = -1.$$

Auf die physikalische Bedeutung dieser Lösungen werden wir in Teil IV bei der Besprechung von Zusammenstößen von Versetzungen eingehen.

¹ Wir lassen in Zukunft solche Konstanten wie C' und C'' in Gl. (34), die nur die Nullpunkte der Raum- und Zeitskala bestimmen, im allgemeinen weg, ohne dies besonders zu erwähnen.

Wählt man $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ und σ_1 konjugiert komplex zu σ_2 , also $\sigma_1 = \alpha + i\beta$, $\sigma_2 = \alpha - i\beta$, so erhält man ebenfalls reelle Lösungen, die wir in Punkt 4 näher untersuchen werden, nämlich

$$u_3 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} h \frac{\sin(Cx + Dy)}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{f}(Ax + By)} \quad (37)$$

mit

$$h = \frac{A}{D} = \frac{B}{C} = \frac{\cos \alpha}{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \beta}, \quad (37a)$$

$$A = \frac{\cos \alpha \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{f} \beta}{\cos^2 \alpha + \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 \beta}, \quad B = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 \beta}. \quad (37b, c)$$

Elliptische Funktionen.

Wir stellen die BÄCKLUND-Transformierten B_σ aller in Teil I und II besprochenen strengen Lösungen der Differentialgleichung (1b) auf. Wegen der Gültigkeit der Gln. (28) und (29) genügt es, von der allgemeinen statischen Lösung II, (3)

$$u_0 = \pi + 2 \operatorname{am}(x/k + C_1, k) \quad (38)$$

auszugehen und deren BÄCKLUND-Transformierte $u_1 = B_\sigma u_0$ aufzufinden.

Nach Einführung von x und y als Variable an Stelle von β und q wird Gl. (24):

$$2 dw = \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{tg} \sigma \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right) w^2 - \frac{2w}{\cos \sigma} \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k} \right) + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right) \Big\} dx + \\ & + \left\{ \left[\frac{1}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k} \right) - \frac{1}{\cos \sigma} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right) \right] w^2 - 2w \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k} \right) + \frac{1}{\cos \sigma} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right) \right\} dy. \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Mit einem der üblichen Verfahren¹ zur Integration eines solchen PFAFF-schen Differentialausdrucks erhält man als Lösung

$$u_1 = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k} \right) + \Delta \operatorname{tg} \left[\frac{\Delta}{2} (y + A(x)) \right]}{\frac{1}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k} \right) - \frac{1}{\cos \sigma} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right)}, \quad (40)$$

wobei

$$\Delta^2 = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\cos^2 \sigma}, \quad (40a)$$

$$A(x) = \operatorname{tg} \sigma \int \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right)}{\frac{1}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k} \right) - \frac{1}{\cos \sigma} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} \right)} dx \quad (40b)$$

¹ MADELUNG: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 4. Aufl., S. 240. Berlin 1950.

ist. $A(x)$ läßt sich mit Hilfe des JACOBISCHEN elliptischen Integrals 3. Gattung¹

$$\phi n(v, a, k) = \int_0^v \frac{k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a \cdot \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \cdot \operatorname{sn}^2 u} du \quad (41 a)$$

und mit dem durch

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \sigma}{A} = -k^2 \operatorname{sn}^2 a, \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{sn}^2 a = \frac{\sin^2 \sigma}{k^2 - \cos^2 \sigma} \quad (41 b)$$

definierten Parameter a in der Form

$$A(x) = \frac{1}{A} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{A} \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k} \right) \right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\sin \sigma} \frac{\operatorname{tg}^2 \sigma}{A^2} \left(x - \frac{\operatorname{dn} a}{k \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{cn} a} \phi n \left(\frac{x}{k}, a, k \right) \right) + \operatorname{Const} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

schreiben. Für die praktische Auswertung ist es bequem, das elliptische Integral 3. Gattung durch JACOBISCHE ϑ -Funktionen zu ersetzen, doch werden wir hierauf erst in Verbindung mit physikalischen Anwendungen eingehen.

