Zeitschrift für Physik, Bd. 130, S. 468—476 (1951).

Die erzwungenen Schwingungen des harmonischen Oszillators nach der Quantentheorie.

Von

GÜNTHER LUDWIG, Berlin.

(*Eingegangen am 13. Juli 1951.*)

Die Bewegung eines harmonischen Oszillators unter Einwirkung einer Kraft $eF(t)$ wird für beliebiges $F(t)$ exakt gelöst.
Das DIRACsche Näherungsverfahren gibt die ersten Gliederung einer Reihenentwicklung nach Potenzen des Kopplungsparameters e.

Der HAMILTON-Operator für ein Teilchen der Masse m, das an eine Ruhelage $q=0$ mit der potentiellen Energie $\frac{m\omega^2}{2}q^2$ gebunden ist und von einer äußeren Kraft $eF(t)$ beeinflußt wird, lautet bekanntlich:

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{m\omega^2}{2}q^2-e\,q\,F(t), \tag{1}$$

wobei p und q der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation $[p,q]=\hbar/i$ genügen. Um die Bezeichnungsweise zu skizzieren, soll der frei schwingende Oszillator kurz behandelt werden. Im ersten Teil benutzen wir das HEISENBERG-Bild, wo die Observablen R zeitveränderlich nach der Gleichung $-i\hbar\dot{R}=[H,R]$ und die statistischen Operatoren (bzw. Zustände) zeitlich konstant sind. Die Lösungen des freien Oszillators mögen $P(t)$, $Q(t)$ mit

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}P^2+\frac{m\omega^2}{2}Q^2 \tag{2}$$

sein, für die ebenfalls $[P(t),Q(t)]=\hbar/i$ gelten soll. Man setze zur Abkürzung:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,Q+\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\,P\right);\qquad A^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,Q-\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\,P\right). \tag{3}$$

Aus $[P,Q]=\hbar/i$ folgt $[A,A^*]=1$ und

$$\mathcal{H}=\hbar\omega\,A^*A+\frac{\hbar\omega}{2}. \tag{4}$$

Daher genügt es, die Eigenwerte des Operators $N=A^*A$ zu bestimmen. Sei Φ_λ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von N:

$$N\Phi_\lambda=\lambda\Phi_\lambda, \tag{5}$$

so folgt durch Multiplikation mit A:

$$A N \Phi_\lambda = A \Phi_\lambda + N A \Phi_\lambda = \lambda A \Phi_\lambda$$

oder

$$N (A \Phi_\lambda) = (\lambda - 1) A \Phi_\lambda . \tag{6}$$

Also ist entweder $A \Phi_\lambda$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda - 1$ oder $A \Phi_\lambda = 0$. Ebenso folgt durch Multiplikation mit A^*:

$$N(A^* \Phi_\lambda) = (\lambda + 1) A^* \Phi_\lambda . \tag{7}$$

Wegen $\lambda (\Phi_\lambda, \Phi_\lambda) = (\Phi_\lambda, A^* A \Phi_\lambda) = (A \Phi_\lambda, A \Phi_\lambda) \geq 0$ müssen alle Eigenwerte $\lambda \geq 0$ sein. Wegen (6) muß es mindestens einen Vektor Φ_μ geben mit $A \Phi_\mu = 0$, da man sonst von einem λ ausgehend beliebige negative Eigenwerte nach (6) finden könnte. Für Φ_μ gilt

$$N \Phi_\mu = A^* A \Phi_\mu = A^* 0 = 0 , \tag{8}$$

so daß Φ_μ Eigenvektor zum Eigenwert 0 von N ist, also $\Phi_\mu = \Phi_0$. Aus (6) folgt dann sofort, daß alle λ ganze Zahlen ≥ 0 sein müssen, da man nach n-Schritten von Φ_λ auf $\Phi_{\lambda - n}$ kommt, wo bei einem n dann $A \Phi_{\lambda - n} = 0$ folgt, so daß $\lambda - n = 0$ ist.

