

Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems durch eine Integralgleichung.

Von

A.-W. MAUE.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 25. April 1949.)

Das Problem der Beugung von skalaren und elektromagnetischen Wellen an Körpern wird mit Hilfe einer Integralgleichung formuliert, die für eine Belegung der Körperoberfläche gilt. Im elektromagnetischen Falle wird der Körper als ideal leitend angenommen, die Belegung ist in diesem Falle der Oberflächenstrom. Die besonderen Verhältnisse an Kanten und die Beugung an berandeten Flächenstücken werden erörtert. Als Beispiel wird die Beugung am Zylinder betrachtet.

Auf einen allseitig begrenzten Körper falle eine Welle. Gefragt ist nach den auftretenden Beugungserscheinungen. Diese allgemeine Fragestellung ist noch im einzelnen zu charakterisieren 1. durch die Form des Körpers und 2. durch die auf der Körperoberfläche geltenden Randbedingungen.

Bei der üblichen Behandlung des Problems führt man spezielle Koordinaten ein, die der Körperform angepaßt sind und die Körperoberfläche als Koordinatenfläche enthalten. Die Lösung der Wellengleichung führt auf spezielle Funktionen, die nur bei den einfachsten Körperformen bekannt und tabuliert sind.

Das skizzierte allgemeine Problem ist eine Randwertaufgabe (Wellengleichung + Randbedingung + Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen) im dreidimensionalen Raum. Das Ziel der folgenden Ausführungen ist, das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales zurückzuführen, bei dem statt einer Raumbfunktion eine Flächenfunktion als Unbekannte auftritt. Diese ist auf der Oberfläche des Körpers definiert und genügt einer Integralgleichung. Die angegebene Zielsetzung liegt nahe, besonders bei komplizierteren Körperformen, weil dann die Gestalt des Körpers, nicht die einfache Wellengleichung, das eigentliche Problem darstellt. Bei der Allgemeinheit des betrachteten Beugungsproblems erscheint es wünschenswert, die vorliegenden Zusammenhänge auch von einem anderen als dem üblichen Standpunkte aus zu überblicken, auch wenn man die Frage der Nützlichkeit für praktische Rechnungen zunächst offenläßt.

Das Auftreten einer Integralgleichung an Stelle einer Differentialgleichung, der Wellengleichung, ist eine Erschwerung der Aufgabe. Dem stehen 2 Vereinfachungen gegenüber: 1. Die Zahl der unabhängigen Variablen ist um 1 verringert, und die Einführung eines speziellen

räumlichen Koordinatennetzes ist nicht nötig. 2. Die Befriedigung der Integralgleichung ist die einzige an die gesuchte Funktion zu stellende Forderung. Es handelt sich daher von vornherein um die Bestimmung einer einzigen Funktion, nicht wie bei der ursprünglichen räumlichen Formulierung um die Auffindung sämtlicher Lösungen einer Differentialgleichung, aus denen erst nachträglich durch die Randbedingungen eine bestimmte ausgewählt wird.

Die Verwendung einer Integralgleichung zur Formulierung einer Randwertaufgabe ist eine bekannte allgemeine mathematische Methode. Auf das Beugungsproblem ist sie neuerdings von MAGNUS¹ und FOCK² angewandt worden.

Im folgenden ist der Hauptwert auf eine parallel gehende Behandlung des skalaren und des vektoriiellen (elektromagnetischen) Beugungsproblems gelegt. Den Ausgangspunkt bildet die KIRCHHOFFSche Integralformel und ihre Verallgemeinerung für elektromagnetische Wellen. Die Formeln drücken das HUYGENSSche Prinzip mathematisch aus. Sie werden meist zur näherungsweise Behandlung von Beugungsproblemen (KIRCHHOFFSche Beugungstheorie)³ benutzt, sind aber selbst exakt gültig. Bei der Einführung der Formeln und der allgemeinen Eigenschaften der in ihnen auftretenden Integrale verzichten wir auf eine Begründung und verweisen hierfür auf eine Arbeit von FRANZ⁴, der auch skalare und elektromagnetische Wellen nebeneinander behandelt. Die bei FRANZ angegebenen beiden Integraleigenschaften sind noch durch eine dritte ergänzt, die sich aus dem besonderen Unstetigkeitscharakter der GREENSchen Funktion durch direkte Rechnung folgern läßt.

§ 1. Das skalare Beugungsproblem.

Nach KIRCHHOFF läßt sich die Lösung u der Wellengleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

in einem Raumgebiet angeben, wenn u und $\partial u/\partial n$ auf der Randfläche des Gebiets bekannt sind. Das geschieht mit Hilfe eines Integrals über die Randfläche. Ist P der Aufpunkt, Q der Integrationspunkt und n die innere Normale, so gilt

$$u(P) = \int \left\{ u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} - G(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q} \right\} dQ. \quad (2)$$

¹ MAGNUS, W.: Über Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe von $\Delta u + k^2 u = 0$, Jber. dtsh. Math.-Ver. **52**, 177 (1943).

² FOCK, V.: J. Physics **10**, 130 (1946). — Bull. Acad. Sci. URSS., s. phys. **10**, 171 (1946).

³ Ein systematisches Näherungsverfahren, das sich an die KIRCHHOFFSche Beugungstheorie als erste Näherung anschließt, gibt W. FRANZ, Z. Physik. **125**, 563 (1949).

⁴ FRANZ, W.: Z. Naturforsch. **3a**, 500 (1948).

$G(P, Q)$ ist die GREENSCHE Funktion des unendlichen Raumes, wobei es gleichgültig ist, welche der Formen

$$G(P, Q) = \frac{\cos kr}{4\pi r}, \quad \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \quad (r = r_{PQ}) \quad (3)$$

verwendet wird.

Für die eingangs gestellte Aufgabe wenden wir (2) auf die gesuchte Lösung u und auf das Äußere des beugenden Körpers an. Schließen wir dabei die Strahlungsquelle durch eine kleine Kugel aus, so besteht der Rand des betrachteten Raumes aus 3 Teilen, der Oberfläche des Körpers, der kleinen Kugelfläche und einer Fläche im Unendlichen. Da u der Ausstrahlungsbedingung genügt, verschwindet das Integral über die letztere Fläche, wenn wir bei der Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ ($\omega = kc$, $c =$ Phasengeschwindigkeit der Wellen) speziell

$$G = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (4)$$

wählen. Das Integral über die kleine Kugelfläche liefert die einfallende Welle u_0 . Bezeichnen wir die zunächst unbekanntenen Randwerte von u und $\partial u/\partial n$ am beugenden Körper mit f und g , so ergibt sich

$$u(P) = u_0(P) + \int \left\{ \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q) - G(P, Q) g(Q) \right\} dQ, \quad (5)$$

wobei sich die Integration über die Körperoberfläche erstreckt und n vom Körper nach außen zeigt. Hiermit ist die gesuchte Raumfunktion u auf die beiden Flächenbelegungen f und g zurückgeführt, die zu bestimmen bleiben.