4. Wellengruppen.

Die Lösungen (37) mit den Parametern A bis D nach (37a—c) stellen für gewisse Wertebereiche dieser Größen, von denen jedoch nur zwei unabhängig sind, Wellengruppen dar (Fig. 3 a und b). Ihre Gruppengeschwindigkeit ist durch

$$V = -\frac{B}{A} = -\frac{\sin \alpha}{\mathfrak{Cof} \beta}, \quad (43 a)$$

ihre Phasengeschwindigkeit durch

$$v = -\frac{D}{C} = -\frac{\mathfrak{Cof} \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{V} \quad (43 b)$$

gegeben. Die Vermutung von Punkt 2 über die Existenz und die Gruppengeschwindigkeit der zu den Wellen (6) gehörigen Wellenpakete ist damit bestätigt.

Die Gesamtenergie eines Zustandes (37) errechnet sich nach der in I und II angegebenen Formel

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \cos u + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \quad (44)$$

¹ Wir folgen hier (wegen des einfacheren Zusammenhanges mit den ϑ -Funktionen) der von GRÖBNER und HOFREITER, Integraltafel, I. Teil, S. 163, Wien 1949 gegebenen Definition. WHITTAKER-WATSON, A course of modern analysis, 4. Aufl., S. 522, Cambridge 1927, bezeichnen $\phi n(v, a, k)$ mit $\Pi(v, a)$.

mit den Abkürzungen $\mathbf{M} = Ax + By$, $\mathbf{N} = Cx + Dy$ zu

$$\left. \begin{aligned}
 H &= 8h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\mathfrak{C}0]^2 \mathbf{M} \sin^2 \mathbf{N} + \mathfrak{C}0]^2 \mathbf{M} \cos^2 \mathbf{N} (C^2 + D^2) - \\
 &\quad - \mathfrak{S}in^2 \mathbf{M} \sin^2 \mathbf{N} (A^2 + B^2) - 2 \mathfrak{S}in \mathbf{M} \mathfrak{C}0] \mathbf{M} \sin \mathbf{N} \cos \mathbf{N} \times \\
 &\quad \times (AC + BD) / [\mathfrak{C}0]^2 \mathbf{M} + h^2 \sin^2 \mathbf{N}]^2 \\
 &= 8h^2 \frac{(A/h^2) \mathfrak{S}in \mathbf{M} \mathfrak{C}0] \mathbf{M} + C \sin \mathbf{N} \cos \mathbf{N}}{\mathfrak{C}0]^2 \mathbf{M} + h^2 \sin^2 \mathbf{N}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 16A.
 \end{aligned} \right\} (45)$$

Die Normierung von H ist so, daß eine ruhende Einzelversetzung den Wert $H=8$ hat.

Kennzeichnen wir die Wellengruppen durch die beiden anschaulichen Parameter H (Gesamtenergie) und V (Gruppengeschwindigkeit), so erhalten wir

$$B = -A \cdot V = -\frac{H}{16} V, \quad (46)$$

$$C = -D \cdot V = -\sqrt{\frac{1}{1-V^2} - \left(\frac{H}{16}\right)^2} \cdot V \quad (46a)$$

und

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\frac{H}{16} \sqrt{1-V^2} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{1-V^2} - \left(\frac{H}{16}\right)^2} [Vx - y] \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{H}{16}\right)^2 (1-V^2)} \mathfrak{C}0] \frac{H}{16} (x - Vy)} \right\}. \quad (47)$$