Von Φ_0 aus lassen sich der Reihe nach die Vektoren

$$A^* \Phi_n = \sqrt{n+1}\, \Phi_{n+1} \qquad \text{oder} \qquad \Phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} A^{*n} \Phi_0 \tag{9}$$

bilden, für die $N \Phi_n = n \Phi_n$ und $(\Phi_n, \Phi_{n'}) = \delta_{n n'}$ gilt. Es folgt dann:

$$A \Phi_n = \sqrt{n}\, \Phi_{n-1} . \tag{10}$$

Setzt man Irreduzibilität des HILBERT-Raumes in bezug auf den durch P und Q erzeugten Ring voraus, so ist die obige Lösung die einzige.

Aus $\frac{\hbar}{i} \dot{A} = [\mathcal{H}, A] = -\hbar \omega A$ folgt $A(t) = A(0) e^{-i \omega t}$, woraus sich auch sofort nach (3) mit

$$P = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{m \omega \hbar}\, (A^* - A) \qquad \text{und} \qquad Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2 m \omega}}\, (A + A^*) \tag{11}$$

$P(t)$ und $Q(t)$ ergeben. In (5) bis (10) ist für A immer $A(0)$ gemeint.

Für den Fall der erzwungenen Schwingungen setzen wir $p(t)$, $q(t)$, $a(t)$ und $H(t)$ als Operatoren. Mit (1) folgt aus $\frac{\hbar}{i} \dot{a} = [H, a]$

$$\dot{a} = - i \omega a + \frac{i e}{\sqrt{2 m \hbar \omega}} F(t) , \tag{12}$$

was integriert [falls $F(t)$ erst nach der Zeit $t = 0$ wirkt]

$$a(t) = A(0) e^{-i \omega t} + \frac{i e}{\sqrt{2 m \hbar \omega}} e^{-i \omega t} \int_0^t F(\tau) e^{i \omega \tau} d\tau \tag{13}$$

ergibt, da dann auch $a(t)$ die Vertauschungsrelation $[a(t), a^*(t)] = 1$ erfüllt, da $A(0)$ es tut. Die Energie des Oszillators ist

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \hbar\omega\left(a^* a + \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $E = \hbar\omega\left(A^*(0) A(0) + \frac{1}{2}\right)$. Man möge zu dieser Zeit E mit dem Ergebnis $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ gemessen haben, so daß dann der Zustand Φ_n vorliegt. Dann folgt für den Erwartungswert $\overline{E}$ von E sehr leicht mit (13):

$$\overline{E} = (\Phi_n, E(t)\,\Phi_n) = \hbar\omega\,(n + \tfrac{1}{2} + \gamma^2 |C|^2), \tag{15}$$

wobei zur Abkürzung

$$\gamma = \frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \text{und} \quad C(t) = \int_0^t F(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

gesetzt ist. Der Zuwachs $h\omega\gamma^2|C|^2$ ist also der gleiche, wie man ihn klassisch erwartet[1].

Die Energie $E(t)$ zur Zeit t hat nach (14) dieselbe Form wie in (4) mit Operatoren a^*, a die dieselbe Vertauschungsrelation erfüllen wie A^*, A. Daher gibt es einen (und nur einen Vektor) Ψ_0 mit $a(t)\,\Psi_0 = 0$. (Es ist Ψ_0 von t abhängig, da $a(t)$ von t abhängig!)

Mit $\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{*n} \Psi_0$ folgt $a^* a \Psi_n = n \Psi_n$ und

$$E(t)\,\Psi_n = \hbar\omega\,(n + \tfrac{1}{2})\,\Psi_n. \tag{16}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Energiewert $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ zur Zeit t, wenn zur Zeit 0 der Energiewert $E_0 = \hbar\omega/2$ gemessen wurde? Da damit der Zustand Φ_0 ist, ist die Wahrscheinlichkeit für Ψ_n (d.h. für E_n zur Zeit t) gleich $|(\Psi_n, \Phi_0)|^2$.