In (5) tritt der Integraltyp

$$v(P) = \int \left\{ \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q) - G(P, Q) g(Q) \right\} dQ \quad (6)$$

auf. Diesem über eine geschlossene Fläche erstreckten Integral kommen ganz allgemein bei willkürlichen Funktionen f und g und einem beliebigen der Werte (3) für G die folgenden Eigenschaften zu:

1. v genügt beiderseits der Fläche der Wellengleichung (1).
2. An der Fläche erfüllt es die Grenzbedingungen

$$\left. \begin{aligned} v_1 - v_2 &= f \\ \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_2 &= g, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

in denen sich der Index 1 auf die Seite der Fläche bezieht, nach der die Normale n weist.

3. Auf der Fläche selbst sind v und $\partial v/\partial n$ gleich dem Mittel ihrer Randwerte beiderseits der Fläche:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Von diesen Aussagen erfordert die dritte eine nähere Erläuterung. Die erste Gl. (8) hat unmittelbar Sinn. Da G und $\partial G/\partial n$ nur wie $1/r$ unendlich werden, wenn sich P und Q auf der Fläche nähern, konvergiert nämlich das Integral (6) auch dann, wenn P auf der Fläche liegt. Hingegen divergiert der aus (6) durch Differentiation nach n_P unter dem Integral entstehende Ausdruck

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_P = \int \left\{ \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n_Q \partial n_P} f(Q) - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_P} g(Q) \right\} dQ$$

für Punkte P auf der Fläche. Er läßt sich jedoch durch partielle Integration so umformen, daß ihm auch auf der Fläche ein bestimmter Wert beigelegt werden kann, für den dann die zweite Gl. (8) gilt. Durch zweimalige partielle Integration läßt sich die Divergenz vollständig beseitigen. Nach einmaliger partieller Integration wird das Integral bedingt konvergent, wenn P auf der Fläche liegt. Man hat dann P durch einen kleinen Kreis um P auszuschließen, dessen Radius man gegen Null gehen läßt, um zum richtigen Integralwert zu gelangen. In unserem Zusammenhange (vgl. § 4) ist es zweckmäßig, sich auf eine einmalige partielle Integration zu beschränken. Hierzu hat man die Differentiation nach P im ersten Summanden in eine solche nach Q umzuwandeln:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial n_Q \partial n_P} = -(\pi_Q \text{grad}_Q (\pi_P \text{grad}_Q G)).$$

In der NABLA-Schreibweise erhält man durch Anwendung der Vektorformel

$$([\mathfrak{A} \mathfrak{B}], [\mathfrak{C} \mathfrak{D}]) = (\mathfrak{A} \mathfrak{C}) (\mathfrak{B} \mathfrak{D}) - (\mathfrak{A} \mathfrak{D}) (\mathfrak{B} \mathfrak{C})$$

die Darstellung

$$\frac{\partial^2 G}{\partial n_Q \partial n_P} = -(\pi_Q \nabla_Q) (\pi_P \nabla_Q) G = ([\pi_Q \nabla_Q], [\pi_P \nabla_Q]) G - (\pi_Q \pi_P) (\nabla_Q \nabla_Q) G.$$

Auf das zweite Glied rechts wendet man die für G gültige Wellengleichung (1) an. Im Bestandteil des Integrals, der vom ersten Glied herrührt, integriert man partiell, indem man das linke ∇_Q statt auf die in der letzten Gleichung rechts von ihm stehenden Größen unter Vorzeichenumkehr auf f anwendet. Dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_P &= - \int ([\pi_P \text{grad}_Q G(P, Q)], [\pi_Q \text{grad} f(Q)]) dQ + \\ &+ k^2 \int G(P, Q) (\pi_P \pi_Q) f(Q) dQ - \int \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_P} g(Q) dQ. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wir wenden die über den Integraltyp (6) getroffenen Feststellungen auf den Lösungsansatz (5) für die Randwertaufgabe an. Zunächst sehen wir, daß (1) durch den Ansatz von selbst erfüllt ist. Weiter ist zu fordern, daß u und $\partial u/\partial n$ am Körper tatsächlich die äußeren Randwerte f und g annehmen oder, was wegen (7) dasselbe ist, daß beide den inneren Randwert 0 annehmen. Da (5) innerhalb des Körpers die Wellengleichung erfüllt, genügt es, entweder für u oder für $\partial u/\partial n$ den inneren Randwert 0 zu fordern; denn hieraus, folgt bereits, wenn wir den Sonderfall ausschließen, daß k ein Eigenwert des Körperinnern ist, daß u im Körperinnern identisch verschwindet und daher automatisch auch die jeweils andere der beiden Größen u und $\partial u/\partial n$ den inneren Randwert 0 annimmt. Schließlich können wir wegen (8) statt dessen auch fordern, daß auf der Körperoberfläche selbst $u = \frac{1}{2}f$ wird oder daß dort $\partial u/\partial n = \frac{1}{2}g$ wird. Das führt mit Rücksicht auf (5), (6) und (9) zu den beiden gleichwertigen Integralgleichungen

$$\frac{1}{2}f(Q) = u_0(P) + \int \left\{ \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q) - G(P, Q) g(Q) \right\} dQ \quad (10)$$

und

$$\frac{1}{2}g(P) = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_P - \int \left([n_P \text{grad}_Q G(P, Q)], [n_Q \text{grad} f(Q)] \right) dQ + \left. \begin{aligned} &+ k^2 \int G(P, Q) (n_P n_Q) f(Q) dQ - \int \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_P} g(Q) dQ, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

die sich auf der Körperoberfläche abspielen. Jede dieser Gleichungen legt zusammen mit einer aus den vorgegebenen Randbedingungen am Körper folgenden Beziehung die Flächenbelegungen f und g eindeutig fest, da dann allen Forderungen genügt ist, die an f und g zu stellen sind, und die Randwertaufgabe als eindeutig lösbar vorausgesetzt sein soll.

Schreiben wir die Randbedingung in der Form

$$a u + b \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (12)$$

so tritt neben (10) und (11) als zweite Bestimmungsgleichung für f und g

$$a f + b g = 0. \quad (13)$$

Im allgemeinsten Falle sind a und b komplexe Funktionen auf der Körperoberfläche. Sie seien so beschaffen, daß die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist. Es darf also eine selbständige Ausstrahlung des Körpers ohne Bestrahlung von außen nicht möglich sein. Sind insbesondere a und b reell, so findet am Körper weder Ein- noch Ausstrahlung, sondern reine Reflexion statt.

