

Elastische Nachwirkung und Plastizität.

Von **Richard Becker** in Berlin-Grünwald.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 8. Mai 1925.)

Es wird gezeigt, daß die Boltzmannsche Theorie der elastischen Nachwirkung in ihrer allgemeinsten Form abgeleitet werden kann aus der Annahme einer plastischen Inhomogenität des Materials, wenn man annimmt, daß die Plastizität besteht in einer der Kraft proportionalen Fließgeschwindigkeit. Da jedoch die Plastizität der Metalle sicher nicht diesem Gesetz folgt, ergibt sich die Notwendigkeit einer Modifikation der Boltzmannschen Theorie. Diese Abänderung wird durchgeführt unter der Annahme, daß das Fließen von Metallen in einzelnen, durch Wahrscheinlichkeitsgesetze geregelten diskreten Sprüngen erfolgt. Die Konsequenzen dieser Annahme werden in einigen der experimentellen Prüfung zugänglichen Fällen ausgewertet. — Inhalt: I. Die Boltzmannsche Theorie. II. Plastische Inhomogenität als Ursache der Nachwirkung. III. Quantitative Durchführung der v. Wartenberg'schen Theorie. IV. Versuch einer Berücksichtigung der wirklichen plastischen Eigenschaften von Metallen.

Einleitung.

Wir verdanken L. Boltzmann eine der Wirklichkeit in wesentlichen Zügen gerecht werdende phänomenologische Theorie der elastischen Nachwirkung. Die Nachwirkung kann danach gedeutet werden als eine Art Erinnerungsvermögen des Materials an seine früheren Erlebnisse. Während man früher die Nachwirkung als eine selbständige Eigenschaft der betreffenden Körper ansah, faßt man sie neuerdings in der Regel auf als einen Spezialfall der Plastizität, welcher immer dann zu erwarten ist, wenn das Material „plastisch inhomogen“ ist, d. h. wenn der Körper regellos zusammengesetzt ist aus sehr vielen und plastisch verschiedenartigen Teilgebieten (aus „harten“ und „weichen“ Teilen). Es ist mehrfach — und insbesondere durch v. Wartenberg — ausgeführt worden, wie man von dieser Annahme aus qualitativ die Nachwirkungsphänomene verstehen kann. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine quantitative Ableitung der Boltzmannschen Theorie aus dieser Vorstellung heraus gegeben, welche übrigens implizite bereits in einer viel älteren und von ganz anderen Anschauungen ausgehenden Arbeit von Wiechert enthalten ist. Dabei ist es natürlich nötig, die „Plastizität“ der Teilgebiete irgendwie formelmäßig zu charakterisieren. Es zeigt sich nun, daß man gerade dann zur Boltzmannschen Formel geführt wird, wenn man die Plastizität beschreiben kann als eine der wirkenden Kraft proportionale Fließgeschwindigkeit. Nun kann diese Beschreibung vielleicht zutreffen für manche amorphen Substanzen, sie ist aber sicher ganz falsch

bei Kristallen und vor allem bei Metallen in hinreichender Entfernung vom Schmelzpunkt. Es wird daher weiterhin versucht, die Plastizität der Metalle in einer der Wirklichkeit besser entsprechenden Weise zu kennzeichnen. Man gelangt dadurch zu Ausdrücken für die Nachwirkung, welche zwar beim einfachen Be- und Entlastungsversuch mit Boltzmann übereinstimmen, dagegen ergeben sich beim Überlagerungs- und Schwingungsversuch charakteristische und experimentell gut prüfbare Abweichungen von den Forderungen der Boltzmannschen Theorie in einem Sinne, welcher mit älteren Messungen von Jordan und Sieg übereinstimmt.