Für dieses innere Produkt folgt mit $A(0)\,\Phi_0 = 0$

$$(\Psi_n, \Phi_0) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^{*n} \Psi_0, \Phi_0) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\Psi_0, a^n \Phi_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} (i\gamma C)^n (\Psi_0, \Phi_0),$$

und

$$|(\Psi_n, \Phi_0)|^2 = \frac{1}{n!} |\gamma C|^{2n} |(\Psi_0, \Phi_0)|^2. \tag{17}$$

Wegen $\Phi_0 = \sum_n \Psi_n (\Psi_n, \Phi_0)$ und $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ folgt

$$1 = \sum_n |(\Psi_n, \Phi_0)|^2 = e^{|\gamma C|^2} |(\Psi_0, \Phi_0)|^2.$$

---

[1] Klassisch ist $E = \hbar\omega |a|^2$ mit $a = (A(0) + i\gamma C)\, e^{-i\omega t}$, wobei $A(0)$ und a keine Operatoren sondern Zahlen sind. Somit also

$$E = \hbar\omega [|A(0)|^2 + \gamma^2 |C|^2 + \text{Realt}\,(A^*(0)\, i\gamma C)].$$

Für viele Oszillatoren, wo $A(0)$ eine beliebige Phase enthält, ist also im Mittel

$$\overline{E} = \hbar\omega\,(|A(0)|^2 + \gamma^2 |C|^2).$$

Da Ψ_0 nur bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt war, kann man einfach

$$(\Psi_0, \Phi_0) = e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}} \tag{18}$$

setzen. So erhält man schließlich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w(0\,|\,n) = \frac{|\gamma C|^{2n}}{n!} e^{-|\gamma C|^2}. \tag{19}$$

Der allgemeinere Fall, daß zur Zeit $t = 0$ der Wert E_m gemessen wurde, erfordert für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t den Wert E_n zu messen, die Aufstellung der Größe (Ψ_n, Φ_m):

$$(\Psi_n, \Phi_m) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\Psi_0, a^n \Phi_m).$$

Nach (13) ist

$$a^n = (A(0) + i\gamma C)^n e^{-in\omega t} = e^{-in\omega t} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A(0)^{n-\nu} (i\gamma C)^\nu.$$

Weiterhin folgt nach (10):

$$A(0)^p \Phi_m = \sqrt{m(m-1)\ldots(m-p+1)}\, \Phi_{m-p}.$$

Es ist dann das innere Produkt (Ψ_0, Φ_ϱ) zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned}(\Psi_0, \Phi_\varrho) &= \frac{1}{\sqrt{\varrho!}} (\Psi_0, A^*(0)^\varrho \Phi_0) = \frac{1}{\sqrt{\varrho!}} (A(0)^\varrho \Psi_0, \Phi_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varrho!}} ([a(t) e^{i\omega t} - i\gamma C]^\varrho \Psi_0, \Phi_0) = \frac{1}{\sqrt{\varrho!}} (i\gamma C^*)^\varrho (\Psi_0, \Phi_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varrho!}} (i\gamma C^*)^\varrho e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Damit erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned}(\Psi_n, \Phi_m) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}} \sum_\nu \binom{n}{\nu} \frac{(i\gamma C)^\nu (i\gamma C^*)^{m-n+\nu}}{\sqrt{(m-n+\nu)!}} \times \\ &\qquad \times \sqrt{m(m-1)\ldots(m-n+\nu+1)} \\ &= \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-in\omega t} e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}} (i\gamma C^*)^{m-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-|\gamma C|^2)^\nu \times \\ &\qquad \times \frac{1}{(m-n+\nu)!}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mit $\sigma = 0$ für $m \geqq n$ und $\sigma = n - m$ für $m \geqq n$.