Von den beiden Gln. (10) und (11) ist im allgemeinen (10) als die einfachere vorzuziehen. (10) ist eine reine Integralgleichung zweiter Art, während (11) auch Ableitungen von f enthält. Nur bei der Randbedingung $u = 0$ ziehen wir (11) vor. In diesem Falle artet nämlich (10)

zu einer Integralgleichung erster Art aus, und in (11) verschwinden die Ableitungen der Unbekannten. Trifft man die Auswahl zwischen (10) und (11) in dieser Weise, so vermeidet man damit auch die oben eingeführten bedingt konvergenten Integrale.

Schließlich betrachten wir noch die beiden einfachsten Spezialfälle der Randbedingung. Die gewonnene Formulierung des Beugungsproblems lautet für die Randbedingung $u = 0$.

$$f(P) = 0, \quad \frac{1}{2} g(P) + \int \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_P} g(Q) dQ = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_P \quad (14)$$

und für die Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$

$$\frac{1}{2} f(P) - \int \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q) dQ = u_0(P), \quad g(P) = 0. \quad (15)$$

Bei den noch folgenden Betrachtungen über das skalare Beugungsproblem beschränken wir uns auf diese einfachen Fälle.

Alle abgeleiteten Formeln gelten auch, wenn der beugende Körper unendlich ausgedehnt ist. Liegt die Strahlungsquelle im Endlichen, so verschwinden G und f im Unendlichen wie $1/r$, $\partial G / \partial n$ und g mindestens wie $1/r$, was zusammen mit den Oszillationen der Exponentialfunktion in G zur Konvergenz der Flächenintegrale genügt. Liegt die Strahlungsquelle im Unendlichen, so ist ein Konvergenzfaktor zu verwenden, den man nachträglich gegen 1 gehen läßt.

§ 2. Das elektromagnetische Beugungsproblem.

Die MAXWELLSchen Gleichungen des leeren Raumes für das elektromagnetische Feld \mathfrak{E} , \mathfrak{H} lassen sich schreiben:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = i k \mathfrak{H}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -i k \mathfrak{E}. \quad (16)$$

Das Feld innerhalb eines Raumgebietes läßt sich angeben, wenn die Tangentialkomponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} auf der Randfläche bekannt sind. Die der KIRCHHOFFSchen Integralformel (2) entsprechenden Beziehungen entnehmen wir aus den Gln. (17) und (18) bei FRANZ (l. c. S. 602, Anm. 4), die wir für ein homogenes Medium spezialisieren und in unsere Bezeichnungsweise umschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \int [\operatorname{grad}_Q G [\mathfrak{E} n_Q]] dQ - \frac{1}{i k} \operatorname{rot} \int [\operatorname{grad}_Q G [\mathfrak{H} n_Q]] dQ, \\ \mathfrak{H} &= \int [\operatorname{grad}_Q G [\mathfrak{H} n_Q]] dQ + \frac{1}{i k} \operatorname{rot} \int [\operatorname{grad}_Q G [\mathfrak{E} n_Q]] dQ. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

G ist wieder durch (3) gegeben, n ist die innere Normale. Zur Vereinfachung der Formeln wurde darauf verzichtet, die Abhängigkeit der einzelnen Größen von Aufpunkt P und Integrationspunkt Q anzugeben. Das soll auch im folgenden geschehen, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind. G hängt stets von P und Q ab, die anderen Größen

von Q , wenn sie unter dem Integral, von P , wenn sie außerhalb des Integrals stehen. Entsprechend beziehen sich Differentiationen dieser Größen unter dem Integral auf Q , außerhalb auf P . Bei Differentiation von G und bei den Normalenvektoren \mathfrak{n} ist der Index P oder Q beigefügt.

Den beugenden Körper nehmen wir als ideal leitend an, so daß an der Körperoberfläche

$$[\mathfrak{E} \mathfrak{n}] = 0 \quad (18)$$

wird. Für den Randwert der Tangentialkomponente von \mathfrak{H} gelte mit \mathfrak{n} als äußerer Normalen am Körper

$$[\mathfrak{H} \mathfrak{n}] = -\mathfrak{J}. \quad (18a)$$

\mathfrak{J} ist der elektrische Oberflächenstrom und spielt die Rolle der unbekanntenen Flächenbelegung. Die einfallende Welle sei \mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0 . Anwendung von (17) auf das Beugungsproblem liefert dann

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \int [\operatorname{grad}_Q G, \mathfrak{J}] dQ, \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_0 - \int [\operatorname{grad}_Q G, \mathfrak{J}] dQ, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei

$$\mathfrak{J} \perp \mathfrak{n} \quad (20)$$

und unter G jetzt wieder der Ausdruck (4) zu verstehen ist.

Wie in (5) sorgt auch in (19) die Form des Ansatzes dafür, daß jetzt die im Außenraum vorgeschriebenen Differentialgleichungen, das ist Gl. (16), erfüllt sind. Überdies genügt (19) diesen auch im Körperinnern. Weiter gelten für die Tangentialkomponente des in (19) auftretenden Integralausdrucks

$$\mathfrak{A} = \int [\operatorname{grad}_Q G, \mathfrak{J}] dQ \quad (21)$$

und seiner Rotation, wenn \mathfrak{J} (20) erfüllt, aber sonst beliebig ist, an der Fläche die Grenzbedingungen

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{n}]_1 - [\mathfrak{A} \mathfrak{n}]_2 = \mathfrak{J}, \quad [\operatorname{rot} \mathfrak{A}, \mathfrak{n}]_1 - [\operatorname{rot} \mathfrak{A}, \mathfrak{n}]_2 = 0. \quad (22)$$

Der Index 1 bezieht sich auf die Seite der Fläche, nach der \mathfrak{n} weist.

Damit $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$ auch auf der Fläche selbst einen Sinn erhält, muß es umgeformt werden. Durch Umwandlung einer Differentiation nach P in eine solche nach Q und Benutzung einer Vektorformel ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_P [\operatorname{grad}_Q G, \mathfrak{J}] &= G [\overset{\leftarrow}{\nabla}_P [\overset{\leftarrow}{\nabla}_Q \mathfrak{J}]] = -G [\overset{\leftarrow}{\nabla}_Q [\overset{\leftarrow}{\nabla}_Q \mathfrak{J}]] \\ &= -G \overset{\leftarrow}{\nabla}_Q (\overset{\leftarrow}{\nabla}_Q \mathfrak{J}) + G (\overset{\leftarrow}{\nabla}_Q \overset{\leftarrow}{\nabla}_Q) \mathfrak{J}. \end{aligned}$$

Dabei deuten die Pfeile an, daß ∇ auf G , nicht auf \mathfrak{J} wirkt. Im zweiten Glied rechts läßt sich (1) für G anwenden. Im Integral führt man dann im ersten Glied eine partielle Integration durch und läßt unter

Vorzeichenumkehr das rechte V statt nach links auf \mathfrak{F} wirken. Man erhält dabei

