Bemerkung über die Form der Jacobischen zweiten Integrale der Bewegungen.

Von **V. S. Vrkljan** in Zagreb.

(Eingegangen am 11. August 1925.)

Es wird eine systematische Diskussion über die Form der sogenannten Jacobischen zweiten Integrale der Bewegungen gegeben, aber nur im Falle der Separation der Zeit und der Variablen und wenn keine Variable zyklisch ist. Der Fall, daß einige Koordinaten zyklisch sind, wird hier nicht erörtert.

Bekanntlich führt uns die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$S = -Ht + W(q_1, \dots q_n; \alpha_2, \dots \alpha_n) \tag{1}$$

(die Konstanten $H, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sind voneinander unabhängig) zu den Jacobischen Integralen der Bewegungen [1])

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 2, \dots n), \tag{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial H} = \gamma, \tag{3}$$

wo die n Konstanten $\gamma, \beta_2, \dots \beta_n$ voneinander unabhängig sind.

In den Lehrbüchern [2]) über die Hamilton-Jacobische Theorie findet man gewöhnlich nur über die Form der Gleichung (3) eine nähere Ausführung. Man erhält nämlich bei der Anwendung der Gleichung (1) auf die Gleichung (3)

$$\frac{\partial W}{\partial H} = t + \gamma \tag{4}$$

und die Gleichungen (2) ergeben

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 2, \dots n). \tag{5}$$

Es wird aber nichts Näheres über die Form der Lösungen gesagt. Nach Boltzmann [3]) und Whittaker [4]) könnte man wieder meinen, daß die Koordinaten $q_1, \dots q_n$ nur als Funktionen der Zeit erhaltbar sind.

---

[1]) Die sogenannten intermediären Integrale werden wir nicht betrachten.

[2]) Vgl. z. B. C. Schaefer, Prinzipe der Dynamik 1919, S. 62; C. L. Charlier, Mechanik des Himmels I, 1902, S. 66; M. Planck, Allg. Mechanik 1921, S. 182 u. 184.

[3]) L. Boltzmann, Prinzipe der Mechanik II, 1904, S. 223.

[4]) E. T. Whittaker, Analytische Dynamik 1924, S. 336.

Da es in manchen Fällen notwendig ist, von vornherein die Rechnung so durchzuführen, um die gewünschte Form der Integrale zu erhalten, so soll diese Arbeit eine systematische nähere Diskussion über die Form der erwähnten Jacobischen zweiten Integrale geben [1]).

A. Um die Form der Integrale der Bewegungen im Falle der Separation der Variablen durchstudieren zu können, werden wir nicht n unabhängige Konstanten $H, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, sondern $n+1$ voneinander abhängige Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, H$ in die Rechnung einführen. Wir setzen also voraus, daß unsere Gleichung (1) die Form (keine Variable ist zyklisch!)

$$S = -Ht + \sum_{i=1}^{i=n} W_i(q_i, \alpha_i) \tag{6}$$

mit

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} H_i(\alpha_i) \tag{7}$$

hat, wo $H_i(\alpha_i)$ irgend eine Funktion von α_i bedeutet [2]); die Jacobischen zweiten Integrale der Bewegungen werden dann

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} t + \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_i(q_i, \alpha_i) = \frac{d H_i}{d \alpha_i} t + \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung sieht man sofort, daß wir durch das eben beschriebene Verfahren einzelne Koordinaten als Funktionen der Zeit bebekommen (ob explizite oder implizite, hängt selbstverständlich von der Art des Ausdruckes $\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i}$ ab).

B. Wenn wir aber in der Gleichung (6) eine der Konstanten α_i mittels der Gleichung (7) eliminieren, z. B. die Konstante α_c, welche in Beziehung auf die Gleichung (7) eine Funktion von $H, \alpha_1, \ldots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \ldots \alpha_n$ ist,

$$\alpha_c = h_c(H, \alpha_1, \ldots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \ldots \alpha_n), \tag{10}$$

so geht die Gleichung (6) über in die Gleichung

$$S = -Ht + W_1(q_1, \alpha_1) + \cdots + W_{c-1}(q_{c-1}, \alpha_{c-1}) + W_c[q_c, h_c(H, \alpha_1, \cdots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \cdots \alpha_n)] + W_{c+1}(q_{c+1}, \alpha_{c+1}) + \cdots + W_n(q_n, \alpha_n). \tag{11}$$

[1]) Voraussetzung: Separation der Variablen, keine Variable ist zyklisch.