I. Die Boltzmannsche Theorie.

Nach L. Boltzmann¹⁾ läßt sich die Erscheinung der elastischen Nachwirkung allgemein in folgender Weise beschreiben:

Auf einen elastischen Körper wirke eine als Funktion der Zeit vorgegebene Kraft $P(t)$. Die zugehörige Deformation y sei die der Kraftwirkung entsprechende Änderung derjenigen Koordinate des Körpers, deren Differential dy , multipliziert mit P , die von jener Kraft auf dem Weg dy geleistete Arbeit ergibt. Sieht man von Trägheitskräften ab, so ist nach der Elektrizitätstheorie (Hookesches Gesetz)

$$y(t) = \frac{F}{E} P(t),$$

wo F einen Formfaktor und E einen Elastizitätsmodul bedeutet. In jedem Augenblick ist also y von P nur um einen konstanten Faktor verschieden. Bei einem nachwirkenden Körper jedoch ist y nicht allein durch den Momentanwert von P gegeben, sondern auch durch alle früheren Werte der Kraft mitbestimmt; der Einfluß einer zur Zeit ϑ wirkenden Kraft $P(\vartheta)$ ist dabei um so größer, je länger diese Kraft einwirkte, und um so kleiner, je weiter die Wirkung dieser Kraft zeitlich zurückliegt. Hat jene Kraft während der Zeit $d\vartheta$ eingewirkt, so ist also ihr Einfluß auf den Momentanwert von y zu setzen gleich

$$\frac{F}{E} \cdot \beta P(\vartheta) \cdot \varphi(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Hier bedeutet die dimensionslose Zahl β eine Konstante, welche die absolute Größe der Nachwirkung kennzeichnet (Nachwirkungskonstante) und welche stets klein gegen 1 ist. $\varphi(t - \vartheta)$ ist die Nachwirkungsfunktion von der Dimension t^{-1} , welche für das zeitliche Abklingen des

¹⁾ Boltzmann, Ann. d. Phys., Erg.-Bd. 7, 624, 1876 (Ges. Abh. I, Nr. 30); Derselbe, Wien. Ber. 76, 815, 1877 (Ges. Abh. II, Nr. 43).

Erinnerungsvermögens maßgebend ist und häufig für weite Bereiche ihres Arguments etwa durch $\frac{1}{t - \vartheta}$ wiedergegeben werden kann. Durch Summation über alle früheren Kräfte erhält man den zeitlichen Verlauf von y unter Berücksichtigung der Nachwirkung:

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P(t) + \beta \int_{-\infty}^t P(\vartheta) \varphi(t - \vartheta) d\vartheta \right]$$

Unter Einführung der Vergangenheit $\omega = t - \vartheta$ also:

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P(t) + \beta \int_0^{\infty} P(t - \omega) \varphi(\omega) d\omega \right]. \quad (1)$$

Das Integral erstreckt sich von der Gegenwart ($\omega = 0$) rückwärts in die Vergangenheit.

Übrigens gibt Boltzmann in seinen Formeln umgekehrt den zeitlichen Verlauf der Kraft $P(t)$ als Funktion von einem vorgeschriebenen Verlauf der Deformation $y(t)$. Man erhält somit die ursprüngliche Boltzmannsche Formel durch Auflösen von (1) nach P , was ohne weiteres möglich ist, wenn man die Lösung zunächst in der unbestimmten Form

$$P(t) = P_0(t) + \beta P_1(t) + \beta^2 P_2(t) + \dots$$

in (1) einführt und die mit der gleichen Potenz von β multiplizierten Glieder einander gleichsetzt. Bei der Kleinheit der Nachwirkungserscheinungen kann man Glieder der Ordnung β^2 vernachlässigen und erhält dann genau die Boltzmannsche Form

$$P(t) = \frac{E}{F} \left[y(t) - \beta \int_0^{\infty} y(t - \omega) \varphi(\omega) d\omega \right]^1. \quad (1a)$$