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \int \operatorname{div} \mathfrak{F} \cdot \operatorname{grad}_Q G \, dQ - k^2 \int G \cdot \mathfrak{F} \, dQ. \quad (23)$$

Die Integrale (21) und (23) sind ebenso wie (9) auf der Fläche nur bedingt konvergent und im selben Sinne wie (9) als Grenzwerte zu verstehen. Die Singularitäten treten auf bei der Normalkomponente von (21) und der Tangentialkomponente von (23). Die Werte auf der Fläche sind wieder die Mittelwerte der beiderseitigen Randwerte. Insbesondere gilt für die Tangentialkomponenten auf der Fläche, in der zweiten Gleichung mit Rücksicht auf (22),

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{A} \mathfrak{n}] &= \frac{1}{2} ([\mathfrak{A} \mathfrak{n}]_1 + [\mathfrak{A} \mathfrak{n}]_2) \\ [\operatorname{rot} \mathfrak{A}, \mathfrak{n}] &= [\operatorname{rot} \mathfrak{A}, \mathfrak{n}]_1 = [\operatorname{rot} \mathfrak{A}, \mathfrak{n}]_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Wegen (18) und (18a) ist zu fordern, daß die mit (19) gebildeten Größen $[\mathfrak{C} \mathfrak{n}]$ und $[\mathfrak{S} \mathfrak{n}]$ am Körper die äußeren Randwerte 0 und $-\mathfrak{F}$ annehmen. Nach (19), (21) und (22) sind die zugehörigen inneren Randwerte für beide Größen 0. Genau entsprechend den Verhältnissen beim skalaren Beugungsproblem genügt es wieder, von einer der beiden Größen zu verlangen, daß ihr innerer Randwert verschwindet, da hierdurch und, weil (19) im Körperinnern (16) erfüllt, bereits das identische Verschwinden des Feldes (19) innerhalb des Körpers gewährleistet ist. Dabei ist wie in § 1 angenommen, daß k kein Eigenwert des Körperinnern ist. Die zugehörigen Werte von $[\mathfrak{C} \mathfrak{n}]$ und $[\mathfrak{S} \mathfrak{n}]$ auf der Fläche sind mit Rücksicht auf (24) 0 und $-\frac{1}{2} \mathfrak{F}$. Hieraus ergeben sich nach (19), (21) und (23) zwei Integralgleichungen auf der Körperoberfläche. Sie lauten, ausführlich geschrieben,

$$\left. \begin{aligned} ik \int G(P, Q) [\mathfrak{F}(Q), \mathfrak{n}_P] \, dQ + \\ + \frac{1}{ik} \int [\operatorname{grad}_Q G(P, Q), \mathfrak{n}_P] \operatorname{div} \mathfrak{F}(Q) \, dQ = -[\mathfrak{C}_0(P), \mathfrak{n}_P], \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \mathfrak{F}(P) - \int [[\operatorname{grad}_Q G(P, Q), \mathfrak{F}(Q)], \mathfrak{n}_P] \, dQ = -[\mathfrak{S}_0(P), \mathfrak{n}_P]. \quad (26)$$

Da wir die Randbedingung (18) schon berücksichtigt haben, stellt jede dieser beiden Gleichungen für sich allein eine vollständige Formulierung des Randwertproblems dar. Die einfachere Gleichung ist (26). Sie ist eine reine Integralgleichung zweiter Art und enthält keine nur bedingt konvergenten Integrale.

§ 3. Beugende Objekte mit Kanten.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Normalenrichtung in jedem Punkte der Körperoberfläche eindeutig festliegt, die Fläche also überall endlich gekrümmt ist. Jetzt soll angenommen werden, daß Kanten vorhanden sind.

Der Kern der Integralgleichungen (14), (15) und (26) besitzt bei glatter Oberfläche nur in $Q = P$ eine Unstetigkeit und verhält sich hier wie $1/r_{PQ}$. Die Inhomogenitäten $\partial u_0/\partial n$, u_0 und $-[\mathfrak{H}_0 n]$ sind auf der Körperoberfläche stetig. Die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichungen durch stetige Funktionen g , f und \mathfrak{F} ergab sich durch die Herleitung der Gleichungen aus den beiden Voraussetzungen, daß die gestellte Randwertaufgabe eindeutig lösbar und k kein Eigenwert des Körperinnern ist. Treten Kanten auf, so wird der Kern an diesen unstetig, ebenso die Inhomogenitäten $\partial u_0/\partial n$ und $-[\mathfrak{H}_0 n]$, weil die Normalenrichtung an den Kanten springt. Zusätzliche Unstetigkeiten des Kerns allein brauchen keine besondere Bedeutung für die Lösung zu haben, da das mit einem solchen unstetigen Kern gebildete Integral im allgemeinen trotzdem stetig ist. So bleibt beispielsweise die Lösung f von (15) auch beim Auftreten von Kanten stetig. Aber gerade wegen dieser Unempfindlichkeit des Integrals gegenüber Unstetigkeiten des Kerns lassen sich die Gl. (14) und (26) mit unstetiger Inhomogenität nur durch Funktionen lösen, die an der Kante unendlich werden.

Vom glatten Körper zum Körper mit Kanten gelangt man durch einen Grenzübergang von überall endlicher zu stellenweise unendlicher Krümmung. Einen solchen Grenzübergang vom Standpunkte der Integralgleichung aus streng durchzuführen, würde schwierig und unnötig umständlich sein und ist daher nicht beabsichtigt. Vielmehr sollen die einfachen Methoden der ebenen Potentialtheorie angewandt werden, um die Formulierung des Beugungsproblems durch eine Integralgleichung auf Körper mit Kanten auszudehnen.

Zwei Fragen sind zu beantworten: Erstens ist zu klären, ob die Lösungen f , g und \mathfrak{F} an den Kanten singularär werden und wie diese Singularitäten beschaffen sind. Zweitens ist die Möglichkeit des Auftretens von Linienintegralen längs der Kanten in der Integralgleichung, zusätzlich zu den Flächenintegralen, zu erörtern.