Die ϱ-te Ableitung des LAGUERREschen Polynoms:

$$L_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{n!}{\nu!} (-x)^\nu$$

lautet

$$L_n^\varrho(x) = \sum_{\nu=\varrho}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{n!}{(\nu-\varrho)!} (-x)^{\nu-\varrho} (-1)^\varrho . \tag{22}$$

Damit erhält man für $m \leq n$:

$$\sum_{\nu=n-m}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-x)^\nu}{(m-n+\nu)!} = \frac{1}{n!} x^{n-m} L_n^{n-m}(x)$$

und somit:

$$(\Psi_n, \Phi_m) = \sqrt{\frac{m!}{n!}} \frac{1}{n!} e^{-in\omega t} e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}} (-i\gamma C)^{n-m} L_n^{n-m}(|\gamma C|^2); \tag{23a}$$

und für $m \geq n$ (mit $\mu = n - \nu$ und $\varrho = m - \mu$):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-x)^\nu}{(m-n+\nu)!} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{(-x)^{n-\mu}}{(m-\mu)!} = \frac{n!}{m!} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{m!}{(m-\mu)!} \frac{(-x)^{n-\mu}}{\mu!(n-\mu)!}$$

$$= \frac{n!}{m!} \sum_{\varrho=m-n}^{m} \frac{m!}{\varrho!} \frac{(-x)^{\varrho-m+n}}{(m-\varrho)!(\varrho-m+n)!} = \frac{n!}{m!} (-1)^{n-m} \frac{1}{m!} L_m^{m-n}(x)$$

und somit

$$(\Psi_n, \Phi_m) = \sqrt{\frac{n!}{m!}} \frac{1}{m!} e^{-in\omega t} e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}} (-i\gamma C^*)^{m-n} L_m^{m-n}(|\gamma C|^2). \tag{23b}$$

Die Absolutquadrate $|(\Psi_n, \Phi_m)|^2$ geben die Wahrscheinlichkeit $w(m|n)$ dafür, daß man nach einer Energiemessung zur Zeit 0 mit dem Ergebnis E_m danach zur Zeit t einen Energiewert E_n mißt:

$$w(m|n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{m!}{(n!)^3} e^{-|\gamma C|^2} (|\gamma C|^2)^{n-m} \left| L_n^{n-m}(|\gamma C|^2) \right|^2 & \text{für} \quad m \leq n \\ \frac{1}{(n!)^2} e^{-|\gamma C|^2} \left| L_n(|\gamma C|^2) \right|^2 & \text{für} \quad n = m \\ \frac{n!}{(m!)^3} e^{-|\gamma C|^2} (|\gamma C|^2)^{m-n} \left| L_m^{m-n}(|\gamma C|^2) \right|^2 & \text{für} \quad m \geq n. \end{array} \right\} \tag{24}$$

Die bisher berechneten inneren Produkte (Ψ_n, Φ_m) geben uns eine Möglichkeit, auch die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi(y,t) + \frac{m\omega^2}{2} y^2 \varphi(y,t) - eF(t)\, y\, \varphi(y,t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(y,t) \tag{25}$$

zu finden. Wir notieren die Eigenfunktionen Φ_n in der Ortsdarstellung

$$\varphi_n(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} y \right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{y^2}{2}}, \tag{26}$$

wo $H_n(y)$ die HERMITEschen Polynome mit

$$e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{t^n}{n!} \tag{27}$$

sind.

Die Lösung der Bewegungsgleichung $-i\hbar\dot{a} = [H, a]$ lautet mit einer unitären Transformation $U(t)$, die der Gleichung

$$\dot{U} = \frac{i}{\hbar} H U \quad \text{mit} \quad U(0) = 1$$

genügt:

$$a(t) = U a(0) U^*. \tag{28}$$

Läßt man die Operatoren konstant und läßt sich die Zustände zeitlich ändern, d.h. geht man vom HEISENBERG- zum SCHRÖDINGER-Bild über, so folgt

$$\varphi(t) = U^* \varphi(0) \tag{29}$$

und damit die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi}(t) = \mathring{H}\varphi(t), \tag{30}$$

wobei $\mathring{H}$ der Energieoperator gebildet mit $p(0)$, $q(0)$ ist, also von t *nur* explizit abhängen kann:

$$\mathring{H} = \frac{1}{2m} p(0)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q(0)^2 + eF(t)\, q(0). \tag{31}$$