Die Wellenlänge ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{2\pi}{C}, \quad (48)$$

die Frequenz durch

$$\nu = \frac{D}{2\pi}. \quad (48a)$$

Die Amplitudenkonstante

$$h = \frac{\frac{H}{16} \sqrt{1-V^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{H}{16}\right)^2 (1-V^2)}} \quad (49)$$

und die maximale Amplitude

$$u_{\max} = 4 \operatorname{arc} \sin \frac{H}{16} \sqrt{1-V^2} \quad (49a)$$

hängen nur von

$$H_0 = H \sqrt{1-V^2} \quad (50)$$

ab. Betrachtet man also alle Wellengruppen mit gleichem h als eine Familie, deren einzelne Mitglieder sich nur durch ihre Gruppengeschwin-

digkeit V unterscheiden, so ist ihre Ruheenergie H_0 mit H durch die relativistische Formel

$$H = \frac{H_0}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (51)$$

verknüpft. Man kann also eine Wellengruppe durch je zwei der drei Parameter H , V und h (bzw. H_0) kennzeichnen. In Fig. 2 sind einige der Linien H , V , $h = \text{const}$ in einer α - β -Ebene eingetragen.

Für nicht zu große H kann man eine Wellengruppenlänge L^* durch

$$L^* = \frac{2\pi}{A} = 2\pi \frac{16}{H} \quad (51)$$

definieren. Im Abstand $L^*/2$ vom Wellengruppenmittelpunkt (gegeben durch $x = Vy$) sinkt dann die Amplitude auf $2 \cdot h \cdot e^{-\pi} = 0,09 \cdot h$ ab. Die Zahl der Wellenlängen pro Wellengruppenlänge ist

$$\mu = \frac{L^*}{\lambda} = \frac{V}{h}. \quad (52)$$

Typische Wellengruppen erhält man, wenn $L^* \gtrsim \lambda$ ist. Zwei Beispiele hierfür sind in Fig. 3 a und b dargestellt. Solche Wellengruppen können vermutlich als Modell für die thermische Bewegungen in Kristallen dienen; bei der Behandlung der Wechselwirkung von Versetzungen und Wellengruppen in Punkt 5 ist vor allem an sie gedacht, obwohl die Resultate ganz allgemein für alle Lösungen (47) gelten.

Mit den übrigen Lösungen, die enge Beziehungen zu zwei ungleichnamigen Versetzungen haben, werden wir uns ausführlich in Teil IV befassen. Wir wollen aber schon hier betonen, daß zwischen den Lösungen mit kleinem μ und denjenigen mit großem μ kein grundsätzlicher Unterschied besteht, sondern daß ein allmählicher Übergang zwischen ihnen stattfindet.

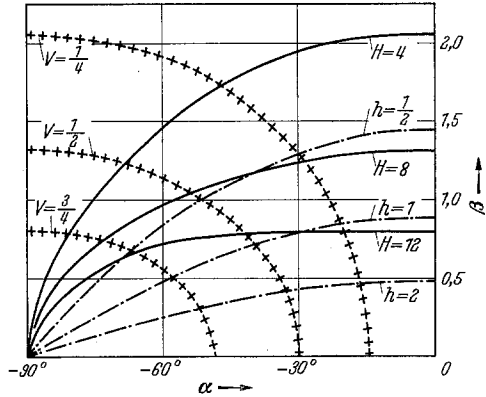


Fig. 2. Einige Linien konstanter Gesamtenergie H (ausgezogen), Gruppengeschwindigkeit V (mit Kreuzen bezeichnet), Amplitudenkonstante h (strichpunktiert) in der α , β -Ebene.

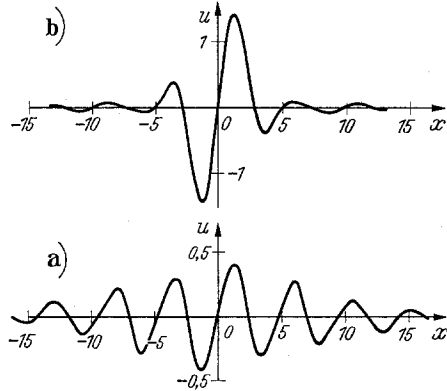


Fig. 3 a u. b. a Wellengruppe mit $V=0,8$, $H=10,68$.
b Wellengruppe mit $V=0,8$, $H=2,67$.