Es soll die Lösung u der Wellengleichung (1) in der Umgebung einer Stelle der Kante betrachtet werden. Die Ausdehnung des ins Auge gefaßten Bereichs sei klein gegen die Krümmungsradien der Kantenlinie und der anstoßenden Flächen und gegen die Wellenlänge. In diesem engen Bezirk kann u als Lösung der zweidimensionalen Potentialgleichung in der Ebene senkrecht zur Kante (x - y -Ebene) angesehen, also insbesondere als unabhängig von der Koordinate z in Kantenrichtung betrachtet werden. u baut sich dann bei Verwendung ebener Polarkoordinaten r , φ auf aus den Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} r^{\pm \nu} \cos \nu \varphi, \quad r^{\pm \nu} \sin \nu \varphi, \quad \text{mit } \nu > 0 \\ 1, \quad \lg r \quad \text{entsprechend } \nu = 0. \end{array} \right\} \quad (27)$$

Die zulässigen ν -Werte ergeben sich aus der Randbedingung am Körper (vgl. Abb. 1). Die für den Aufbau der Lösung u eines Beugungsproblems

erforderlichen Zahlenkoeffizienten werden grundsätzlich immer genau zur einen Hälfte durch die Bedingungen in weitem Abstand vom Beugungsobjekt (Strahlungsquelle + Ausstrahlungsbedingung), zur anderen Hälfte durch die Bedingungen am Objekt festgelegt. Es dürfen daher durch Nullsetzen der entsprechenden Zahlenkoeffizienten alle Funktionen (27) mit negativem Exponenten von r (zuzüglich der Funktion $\lg r$) ausgeschieden werden, um so zu erreichen, daß u auch an der Kante endlich bleibt. Somit bleibt auch f endlich, und der Fall der Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$ ist damit erledigt. Bei der Randbedingung $u = 0$ haben wir zu bilden

$$g = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial |\varphi|}, \quad (28)$$

was für Werte $\nu < 1$ in den nicht ausgeschiedenen Funktionen (27) zu einem Unendlichwerden von g wie $r^{\nu-1}$ führt. Die einzige Funktion, für die das zutrifft und die die Randbedingung $u = 0$ erfüllt, ist

$$r^\nu \cdot \cos \nu \varphi \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{\pi}{\pi + 2\alpha}, \quad (29)$$

wobei man die Bedeutung von α aus Abb. 1 entnimmt. Die hiermit gewonnenen Aussagen über das Verhalten von f und g an den Kanten fassen wir zusammen zu

$$f \text{ endlich,} \quad g \lesssim s^{-\frac{2\alpha}{\pi+2\alpha}}, \quad (30)$$

wobei s den Abstand von der Kante bedeutet. (30) gilt auch für den Fall kantiger Einbuchtungen des Körpers. α ist dann negativ.

Es soll noch bemerkt werden, daß (30) nicht die Rolle von Grenzbedingungen an der Kante zukommt. Grenz- oder Randbedingungen sind bei Integralgleichungen unnötig. Der Sinn von (30) ist vielmehr, den Kreis der Funktionen abzugrenzen, die als Lösungen zugelassen sind. Nicht die Stetigkeit von f und $g \cdot s^{\frac{2\alpha}{\pi+2\alpha}}$ wird also gefordert, sondern nur ihre Endlichkeit. Die Stetigkeit ergibt sich bei der Lösung von selbst ebenso, wie bei glatten Körpern f und g auch dann von selbst stetig werden, wenn man nur stückweise Stetigkeit von ihnen verlangt.

Es bleibt die Frage eines etwaigen von der Kante herrührenden Zusatzgliedes in der Integralgleichung zu klären. Für f ist ein solches Glied von vornherein auszuschließen, da f endlich bleibt. Für g würde das Auftreten eines Zusatzgliedes bedeuten, daß das über eine unendlich kleine Nachbarschaft der Kante erstreckte Integral

$$\int g(Q) dQ \quad (31)$$

endlich ist. Um zu einer schärferen Formulierung zu gelangen, sind einige Vorbereitungen nötig.

In der x - y -Ebene seien die kartesischen Koordinaten auf ein krummliniges Koordinatensystem ξ, η mit dem Linienelement

$$ds^2 = e^2 (d\xi^2 + d\eta^2) \quad (32)$$

konform abgebildet. Die Körperoberfläche sei die (geknickte) η -Achse, auf der $\xi = 0$ gelte (vgl. Abb. 1). An der Kante selbst sei außerdem $\eta = 0$. Betrachtet man statt $\xi = 0$ eine beliebige Kurve $\xi = \xi_0$ als Körperoberfläche, so lautet die der Randbedingung $u = 0$ genügende Lösung niedrigster Ordnung in ξ, η der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \tag{33}$$

einfach

$$u = \xi - \xi_0. \tag{34}$$

Sie stimmt für $\xi_0 = 0$ mit (29), d. h. der unter den in Frage kommenden Lösungen (27) mit niedrigster Ordnung in r , überein.

Um die Frage nach dem Kantenglied zu beantworten, hat man (31) zunächst für $\xi_0 \neq 0$ über einen endlichen Bereich $-\eta_0 < \eta < \eta_0$ zu erstrecken. Dann hat man von der abgerundeten zur scharfen Kante überzugehen ($\xi_0 \rightarrow 0$) und schließlich den endlichen Integrationsbereich schrumpfen zu lassen ($\eta_0 \rightarrow 0$). Wegen (32) und (34) erhält man

$$g = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{e} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{e} \tag{35}$$

und weiter auf $\xi = \xi_0$ wegen (32)

$$ds = e \cdot d\eta. \tag{36}$$

Hieraus ergibt sich das fragliche Integral (31) in der Schreibweise des ebenen Problems unabhängig von ξ_0 zu

$$\int_{-\eta_0}^{\eta_0} g ds = 2\eta_0, \tag{37}$$

was für $\eta_0 \rightarrow 0$ verschwindet. Die Kante liefert also auch für g kein Zusatzglied. Da an der Kante das ξ - η -Netz unendlich dicht ist, verschwindet hier die Maßgröße e . Es ist daher für das eben gewonnene Ergebnis ausschlaggebend, daß sich e in (35) und (36) gegenseitig hebt. Beim Auftreten zweiter Ableitungen statt der ersten Ableitung in (35) würde das nicht mehr der Fall sein.

Der elektromagnetische Fall läßt sich ebenso wie der skalare als ebenes Problem behandeln und auf diesen zurückführen. Hierzu werde der zur x - y -Ebene senkrechte Einheitsvektor \mathfrak{z} eingeführt, der zusammen mit dem Normalenvektor \mathfrak{n} und mit $[\mathfrak{z} \mathfrak{n}]$ ein rechtwinkliges auf der Körperoberfläche ortsabhängiges Achsenkreuz bildet. Zerlegung des Oberflächenstroms \mathfrak{F} und der Tangentialkomponente von \mathfrak{S}_0 in den zur Kante senkrechten und den zu ihr parallelen Bestandteil liefert

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= H_{\perp}^0 [\mathfrak{z} \mathfrak{n}] + H_{\parallel}^0 \mathfrak{z} + H_n^0 \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{F} &= F_{\perp} [\mathfrak{z} \mathfrak{n}] + F_{\parallel} \mathfrak{z}. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

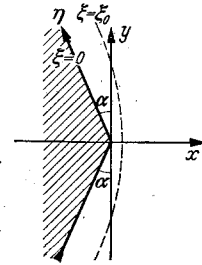


Abb. 1. Schnitt senkrecht zu einer Kante.