Es war

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(t)^n \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} U a^*(0)^n U^* \Psi_0$$

mit

$$a(t)\Psi_0 = 0 = U a(0) U^* \Psi_0.$$

Daraus folgt, daß

$$A(0) U^* \Psi(0) = 0.$$

Wegen $A(0)\Phi_0 = 0$ muß

$$U^* \Psi_0 = \alpha \Phi_0$$

sein. Daraus folgt:

$$\Psi_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n!}} U a^*(0)^n \Phi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{n!}} U A^*(0)^n \Phi_0 = \alpha U \Phi_n.$$

Um α zu berechnen, bilde man

$$\dot{\Psi}_0 = \dot{\alpha} U \Phi_0 + \alpha \dot{U} \Phi_0 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \alpha U \Phi_0 + \frac{i}{\hbar} \alpha H U \Phi_0,$$

$$\dot{\Psi}_0 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \Psi_0 + \frac{i}{\hbar} H \Psi_0.$$

Daraus:

$$(\Psi_0, \dot{\Psi}_0) = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{i}{\hbar}(\Psi_0, H\Psi_0).$$

Wegen:

$$H = \hbar\omega\left(a^* a + \frac{1}{2}\right) - e\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,F(t)\,(a^* + a)$$

wird hiermit

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{i\omega}{2} + (\Psi_0, \dot{\Psi}_0).$$

Um das letzte innere Produkt zu berechnen, benutzen wir nach (20) die Beziehung:

$$\Psi_0 = \sum_n \Phi_n(\Phi_n, \Psi_0) = \sum_n \Phi_n(-i\gamma C)^n e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}}.$$

Durch zeitliche Differentiation folgt:

$$\dot{\Psi}_0 = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\Phi_n\Bigg[n(i\gamma C)^{n-1}(-i)\frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F(t)\,e^{i\omega t} -$$

$$-(-i\gamma C)^n \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F(t)\,e^{i\omega t}\gamma C^* + \frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F(t)\,e^{-i\omega t}\gamma C\right)\Bigg]e^{-\frac{|\gamma C|^2}{2}}$$

Damit wird:

$$(\Psi_0, \dot{\Psi}_0) = \sum_n \frac{1}{n!}e^{-|\gamma C|^2}\Bigg[n(|\gamma C|^2)^{n-1}\gamma C^*\frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F\,e^{i\omega t} -$$

$$-(|\gamma C|^2)^n\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F\,e^{i\omega t}\gamma C^* + \frac{e}{\sqrt{2m\hbar\omega}}F\,e^{-i\omega t}\gamma C\right)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{2}\gamma F(t)\,(e^{i\omega t}\gamma C^* - e^{-i\omega t}\gamma C).$$

Somit folgt für α:

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{i\omega}{2} + \frac{\gamma^2}{2}F(t)\,(e^{i\omega t}C^* - e^{-i\omega t}C),$$

und daraus

$$\alpha = e^{-\frac{i\omega}{2}t + \frac{\gamma^2}{2}\int\limits_0^t F(\tau)\,(e^{i\omega\tau}C^*(\tau) - e^{-i\omega\tau}C(\tau))\,d\tau} \tag{32}$$

Wegen

$$\Psi_n = \sum_m \Phi_m(\Phi_m, \Psi_n) = \alpha\, U\Phi_n$$

folgt:

$$U\Phi_n = \sum_m \Phi_m(\Phi_m, \Psi_n)\,\alpha^*, \qquad U^*\Phi_n = \sum_m \Phi_m(\Psi_m, \Phi_n)\,\alpha.$$

Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung mit

$$\varphi(y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(y)\,a_m; \qquad \varphi_m(y) \text{ nach } (26)$$

lautet also

$$\varphi(y,t) = U^* \varphi(y,0) = \sum_n U^* \varphi_n(y)\, a_n = \sum_{n,m} \varphi_m(y)\, (\Psi_m, \Phi_n)\, \alpha\, a_n, \tag{33}$$

wobei α und (Ψ_m, Φ_n) nach (32) und (23a u. b) einzusetzen sind.