5. Versetzungen und Wellengruppen.

Allgemeinere Lösungen als die bisher betrachteten erhält man, wenn man Gl. (30) wiederholt auf eine Ausgangslösung u_0 anwendet. Im Falle $u_0 = 0$ lautet die allgemeine Beziehung für die Überlagerung dreier Funktionen $u_i = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_i$:

$$u = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_1 + \left. \begin{aligned} &+ 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\varkappa_{23} \operatorname{tg} \{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\varkappa_{12} \operatorname{tg} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_2]) - \\ &- \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\varkappa_{13} \operatorname{tg} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_3]) \}], \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

wobei gesetzt ist

$$\varepsilon_i = \frac{x + y \sin \sigma_i}{\cos \sigma_i}, \quad \varkappa_{ij} = \frac{\cos [(\sigma_i + \sigma_j)/2]}{\sin [(\sigma_i - \sigma_j)/2]} = -\varkappa_{ji}. \quad (53 \text{ a, b})$$

Wählt man $\sigma_1 = \sigma$ reell und σ_2 und σ_3 konjugiert komplex zueinander:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \alpha + i\beta, \quad \sigma_3 = \alpha - i\beta, \quad (54 \text{ a-c})$$

so wird mit den Abkürzungen von Punkt 3:

$$u = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \varepsilon_1 + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} h \times \left. \begin{aligned} &\times \frac{-F_3 \mathfrak{S} \operatorname{in} (Ax + By) + F_3 \mathfrak{S} \operatorname{in} \varepsilon_1 \cos (Cx + Dy) - F_4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} \varepsilon_1 \sin (Cx + Dy)}{F_1 \{ \mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} (\varepsilon_1 + Ax + By) + \cos (Cx + Dy) \} + F_3 \{ \mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} (\varepsilon_1 - Ax - By) - \cos (Cx + Dy) \} } \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} \beta - \sin \sigma \sin \alpha \mp \cos \sigma \cos \alpha) \\ F_3 &= \cos \sigma \mathfrak{S} \operatorname{in} \beta, \quad F_4 = \sin \sigma \mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} \beta - \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (55 \text{ a-c})$$

Diese Funktion beschreibt, wie man an Hand der bisherigen Beispiele erkennt, eine Versetzung mit der Geschwindigkeit¹ $w = -\sin \sigma$ und eine Wellengruppe mit der Gruppengeschwindigkeit $V = -(\sin \alpha) / \mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} \beta \dagger$. Nehmen wir an, daß beide sich in positiver x -Richtung bewegen ($\sin \sigma$ und $\sin \alpha$ sind dann beide negativ) und daß w kleiner ist als V , so befindet sich bei großen negativen Zeiten y die Wellengruppe weit entfernt von der Versetzung (Fig. 4a), nähert sich ihr mit wachsendem y immer mehr, durchdringt sie zur Zeit $y=0$ (Fig. 4b) und entfernt sich mit wachsendem positiven y wieder zunehmend von ihr (Fig. 4c). Näherungsweise gilt für große negative y

$$u = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \left(\varepsilon_1 + \ln \frac{F_1}{F_2} \right) - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} h \frac{\sin (\varkappa^* + Cx + Dy)}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \operatorname{f} (\delta^* + Ax + By)} \quad (56 \text{ a})$$

¹ Wir verwenden in diesem Abschnitt für die Versetzungsgeschwindigkeit den Buchstaben w , um eine Verwechslung mit der Phasengeschwindigkeit $v = 1/V$ der Wellengruppe zu vermeiden.