Durch diese Zerlegung zerfällt (26) in 2 Gleichungen, die bei Weglassung des Gliedes

$$\int F_{\perp} \frac{\partial G}{\partial z_Q} [n_Q n_P] dQ \quad (39)$$

lauten

$$\frac{1}{2} F_{\parallel} + \int \frac{\partial G}{\partial n_P} F_{\parallel} dQ = H_{\perp}^0, \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} F_{\perp} - \int \frac{\partial G}{\partial n_Q} F_{\perp} dQ = -H_{\parallel}^0. \quad (41)$$

(39) enthält das Glied $\partial G/\partial z_Q$. Durch partielle Integration läßt sich die Differentiation nach z auf F_{\perp} abwälzen. Da F_{\perp} im Sinne der angewandten ebenen Betrachtung in Richtung parallel zur Kante als konstant anzusehen ist, ist (39) folgerichtig zu streichen. Ein ausintegrierter Bestandteil tritt bei der partiellen Integration nicht auf, da die Kante, längs der z gemessen wird, sich nicht ins Unendliche erstreckt, sondern den Körper umschließt. z vertritt also eine zyklische Variable.

(40) und (41) stimmen mit (14) und (15) in der Form überein und gehen aus diesen hervor, wenn man darin g , f , $\partial u_0/\partial n$, u_0 durch F_{\parallel} , F_{\perp} , H_{\perp}^0 , $-H_{\parallel}^0$ ersetzt. Wie dort $\partial u_0/\partial n$ springt hier H_{\perp}^0 an der Kante, weil ξ_0 selbst fest ist, aber n springt. Hingegen ist H_{\parallel}^0 wie u_0 stetig, da ξ eine feste Richtung hat. Übertragung von (30) liefert

$$F_{\perp} \text{ endlich,} \quad F_{\parallel} \lesssim s^{-\frac{2\alpha}{\pi+2\alpha}}. \quad (42)$$

Mit Rücksicht auf (38) besagt das, daß der Oberflächenstrom längs der Kante unendlich werden kann, während der senkrecht zur Kante endlich bleibt.

Im Zusammenhang mit den Rechnungen von MEIXNER¹ über die elektromagnetische Beugung an der Kreisscheibe ist es interessant, nach dem Feld im Außenraum in der Umgebung der Kante zu fragen, das zu der unendlich werdenden Komponente F_{\parallel} gehört. F_{\parallel} ist wegen (18a) und der zweiten Gl. (38) das tangentielle Magnetfeld längs der geknickten η -Achse von Abb. 1. Das normale Magnetfeld verschwindet am Körper wegen (18) und der ersten Gl. (16). Demnach ist hier (vgl. Abb. 1) bei komplexer Zusammenfassung der beiden kartesischen Komponenten von ξ

$$H_x - iH_y = -iF_{\parallel} e^{\mp i\alpha}, \quad (43)$$

wobei das Vorzeichen im Exponenten für die positive bzw. negative η -Achse gilt. Als mit (43) als Randbedingung in Einklang stehende Lösung der Potentialgleichung ergibt sich, wenn der in (42) weggelassene hier speziell als reell angenommene Proportionalitätsfaktor mit C_1 bezeichnet wird

$$H_x - iH_y = -iC_1 (x + iy)^{-\frac{2\alpha}{\pi+2\alpha}}. \quad (44)$$

¹ MEIXNER, J.: Z. Naturforsch. 3a, 506 (1948).

Die Energiedichte des Feldes ist der Größe

$$H_x^2 + H_y^2 = C_1^2 \cdot r^{-\frac{4\alpha}{\pi+2\alpha}} \quad (45)$$

proportional. Sie ist, da α höchstens $\pi/2$ sein kann, in der Ebene integrierbar und erfüllt damit die von MEIXNER an die Lösung des Beugungsproblems gestellte Forderung. Diese Vorschrift der endlichen Feldenergie dient bei MEIXNER dazu, aus der großen Schar der an der Kante singulären Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen die physikalisch sinnvolle auszusondern und reicht hierfür aus. Durch (45) wird das Verhalten des Feldes schärfer gefaßt.

Ganz Entsprechendes gilt vom elektrischen Feld \mathcal{E} , das zu der endlichen an der Kante ungeraden Lösung F_{\perp} von (41) gehört, die sich hier wie $\pm s^{\frac{\pi}{\pi+2\alpha}}$ verhält. Aus dem zugehörigen Magnetfeld H_z berechnet sich nach (16) das an der Kante unendliche elektrische Feld

$$E_x - i E_y = C_2 (x + i y)^{-\frac{2\alpha}{\pi+2\alpha}} \quad (46)$$

mit reellem C_2 .

§ 4. Die Beugung an berandeten Flächenstücken.

Einen Sonderfall eines Körpers mit Kanten stellt ein berandetes Flächenstück dar. Hier ist speziell $\alpha = \pi/2$, so daß an der Berandung gilt

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ endlich,} \quad g \lesssim s^{-\frac{1}{2}}, \\ F_{\perp} \text{ endlich,} \quad F_{\parallel} \lesssim s^{-\frac{1}{2}}. \end{array} \right\} \quad (47)$$

In Gl. (15), die zunächst betrachtet werden soll, ist das Integral über beide Seiten des Flächenstücks zu erstrecken, die wir als Oberseite (+) und Unterseite (-) unterscheiden. Da sich dabei der Integrationspunkt Q zweimal auf derselben Fläche bewegt, nimmt $\partial G/\partial n_Q$ abgesehen vom Vorzeichen zweimal dieselben Werte an. Es ist daher praktisch, für die Werte von f auf Ober- und Unterseite getrennte Bezeichnungen f_+ und f_- einzuführen und unter Verwendung der Differenz $f_+ - f_-$ nur einmal über die Fläche zu integrieren. Setzt man für diese eine Integration die Normalenrichtung als nach der Oberseiteweisend fest, so tritt an die Stelle des Integrals in (15)

$$\int \frac{\partial G}{\partial n_Q} (f_+ - f_-) dQ. \quad (48)$$

Hierbei bleibt noch ein Punkt zu korrigieren. Man denke sich die Fläche durch Zusammenrücken von Ober- und Unterseite eines Körpers endlicher Dicke d (vgl. Abb. 2) entstanden. Der Aufpunkt P liege auf der Oberseite. Dann ist bei der Integration über diese Seite P als Punkt der Fläche zu betrachten. Anders bei der Integration über die

Unterseite. Hier ist der Grenzwert des Integrals zu verwenden, der sich ergibt, wenn P von oben her an die Unterseite heranrückt. Soll daher in (48) der Aufpunkt P einheitlich als Punkt auf der Fläche betrachtet werden, so hat man den Bestandteil von (48), der von der Unterseite herrührt, noch durch die Differenz seines oberen Randwertes und seines Wertes auf der Fläche zu korrigieren. Man hat dann nach (6), (7) und (8) das Glied $-\frac{1}{2}f_-$ zu (48) hinzuzufügen. So entsteht aus (15) mit den Abkürzungen

$$f_+ + f_- = \psi, \quad f_+ - f_- = \varphi \quad (49)$$

als Integralgleichung für die Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$