[2]) Es wird im einfachsten Falle $H_i(\alpha_i) = \alpha_i$ gesetzt, man findet aber in den Lehrbüchern auch $H_i(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{2m}$ oder $H_i(\alpha_i) = \frac{\alpha_i^2}{2m}$ (wenn es sich um die Bewegungsgleichungen eines einzigen Massenpunktes von der Masse m handelt), vgl. z. B. Sommerfeld, Atombau, 4. Aufl., 1924, S. 783, oder Boltzmann, l. c., S. 227.

Nach Jacobi sind dann die Integrale der Bewegungen durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_i(q_i, \alpha_i) + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_c[q_c, h_c(H, \alpha_1, \dots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \dots \alpha_n)] = \beta_i'$$

$$(i = 1, \cdots c-1, c+1, \cdots n), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial H} W_c[q_c, h_c(H, \alpha_1, \dots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \dots \alpha_n)] = t + \beta_c'. \tag{13}$$

Wir sehen hieraus, daß die $n-1$ Gleichungen (12) uns die Beziehungen zwischen jeder von $n-1$ q_i-Koordinaten und einer konstanten Koordinate q_c liefern, die Gleichung (13) aber die Koordinate q_c (explizite oder implizite) als Funktion der Zeit ergibt.

C. Wenn wir in die Gleichungen (12) und (13) den Wert für $h_c(H, \alpha_1, \dots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \dots \alpha_n)$ aus (10) substituieren und beachten, daß

$$\frac{\partial W_c}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W_c}{\partial \alpha_c} \cdot \frac{\partial \alpha_c}{\partial \alpha_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_c}{\partial H} = \frac{\partial W_c}{\partial \alpha_c} \cdot \frac{\partial \alpha_c}{\partial H} \tag{14}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_i(q_i, \alpha_i) + \frac{\partial}{\partial \alpha_c} W_c(q_c, \alpha_c) \cdot \frac{\partial \alpha_c}{\partial \alpha_i} = \beta_i' \quad (i = 1, \dots c-1, c+1, \dots n), \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_c} W_c(q_c, \alpha_c) \cdot \frac{\partial \alpha_c}{\partial H} = t + \beta_c'. \tag{16}$$

Durch Elimination von $\frac{\partial}{\partial \alpha_c} W_c(q_c, \alpha_c)$ aus (15) und (16) erhält man bei Beachtung, daß nach (7)

$$\frac{\partial \alpha_c}{\partial \alpha_i} = -\frac{\frac{d H_i}{d \alpha_i}}{\frac{d H_c}{d \alpha_c}}, \qquad \frac{\partial \alpha_c}{\partial H} = \frac{1}{\frac{d H_c}{d \alpha_c}} \tag{17}$$

ist,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_i(q_i, \alpha_i) = \frac{d H_i}{d \alpha_i} t + \beta_c' \frac{d H_i}{d \alpha_i} + \beta_i' \tag{18}$$

oder durch Substitution

$$\beta_c' \cdot \frac{d H_i}{d \alpha_i} + \beta_i' = \beta_i$$

die Gleichung (9), aber nur für $i = 1, \dots c-1, c+1, \dots n$.

Eine entsprechende Gleichung für q_c folgt aus (16) bei Beachtung von (17). Wir haben also auch in (18) und (16) wieder die n Gleichungen (9) erhalten.

D. Wir haben in (12) die Gleichungen zwischen q_i und q_c erhalten. Wir können aber aus (12) auch Gleichungen zwischen q_i und q_j $(i, j = 1, \dots c-1, c+1, \dots n, i \neq j)$ bekommen. Zu diesem Zwecke stellen wir die Gleichung (12) für q_j-Koordinaten auf, dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} W_j (q_j, \alpha_j) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} W_c [q_c, h_c (H, \alpha_1, \dots \alpha_{c-1}, \alpha_{c+1}, \dots \alpha_n)] = \beta_j'. \quad (19)$$

Durch ein analoges Verfahren, welches uns von der Gleichung (12) zu der Gleichung (15) führte, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} W_j (q_j, \alpha_j) + \frac{\partial}{\partial \alpha_c} W_c (q_c, \alpha_c) \cdot \frac{\partial \alpha_c}{\partial \alpha_j} = \beta_j'. \quad (20)$$