† Wendet man den Vertauschungssatz (30) noch öfters an, so erhält man allgemein für jedes weitere reelle σ_i eine weitere Versetzung und für jedes weitere Paar konjugiert komplexer σ_i eine weitere Wellengruppe.

und für große positive y

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\varepsilon_1 - \ln \frac{F_1}{F_2}\right) - 4 \operatorname{arctg} h \frac{\sin(-\varkappa^* + Cx + Dy)}{\mathfrak{Cof}(-\delta^* + Ax + By)}, \quad (56b)$$

wobei die Abkürzungen δ^* und \varkappa^* durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof} \delta^* = \frac{F_1 + F_2}{2\sqrt{F_1 F_2}}, \quad \mathfrak{Sin} \delta^* = -\frac{F_1 - F_2}{2\sqrt{F_1 F_2}}, \quad (56c, d)$$

$$\sin \varkappa^* = \frac{F_3}{2\sqrt{F_1 F_2}}, \quad \cos \varkappa^* = \frac{F_4}{2\sqrt{F_1 F_2}} \quad (56e, f)$$

definiert sind.

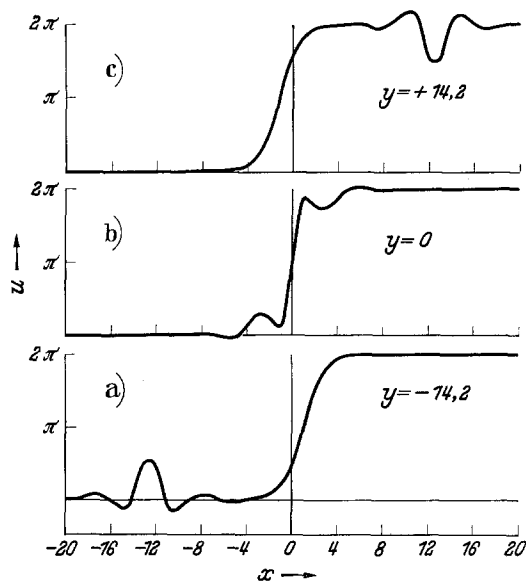


Fig. 4 a—c. Eine Wellengruppe mit $V=0,8$, $H=10,68$ durchdringt eine ruhende Versetzung.
a) Vor, b) während, c) nach der Durchdringung.

Man sieht aus diesen Gleichungen, daß beim Durchdringen von Wellengruppe und Versetzung weder die Energie noch die Geschwindigkeit beider geändert wird. Es tritt lediglich eine Verschiebung des Versetzungsmittelpunktes um

$$\delta_V = \cos \sigma \ln \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 = -2 \cos \sigma \ln \frac{\mathfrak{Cof} \beta - \sin \sigma \sin \alpha + \cos \sigma |\cos \alpha|}{\mathfrak{Cof} \beta - \sin \sigma \sin \alpha - \cos \sigma |\cos \alpha|} \quad (57a)$$

und des Schwerpunktes der Wellengruppe um

$$\delta_G = -\frac{1}{2A} \ln \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 \quad (57b)$$

auf. Außerdem wird die Phase der Wellen um

$$\varkappa = -2\varkappa^* = -2 \operatorname{arctg} \frac{F_3}{F_4} \quad (57c)$$

geändert.

In entsprechender Weise kann der Fall $V < w$ diskutiert werden. Das Ergebnis unterscheidet sich von dem bisherigen nur durch einen Vorzeichenwechsel in den Gln. (57a–c). Allgemein erfolgen die Verschiebungen δ_V und δ_C so, als ob sich Wellengruppe und Versetzung vor dem Durchdringen angezogen hätten.