Diracsche Näherung: Mit

$$\varphi(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(y)\, e^{-i\omega(m+\frac{1}{2})t} c_m(t)$$

geht (25) über in

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{c}_n = -e F(t) \sum_n e^{i\omega(m-n)t} y_{nm} c_m, \tag{34}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} y_{n,n-1} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n} \\ y_{n,n+1} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1} \\ \text{alle anderen}\quad y_{nm} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Somit folgt aus (34):

$$\dot{c}_n = i\gamma F(t) \left[e^{i\omega t} \sqrt{n}\, c_{n-1} + e^{-i\omega t} \sqrt{n+1}\, c_{n+1}\right]. \tag{36}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $c_n = a_n$. Man setzt an:

$$c_n(t) = a_n + \gamma c_n^{(1)}(t) + \gamma^2 c_n^{(2)}(t) + \cdots \tag{37}$$

und erhält damit für die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung:

$$\dot{c}_n^{(1)} = i F(t) \left[e^{i\omega t} \sqrt{n}\, a_{n-1} + e^{-i\omega t} \sqrt{n+1}\, a_{n+1}\right], \tag{38a}$$

$$) = i F(t) \left[e^{i\omega t} \sqrt{n}\, c_{n-1}^{(1)}(t) + e^{-i\omega t} \sqrt{n+1}\, c_{n+1}^{(1)}(t)\right]. \tag{38b}$$

Aus (38a) folgt sofort:

$$c_n^{(1)} = i C(t) \sqrt{n}\, a_{n-1} + i C^*(t) \sqrt{n+1}\, a_{n+1} \tag{39}$$

mit $C(t)$ nach (15). Damit geht (38b) über in:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n^{(2)} = i F(t) \Big[e^{i\omega t} i C \sqrt{n(n-1)}\, a_{n-2} + {} \\ + \left(e^{i\omega t} i C^* n + e^{-i\omega t} i C (n+1)\right) a_n + e^{-i\omega t} i C^* \sqrt{(n+1)(n+2)}\, a_{n+2}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Ableitung von $C(t)$ mit $\dot{C}(t)$, so kann man dies auch schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n^{(2)} = -\dot{C} C \sqrt{n(n-1)}\, a_{n-2} - (n \dot{C} C^* + (n+1) \dot{C}^* C)\, a_n - {} \\ - \dot{C}^* C^* \sqrt{(n+1)(n+2)}\, a_{n+2}. \end{aligned}$$

Das erste und letzte Glied auf der rechten Seite läßt sich sofort ausintegrieren, da z.B. $\dot{C}C = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}C^2$ ist.

Weiterhin ist

$$n\dot{C}C^* + (n+1)\dot{C}^*C \equiv \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}(CC^*) + \frac{1}{2}(\dot{C}^*C - \dot{C}C^*),$$

so daß schließlich:

$$\left.\begin{aligned} c_n^{(2)} &= -\tfrac{1}{2}C^2\sqrt{n(n-1)}\,a_{n-2} - \\ &-\left[(n+\tfrac{1}{2})|C|^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^t \dot{C}^*(\tau)C(\tau) - \dot{C}(\tau)C^*(\tau)\,d\tau\right]a_n - \\ &-\tfrac{1}{2}C^{*2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,a_{n+2}. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Nach (33) und (34) muß aber exakt gelten:

$$c_n = e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t}\sum_m (\Psi_n, \Phi_m)\,\alpha\, a_m.$$

Mit (23a u. b) und (32) folgt:

$$\left.\begin{aligned} c_n = {} & e^{-\frac{\gamma^2|C|^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}\int_0^t (\dot{C}^*C - \dot{C}C^*)\,d\tau} \times \\ & \times\left\{\sum_{m\le n}\sqrt{\frac{m!}{n!}}\frac{1}{n!}(-i\gamma C)^{n-m}L_n^{n-m}(\gamma^2|C|^2)\,a_m + \right. \\ & \left. + \sum_{m>n}\sqrt{\frac{n!}{m!}}\frac{1}{m!}(-i\gamma C^*)^{m-n}L_m^{m-n}(\gamma^2|C|^2)\,a_m\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Dies läßt sich in eine konvergente (!) Reihe nach γ entwickeln, deren erste Glieder man leicht als mit (39) (40) übereinstimmend feststellt.

Berlin, Institut für theoretische Physik der freien Universität.