Durch Elimination von $\frac{\partial}{\partial \alpha_c} W_c (q_c, \alpha_c)$ aus (15) und (20) bekommt man, wenn man beachtet, daß die erste Gleichung (17) auch für α_j gültig ist $\left(\frac{\partial \alpha_c}{\partial \alpha_j} = -\frac{d H_j}{d \alpha_j} \Big/ \frac{d H_c}{d \alpha_c}\right)$,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} W_i (q_i, \alpha_i) \cdot \frac{d H_j}{d \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} W_j (q_j, \alpha_j) \cdot \frac{d H_i}{d \alpha_i} = \beta_i' \cdot \frac{d H_j}{d \alpha_j} - \beta_j' \cdot \frac{d H_i}{d \alpha_i}$$
$$(i, j = 1, \dots c-1, c+1, \dots n; \ i \neq j), \quad (21)$$

also ein Gleichungssystem, das uns die Verbindung zwischen den Koordinaten q_i und q_j liefert.

Dasselbe Gleichungssystem kann auch auf einem einfacheren Wege gefunden werden, nämlich durch Elimination von t aus zwei nach der Vorlage von (9) für i und j aufgeschriebenen Gleichungen. Allerdings kann man in diesem letzten Falle außer den Gleichungen (21) auch die unter (12) bzw. (15) enthaltenen Gleichungen finden, wenn man nämlich i und j nicht — wie in (21) — nur $1, \dots c-1, c+1, \dots n$, sondern überhaupt $1, 2, \dots n$ gleichsetzt (selbstverständlich bei $i \neq j$).

Deswegen schreiben wir jetzt statt (21) kürzer und allgemeiner

$$\boxed{\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d H_j}{d \alpha_j} - \frac{\partial W_j}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{d H_i}{d \alpha_i} = \gamma_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, \dots n; \ i \neq j), \quad (22)$$

wo γ_{ij} willkürliche Konstanten bedeuten.

Daß die Gleichungen (22) gleichfalls als Jacobische Lösungen, d. h. Bewegungsintegrale aufzufassen sind, kann man auch folgendermaßen beweisen.

Differenzieren wir zunächst die Gleichungen (22) nach t, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_i \partial q_i} \dot{q}_i \frac{d H_j}{d \alpha_j} - \frac{\partial^2 W_j}{\partial \alpha_j \partial q_j} \dot{q}_j \frac{d H_i}{d \alpha_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots n; \ i \neq j). \quad (23)$$

Daß diese Gleichung eine Identität ist, läßt sich folgenderweise zeigen. Durch Differentiation der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots q_n; \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial W_n}{\partial q_n}\right) = 0 \tag{24}$$

nach α_i (bzw. α_j) und mit Benutzung von $\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i \left(\text{bzw. } \frac{\partial W_j}{\partial q_j} = p_j\right)$ ergibt sich

$$-\frac{d H_i}{d \alpha_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 W_i}{\partial q_i \partial \alpha_i} = 0 \tag{25}$$

bzw.

$$-\frac{d H_j}{d \alpha_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 W_j}{\partial q_j \partial \alpha_j} = 0, \tag{26}$$

welche Gleichungen identisch befriedigt sind.

Wenn wir die Gleichung (25) mit $\frac{d H_j}{d \alpha_j}$, die Gleichung (26) mit $\frac{d H_i}{d \alpha_i}$ multiplizieren und die so erhaltenen Gleichungen voneinander subtrahieren, erhält man

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_i \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{d H_j}{d \alpha_j} - \frac{\partial^2 W_j}{\partial \alpha_j \partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{d H_i}{d \alpha_i} = 0,$$

welche Gleichung identisch befriedigt ist und auf Grund der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ mit (23) übereinstimmt.

Nach der Gleichung (22) können wir also, wenn erforderlich, die Beziehung zwischen irgendwelchen zwei Koordinaten als Jacobische Lösung sofort aufschreiben. Als Beispiele dafür können Wurfbewegung und Oszillatorbewegung im Raume dienen.

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, daß man nach der Hamilton-Jacobischen Methode (im Falle der Separation der Zeit und der Variablen und wenn keine Variable zyklisch ist) je nach Bedarf bei der Rechnung schon von vornherein so verfahren kann, daß man als Lösungen entweder solche Formen der Bewegungsgleichungen erhält, in welchen die Koordinaten als Funktionen der Zeit ausgedrückt sind, oder aber Gleichungen, in welchen die Beziehungen zwischen den Koordinaten selbst dargestellt werden.

Zagreb, August 1925.