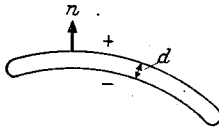


Abb. 2. Grenzübergang zur berandeten Fläche.

$$\frac{1}{2}\psi - \int \frac{\partial G}{\partial n_Q} \varphi dQ = u_0. \quad (50)$$

Nimmt man den Aufpunkt vor dem Grenzübergang statt auf der Ober- auf der Unterseite an, so gelangt man zur selben Gleichung, da (50) bezüglich beider Seiten symmetrisch ist. Um eine zweite Gleichung zu erhalten, kann man beim Grenzübergang $d \rightarrow 0$ in Abb. 2 auch noch das in d lineare Glied berücksichtigen. Einfacher ist es, Gl. (11) mit $g = 0$ zu benutzen, was zum gleichen Ergebnis führt. Geht man in derselben Weise vor wie bei der Herleitung von (50), so erhält man mit Rücksicht auf den Umstand, daß die vorkommenden Integrale wegen $g = 0$ nach (9), (7) und (8) an der Integrationsfläche nicht springen, als zweite Gleichung

$$\int ([n_P \text{ grad}_Q G], [n_Q \text{ grad } \varphi]) dQ - k^2 \int G (n_P n_Q) \varphi dQ = \frac{\partial u_0}{\partial n_P}. \quad (51)$$

Für die Welle u im Außenraum ergibt sich aus (5)

$$u = u_0 + \int \frac{\partial G}{\partial n_Q} \varphi dQ. \quad (52)$$

Da ψ weder in (51) noch in (52) vorkommt, erübrigt sich seine Berechnung überhaupt, und Gl. (50) wird überflüssig.

Ganz entsprechend liegen die Verhältnisse bei der Randbedingung $u = 0$ und im elektromagnetischen Falle. Von zwei unbekanntem Belegungen und zwei Integralgleichungen wird jeweils nur eine, und zwar eine bestimmte, benötigt. Es soll daher jeweils nur die φ entsprechende Belegung eingeführt und nur die (51) entsprechende Integralgleichung angegeben werden. Mit der Abkürzung

$$g_+ + g_- = \gamma \quad (53)$$

folgt aus (10) mit $f = 0$

$$\int G \gamma dQ = u_0. \quad (54)$$

Bei der Herleitung wird benutzt, daß das Integral nach (6), (7) und (8) an der Integrationsfläche stetig ist. Die räumliche Welle wird nach (5)

$$u = u_0 - \int G \gamma dQ. \quad (55)$$

Bei (54) liegt der Aufpunkt auf der Fläche, bei (55) im Raum.

Die Integralgleichung für den elektromagnetischen Fall ergibt sich aus (25) mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Integrale an der Fläche, die aus (23) und (24) folgt. Mit der Abkürzung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_+ + \mathfrak{S}_- \quad (56)$$

erhält man die auf der Fläche gültige Gleichung

$$i k \int G [\mathfrak{S} n_P] dQ + \frac{1}{i k} \int [\text{grad}_Q G, n_P] \cdot \text{div } \mathfrak{S} dQ = - [\mathfrak{E}_0 n_P]. \quad (57)$$

Das Magnetfeld im Raum wird nach (19)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \int [\text{grad}_Q G, \mathfrak{S}] dQ. \quad (58)$$

Hier ist es physikalisch ohne weiteres einleuchtend, daß das Feld nur durch den gesamten Flächenstrom \mathfrak{S} bestimmt sein und daß die Differenz $\mathfrak{S}_+ - \mathfrak{S}_-$ keine Rolle spielen kann.

Aus (47) folgt für das Verhalten der neu eingeführten Flächenbelegungen an der Randlinie:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \text{ endlich,} \quad \gamma \lesssim s^{-\frac{1}{2}}, \\ J_{\perp} \text{ endlich,} \quad J_{\parallel} \lesssim s^{-\frac{1}{2}}. \end{array} \right\} \quad (59)$$

Für die Konvergenz des zweiten Integrals in (57) am Rand ist es wesentlich, daß J_{\perp} endlich bleibt; denn aus $J_{\perp} \sim s^{-\frac{1}{2}}$ würde $\text{div } \mathfrak{S} \sim s^{-\frac{3}{2}}$ folgen.

Während in den vorangegangenen Abschnitten immer die Möglichkeit bestand, von zwei verfügbaren Integralgleichungen die einfachere zu verwenden, besteht eine solche Wahl bei der Beugung an Flächenstücken nicht mehr. Man wird vielmehr zwangsläufig auf die Gln. (51), (54) und (57) geführt. Diese sind in dreifacher Hinsicht unbequem.

Erstens treten in (51) und (57) bedingt konvergente Integrale des in § 1 näher besprochenen Typs auf, deren Wert durch einen Grenzübergang festzulegen ist. Das in § 1 erwähnte Verfahren, die Integrale statt einer einmaligen einer zweimaligen partiellen Integration zu unterwerfen, ehe man für P auch Punkte auf der Fläche zuläßt, würde zwar die Divergenz bei $Q = P$ vollständig beheben, dafür aber eine neue an der Berandung erzeugen. Zweitens sind (51) und (57) keine reinen Integralgleichungen, da Ableitungen der Unbekannten vorkommen, und drittens sind alle 3 Integralgleichungen von erster Art.

Im Sonderfalle eines ebenen Flächenstückes vereinfacht sich (51) zu

$$\int (\text{grad}_Q G, \text{grad } \varphi) dQ - k^2 \int G \varphi dQ = \frac{\partial u_0}{\partial n_P}, \quad (60)$$

während sich (54) und (57) nicht ändern.

§ 5. Die Beugung am Zylinder als Beispiel.

Zum Schluß sollen die aufgezeigten allgemeinen Zusammenhänge durch ein geläufiges Beispiel erläutert werden. Wir wählen hierzu die elektromagnetische Beugung am ideal leitenden Zylinder unendlicher Länge bei senkrechter Anstrahlung.