An Stelle einer einzigen Wellengruppe legen wir nun eine bestimmte Zahl $N(V, H)$ von Wellengruppen pro Längeneinheit zugrunde, die sich mit der Geschwindigkeit V bewegen und die Energie H besitzen. Da wir jetzt eine nichtendende Folge von Wellengruppen betrachten, müssen wir neben der Größe w , die z.B. Versetzungslänge und Versetzungsenergie bestimmt, noch die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{w} = w + \Delta w \quad (58)$$

einführen, die den Mittelwert des Quotienten aus zurückgelegtem Weg der Versetzung und der dafür benötigten Zeit darstellt. Es ist

$$\Delta w = 4N(V, H) \cdot (\bar{w} - V) \sqrt{1-w^2} \cdot \mathfrak{A}r \mathfrak{T}g \frac{H}{16} \frac{\sqrt{1-w^2}}{1-wV}. \quad (59)$$

Wenn man die vorstehenden Betrachtungen als ein Modell für die Wechselwirkung von Versetzungen und Wärmebewegungen in einem Kristall verwenden will, so wird man annehmen dürfen, daß sich gleich viele Wellengruppen einer bestimmten Art nach links und nach rechts bewegen, d.h. daß N außer von H nur von $|V|$ abhängt. Außerdem wird man Wellengruppen verschiedener Art zu betrachten haben. Faßt man $N(|V|, H)$ als Spektrum auf und bezeichnet mit S die Summation (bzw. Integration) über alle im Kristall auftretenden H - und $|V|$ -Werte der Wellengruppen, so ergibt sich für die Geschwindigkeitsänderung der Versetzungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta w = S 4N(|V|, H) \sqrt{1-w^2} \times \\ \times \left\{ \bar{w} \mathfrak{A}r \mathfrak{T}g \frac{(H/8) \sqrt{1-w^2}}{1-w^2 V^2 - (H/16)^2 (1-w^2)} - V \mathfrak{A}r \mathfrak{T}g \frac{(H/8) \cdot w V \sqrt{1-w^2}}{1-w^2 V^2 + (H/16)^2 (1-w^2)} \right\} \end{aligned} \right\} (60)$$

Zur qualitativen Diskussion dieses Ergebnisses ist eine genauere Kenntnis von $N(V, H_0)$ nicht notwendig, da sich in jedem Falle für Δw dasselbe Vorzeichen wie für w ergibt. Im Rahmen dieses Modells läßt also die Wechselwirkung von Versetzungen mit thermischen Wellengruppen, die keine Vorzugsrichtung ihrer Bewegung besitzen, die Versetzungsenergie ungeändert, erhöht aber die mittlere Geschwindigkeit.

Um einen Einblick in die zahlenmäßigen Verhältnisse zu geben, gehen wir wiederum auf Gl. (59) zurück und nehmen an, daß wir den $\mathfrak{A}r \mathfrak{T}g$ in dieser Gleichung durch sein Argument ersetzen dürfen. Die

relative Geschwindigkeitsänderung wird dann

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{4N(V,H) \left(1 - \frac{V}{w}\right) \frac{H}{16} \frac{1-w^2}{1-wV}}{1-4N(V,H) \cdot \frac{H}{16} \frac{1-w^2}{1-wV}}. \quad (64)$$

Nimmt man als Zahlenbeispiel $w = -V = \frac{1}{2}$, $H = 4$, $N(-\frac{1}{2}, 4) = \frac{1}{10}$, so ergibt sich $\Delta w/w = 0,13$. Da in den Intervallen zwischen dem Auftreten der Wellengruppen die Versetzung wieder die ursprüngliche Geschwindigkeit w hat, treten erhebliche Beschleunigungen der Versetzung auf. Im eindimensionalen Modell ist dies ohne Bedeutung für die Energie der Versetzung, da die Aussendung elastischer Wellen hier nicht möglich ist. In Wirklichkeit, d.h. wenn der Kristall senkrecht zur Gleitebene eine genügende Ausdehnung besitzt, hat die Beschleunigung einer Versetzung das Auftreten auslaufender elastischer Wellen und damit eines Energieflusses von der Versetzung weg zur Folge. Man könnte diesen Energieverlust in der Weise abschätzen, daß man die Bewegung einer Versetzung unter der Einwirkung der thermischen Schwankungen aus dem vorliegenden Modell entnimmt und dann für die nunmehr bekannte Bewegung der Versetzung den Energieverlust für eine Schraubenversetzung mit Hilfe der Ergebnisse von ESHELBY¹ berechnet. Da dazu jedoch die Elastizitätstheorie der Versetzungen erforderlich ist, gehen wir hier nicht darauf ein.