¹⁾ Volterra (Drei Vorlesungen usw., Leipzig 1914, S. 159 f.) weist darauf hin, daß der Boltzmannsche Ansatz mathematisch aufgefaßt werden kann als das erste Glied einer allgemeinen Entwicklung, deren höhere Glieder sich als zweifache, dreifache usw. Integrale über die Vergangenheit darstellen lassen, also etwa die Form haben:

$$\beta' \iint P_{\vartheta_1} P_{\vartheta_2} \varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, t) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \\ + \beta'' \iiint P_{\vartheta_1} P_{\vartheta_2} P_{\vartheta_3} \varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, t) d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 + \dots$$

Die im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgeschlagene Erweiterung der Boltzmannschen Theorie wird zwar in einer formal völlig abweichenden Weise vorgenommen werden, dürfte aber trotzdem vielleicht als eine spezielle physikalische Ausführung des Volterraschen Ansatzes gedeutet werden. — Eine einfache experimentelle Prüfung des linearen Charakters der Boltzmannschen Formel bietet der im folgenden unter C angedeutete „Überlagerungsversuch“.

Wir stellen zunächst einige einfache Anwendungen von (1) zusammen, die auch zur experimentellen Bestimmung der Nachwirkungsfunktion $\varphi(\omega)$ dienen können.

A. Belastungsversuch.

$$P(t) = 0 \text{ bis } t = 0$$

$$P(t) = \text{const} = P \text{ von } t = 0 \text{ ab.}$$

Dann wird nach (1) für $t > 0$

$$y(t) = \frac{F}{E} P \left[1 + \beta \int_0^t \varphi(\omega) d\omega \right].$$

Für das hier auftretende Integral führen wir die späterhin oft benutzte Bezeichnung

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\omega) d\omega$$

ein. $\psi(t)$ nennen wir die „Belastungsfunktion“. Damit lautet also die „Belastungskurve“:

$$y(t) = \frac{F}{E} P \left[1 + \beta \psi(t) \right]. \quad (2)$$

Zahlreiche Belastungsversuche haben ergeben, daß $\psi(t)$ für weite Bereiche seines Arguments sich darstellen läßt durch

$$\psi(t) \sim \ln t, \quad \text{also} \quad \varphi(\omega) \sim \frac{1}{\omega}. \quad (3)$$

Für extrem kleine Werte von t wird das $\ln t$ -Gesetz (3) sinnlos. Es hat sich jedoch gezeigt, daß von solchen t -Werten ab, bei denen nach der vorgenommenen Belastung und Beruhigung der elastischen Schwingungen die experimentelle Aufnahme der Belastungskurve beginnen kann, das $\ln t$ -Gesetz bereits mit guter Näherung erfüllt ist. Diese Unsicherheit hinsichtlich des ersten Teiles der Belastungskurve hat eine beträchtliche Schwierigkeit für eine exakte Bestimmung des Elastizitätsmoduls E zur Folge.

B. Entlastungsversuch.

$$P(t) = 0 \text{ bis } t = -t_1,$$

$$P(t) = P = \text{const} \text{ von } t = -t_1 \text{ bis } t = 0,$$

$$P = 0 \text{ von } t = 0 \text{ ab.}$$

Für $t > 0$ wird jetzt nach (1):

$$y(t) = \frac{F}{E} P \beta \int_t^{t+t_1} \varphi(\omega) d\omega = \frac{F}{E} P \beta \left[\psi(t+t_1) - \psi(t) \right]. \quad (4)$$

Im $\ln t$ -Gebiet also:

$$y(t) = \frac{F}{E} P \beta \ln \frac{t + t_1}{t}.$$

Bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung β^2 kann man hier die konstante Belastung P ersetzen durch eine von $-t_1$ bis 0 vorgenommene konstante Deformation $y_0 = \frac{F}{E} P$. Für Zeiten $t \gg t_1$ erhält dann die Entlastungskurve (4a) die einfache Gestalt

$$y(t) = y_0 \beta \cdot \frac{t_1}{t},$$

welche zur Bestimmung der Konstanten β besonders bequem ist.