Der Radius des Zylinders sei a , seine Achse die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z . Die Anstrahlung erfolge in der x -Richtung. Je nach der Polarisierung ist dann das Magnetfeld der einfallenden Strahlung

$$\mathfrak{H}_{0y} = A e^{ikhx} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H}_{0z} = B e^{ikhx} \quad (61)$$

mit beliebiger Amplitude A oder B . Die Integralgleichung (26) zerfällt in 2 Gleichungen, die sich auf die beiden Polarisationsfälle beziehen. Die beiden Fälle können gleichzeitig als Beispiele zweier skalarer Beugungsprobleme mit den Randbedingungen $u = 0$ und $\partial u / \partial n = 0$ aufgefaßt werden. Man erhält die Gleichungen auf demselben Wege wie die Gl. (40) und (41). Das (39) entsprechende Integral verschwindet dabei, da \mathfrak{F} ebenso wie \mathfrak{H}_0 von z unabhängig und $\partial G / \partial z_Q$ bezüglich $z_Q - z_P$ ungerade ist. Die Gleichungen lauten bei Verwendung von Zylinderkoordinaten r, φ, z , wenn wir die Koordinaten des Aufpunktes P mit großen, die des Integrationspunktes Q mit kleinen Buchstaben bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} F_z(\Phi) + a \int \left(\frac{\partial G(rPQ)}{\partial R} \right)_{R=r=a} \cdot F_z(\varphi) d\varphi dz &= \mathfrak{H}_{0\varphi}(a, \Phi), \\ \frac{1}{2} F_\varphi(\Phi) - a \int \left(\frac{\partial G(rPQ)}{\partial r} \right)_{R=r=a} \cdot F_\varphi(\varphi) d\varphi dz &= -\mathfrak{H}_{0z}(a, \Phi). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Bei Ausführung der Integration über z geht die GREENSche Funktion (4) des dreidimensionalen Raumes in die der Ebene

$$\bar{G}(P, Q) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k r_{PQ}), \quad r_{PQ} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \Phi)} \quad (63)$$

über. $H_0^{(1)}$ ist die erste HANKELSche Funktion mit dem Index 0. Ihr Faktor in (63) berechnet sich so, daß sich \bar{G} bei $Q = P$ wie $\frac{1}{2\pi} \lg \frac{\text{const}}{r_{PQ}}$ verhält. Wegen der Symmetrie von r_{PQ} in R und r wird für $R = r = a$:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial R} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial R} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \{ \bar{G}_{R=r=a} \}. \quad (64)$$

Auf dem Zylindermantel ist

$$r_{PQ} = 2a \left| \sin \frac{\chi}{2} \right| \quad \text{mit} \quad \chi = \varphi - \Phi \quad (65)$$

zu setzen, und (62) geht mit Rücksicht auf (61) und (63) bis (65) über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} F_z(\Phi) + \frac{ia}{8} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}\left(2ka \sin \frac{\chi}{2}\right) \cdot F_z(\Phi + \chi) d\chi &= A e^{i k a \cos \Phi} \cos \Phi, \\ \frac{1}{2} F_\varphi(\Phi) - \frac{ia}{8} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}\left(2ka \sin \frac{\chi}{2}\right) \cdot F_\varphi(\Phi + \chi) d\chi &= -B e^{i k a \cos \Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Entwickelt man hierin die rechten Seiten und die unbekanntenen Funktionen nach FOURIER:

$$\left. \begin{aligned} e^{i k a \cos \Phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k a) e^{i n \Phi}, \\ e^{i k a \cos \Phi} \cos \Phi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n-1} J'_n(k a) e^{i n \Phi}, \\ F_z(\Phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i n \Phi}, \quad F_\varphi(\Phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i n \Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

so erhält man mit der Abkürzung

$$C_n = \frac{ia}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}\left(2ka \sin \frac{\chi}{2}\right) e^{i n \chi} d\chi \quad (68)$$

durch Koeffizientenvergleich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + C_n) a_n &= A i^{n-1} J'_n(k a), \\ \frac{1}{2} (1 - C_n) b_n &= -B i^n J_n(k a). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

J_n ist die BESSELSche Funktion n -ter Ordnung. Striche bedeuten hier und im folgenden Ableitungen.

(68) berechnet man am einfachsten mit Hilfe des Additionstheorems

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \chi}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k r) H_n^{(1)}(k R) e^{i n \chi} \\ &\text{für } R \geq r, \quad 0 < \chi < 2\pi, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

das für $R = r = a$ in

$$H_0^{(1)}\left(2ka \sin \frac{\chi}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k a) H_n^{(1)}(k a) e^{i n \chi} \quad (71)$$

übergeht. Mit Rücksicht auf

$$J_{-n} = (-1)^n \cdot J_n, \quad H_{-n}^{(1)} = (-1)^n \cdot H_n^{(1)} \quad (72)$$

erhält man

$$C_n = \frac{i\pi k a}{2} [J'_n(k a) H_n^{(1)}(k a) + J_n(k a) H_n^{(1)'}(k a)]. \quad (73)$$

Mit dem Wert

$$J'_n(k a) H_n^{(1)}(k a) - J_n(k a) H_n^{(1)'}(k a) = \frac{2}{i\pi k a} \quad (74)$$

der WRONSKISCHEN Determinante ergibt sich weiter

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_n &= i\pi k a J'_n(k a) H_n^{(1)}(k a), \\ 1 - C_n &= -i\pi k a J_n(k a) H_n^{(1)'}(k a), \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

womit aus (69) und (67) die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} F_z(\Phi) &= -\frac{2A}{\pi k a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n e^{i n \Phi}}{H_n^{(1)}(k a)} \\ F_\varphi(\Phi) &= -\frac{2iB}{\pi k a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n e^{i n \Phi}}{H_n^{(1)'}(k a)} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

für den Oberflächenstrom folgen.

Aus (76) kann man das Magnetfeld der gebeugten Welle $\mathfrak{H}^b = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ mittels der zweiten Gl. (19) berechnen, die man zweckmäßig in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_r^b(R, \Phi) &= \frac{a}{R} \int \frac{\partial \bar{G}(R, \Phi; a, \varphi)}{\partial \Phi} F_z(\varphi) d\varphi \\ \mathfrak{H}_\varphi^b(R, \Phi) &= -a \int \frac{\partial \bar{G}(R, \Phi; a, \varphi)}{\partial R} F_z(\varphi) d\varphi \\ \mathfrak{H}_z^b(R, \Phi) &= -a \int \frac{\partial \bar{G}(R, \Phi; a, \varphi)}{\partial a} F_\varphi(\varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

verwendet. Bei der ersten Gl. (77) ist $\text{grad}_Q G = -\text{grad}_P G$ benutzt. Die Integrale, in die \bar{G} nach (63) einzusetzen ist, lassen sich mit Hilfe von (70) ausrechnen, wobei sich die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_r^b(R, \Phi) &= \frac{A}{kR} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n i^n \frac{J_n(k a)}{H_n^{(1)}(k a)} H_n^{(1)}(k R) e^{i n \Phi} \\ \mathfrak{H}_\varphi^b(R, \Phi) &= i A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(k a)'}{H_n^{(1)}(k a)} H_n^{(1)'}(k R) e^{i n \Phi} \\ \mathfrak{H}_z^b(R, \Phi) &= -B \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J'_n(k a)}{H_n^{(1)'}(k a)} H_n^{(1)}(k R) e^{i n \Phi} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

ergeben, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der üblichen Rechenmethoden.