6. Geschwindigkeit und Dämpfung von Versetzungen.

Die erste kritische Betrachtung der Faktoren, die die Geschwindigkeit einer Versetzung kontrollieren, stammt von LEIBFRIED², die bis jetzt ausführlichste Diskussion dieser Fragen von NABARRO³. Wegen der Schwierigkeiten, die sich der mathematischen Behandlung der wesentlichen Einflüsse entgegenstellen, ist das Problem bis jetzt noch nicht befriedigend gelöst. Wir geben hier nur eine kurze Diskussion einiger Punkte, die mit dem Vorangehenden zusammenhängen.

Betrachtet man zunächst eine Versetzung in einem Kristall, der keine thermische Bewegung enthält und auf den keine äußeren Kräfte einwirken, so ist nach den elastizitätstheoretischen Ergebnissen die gleichförmige Bewegung von Versetzungen mit Unterschallgeschwindigkeit möglich. Man kann diese Behandlungsweise auf zwei Arten verfeinern:

1. Durch die Berücksichtigung der Abweichungen von der linearen Elastizitätstheorie in der Umgebung des Versetzungszentrums.

¹ ESHELBY, J. D.: Philos. Trans. Roy. Soc. London **244**, 87 (1951).

² LEIBFRIED, G.: Z. Physik **127**, 144 (1950).

³ NABARRO, F. R. N.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **209**, 278 (1951).

2. Durch Berücksichtigung der diskontinuierlichen Struktur der Kristalle.

Die Ergebnisse des PEIERLSSchen und FRENKELSchen Modells zeigen, daß auch bei nichtlinearen Kraftgesetzen eine gleichförmig geradlinige Bewegung von Versetzungen ohne Energiezufuhr möglich ist, sofern der Kristall weiterhin als Kontinuum behandelt wird. Dies war ja der Grund, weshalb wir in Abschnitt 2 Versetzungen als translatorische Eigenbewegungen bezeichnen konnten. Nichtlinearitäten allein geben also noch keine Energiedissipation.

Dagegen ergibt die Berücksichtigung der diskontinuierlichen Struktur eine Energiedissipation und damit eine Verminderung der Versetzungsgeschwindigkeit. Der Grund dafür ist, daß eine Versetzung beim Weiterwandern um einen Atomabstand die sog. Wanderungsschwelle überwinden muß¹. Dies führt zu einer periodischen Änderung von Versetzungslänge und Versetzungsgeschwindigkeit und damit zur Aussendung elastischer Wellen. Der auf diese Weise ausgestrahlte Energiefluß ist nach ESHELBY² proportional zum Quadrat der Kreisfrequenz ω der eben erwähnten periodischen Schwankungen und somit proportional zum Quadrat der Versetzungsgeschwindigkeit v . Da aber die Höhe der Energieschwelle mit wachsender Geschwindigkeit (wegen der damit verbundenen Verkürzung der Versetzung) sehr stark ansteigt, ist dieser Energieverlust eine rasch wachsende Funktion von v und spielt sicher bei großen Versetzungsgeschwindigkeiten eine wesentliche Rolle.

Der ursprüngliche LEIBFRIEDSche Gedanke war, daß die thermische Bewegung in einem Kristall den Hauptbeitrag zur Dämpfung der Versetzungen liefert. NABARRO hat gezeigt, daß man die Wechselwirkung von Schallwellen mit Versetzungen in zwei Beiträge zerlegen kann, nämlich

1. die Streuung von Schallwellen an der Versetzungsinhomogenität, deren Berechnung aber die Berücksichtigung der Abweichungen von der linearen Elastizitätstheorie erfordert, und

2. die Mitbewegung der Versetzung unter der Wirkung der von den Schallwellen herrührenden Schubspannung, welche dann wiederum die Aussendung elastischer Wellen zur Folge hat. Wenn man den Begriff der auf eine Versetzung ausgeübten Kraft geeignet faßt, so wird dieser Effekt schon bei elastizitätstheoretischer Behandlung wiedergegeben; für eine in sich geschlossene Theorie ist jedoch auch hier die Diskussion eines nichtlinearen Modells erforderlich.

Die Ergebnisse von Abschnitt 5 lassen sich nur auf die Wechselwirkung von Versetzungen mit Wellen anwenden, die sich in der Gleit-

¹ Die dabei zu überwindende maximale Schubspannung wird PEIERLS-Kraft genannt.

² ESHELBY, J. D.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **197**, 396 (1949).

richtung ausbreiten. Sie zeigen, daß in diesem Falle kein Energieaustausch zwischen Versetzungen und Schallquanten stattfindet. Dieses Resultat entspricht genau dem entsprechenden Fall bei der COMPTON-Streuung an Elektronen.

Dieses Ergebnis wird dadurch modifiziert, daß die Versetzung beschleunigt und wieder verzögert wird, und zwar sowohl wenn wir wie in Abschnitt 5 das Wellengruppenmodell für die thermische Bewegung zugrunde legen als auch bei der Betrachtung harmonischer Scherungswellen. Dies hat die Aussendung elastischer Wellen (deren Intensität jedoch in der Gleitrichtung Null ist) zur Folge, so daß sich auf diese Weise in beiden Bildern übereinstimmend ein Energieverlust ergibt. Die Untersuchungen von Punkt 5 zeigen aber darüber hinaus, daß die nichtlineare Wechselwirkung mit den thermischen Schwankungen dazu führt, daß die mittlere Geschwindigkeit der Versetzungen größer ist als es ihrer kinetischen Energie (im Falle eines idealen Kristalls) entspricht. Ob diese beiden Effekte zusammen zu einer Geschwindigkeitserhöhung oder zu einer Geschwindigkeitsverminderung führen, kann beim jetzigen Stand der Untersuchungen noch nicht gesagt werden. Von physikalischer Bedeutung wird bei höherer Temperatur zweifellos die Möglichkeit sein, daß Zusammenstöße von Wellengruppen und Versetzungen diesen über kleine Energieschwellen hinweghelfen.

Abschließend sei noch die Frage angeschnitten, ob die nichtlineare Kopplung zwischen Eigenbewegungen und Eigenschwingungen prinzipiell ausreicht, um die Ausgleichsvorgänge in Kristallen, zu denen ja auch die Dämpfung bewegter Versetzungen gehört, richtig zu beschreiben. Für den Spezialfall der Wärmeleitung wurde von PEIERLS¹ bewiesen und von KLEMENS² neuerdings bestätigt, daß die nichtlinearen Kopplungsglieder zwischen den Eigenschwingungen nicht genügen, sondern daß die diskontinuierliche Struktur der Kristalle in geeigneter Weise berücksichtigt werden muß. Entsprechendes gilt für den zu Beginn des Abschnittes besprochenen Dämpfungsmechanismus für Versetzungen. Dagegen ist die Antwort auf diese Frage für die Wechselwirkung zwischen Versetzungen und thermischem Schallfeld noch unbekannt.

Stuttgart, Max Planck-Institut für Metallforschung und Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule.

Düsseldorf, Max Planck-Institut für Eisenforschung.

¹ PEIERLS, R.: Ann. Phys. (5) **3**, 1055 (1929).

² KLEMENS, B. G.: Diss. Magdalen College u. Clarendon Lab., Oxford 1950.