C. Überlagerungsversuch.

$$P(t) = 0 \text{ bis } t = 0,$$

$$P(t) = P_1 \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = t_1,$$

$$P(t) = P_2 \text{ von } t = t_1 \text{ bis } t = t_2,$$

$$P(t) = P_1 \text{ von } t = t_2 \text{ ab.}$$

Nach (1) wird für $t > t_2$:

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P_1 + \beta P_1 \int_0^{t-t_2} \varphi(\omega) d\omega + \beta P_2 \int_{t-t_2}^{t-t_1} \varphi(\omega) d\omega + \beta P_1 \int_{t-t_1}^t \varphi(\omega) d\omega \right]$$

oder auch

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P_1 [1 + \beta \psi(t)] + \beta (P_2 - P_1) [\psi(t - t_1) - \psi(t - t_2)] \right]. \quad (5)$$

Die vorübergehende Zusatzbelastung $P_2 - P_1$ zu der seit $t = 0$ wirkenden Last P_1 gibt Veranlassung zu einer normalen Entlastungskurve $(P_2 - P_1) [\psi(t - t_1) - \psi(t - t_2)]$ vom Typus (4), welche sich der im übrigen ungestörten Belastungskurve $1 + \beta \psi(t)$ überlagert.

Die Bedeutung dieses Versuches liegt darin, daß er eine wesentlich schärfere Prüfung des Boltzmannschen Ansatzes (1) bedeutet als der einfache Be- und Entlastungsversuch. Wir werden im Abschnitt IV die Notwendigkeit einer von (1) abweichenden Fassung der Nachwirkungserscheinungen zu begründen suchen. Dabei wird sich zeigen, daß zwar die Versuche *A* und *B* auch von der neuen Fassung unverändert beschrieben werden, daß jedoch beim Überlagerungsversuch die Zusatzlast $P_2 - P_1$ außer einer überlagerten Entlastungskurve noch eine weitergehende [und von Jordan¹⁾ anscheinend auch beobachtete] Störung der Belastungskurve $\psi(t)$ zur Folge hat.

¹⁾ Jordan, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 423, 1915.

D. Periodische Beanspruchung.

$$P(t) = 0 \text{ bis } t = 0,$$

$$P(t) = A \cdot \sin \nu t \text{ von } t = 0 \text{ ab.}$$

Gleichung (1) liefert jetzt

$$y(t) = \frac{F}{E} A \left[\sin \nu t + \beta \int_0^t \sin \nu(t - \omega) \varphi(\omega) d\omega \right]$$

oder

$$y(t) = \frac{F}{E} A \left[\sin \nu t \left\{ 1 + \beta \int_0^t \cos \nu \omega \varphi(\omega) d\omega \right\} - \cos \nu t \beta \int_0^t \sin \nu \omega \varphi(\omega) d\omega \right].$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung β^2 und mit den Abkürzungen

$$\alpha = \beta \int_0^t \cos \nu \omega \varphi(\omega) d\omega \quad \text{und} \quad \xi = \beta \int_0^t \sin \nu \omega \varphi(\omega) d\omega \quad (6)$$

läßt sich dafür schreiben:

$$y(t) = \frac{F}{E} A (1 + \alpha) \cdot \sin(\nu t - \xi). \quad (7)$$

Wegen des Charakters der Nachwirkungsfunktion $\varphi(\omega)$ sind die Größen α und ξ für hinreichend große Werte von t praktisch nicht mehr von t abhängig¹⁾. Die Nachwirkung hat also zur Folge, daß die von der periodischen Kraft erzwungene Bewegung eine um den Faktor $1 + \alpha$ vergrößerte Amplitude besitzt und in der Phase um den Winkel ξ verzögert ist. Dieses Verhalten läßt sich auch so beschreiben: Die Substanz zeigt einen „scheinbaren Elastizitätsmodul“

$$E^{**} = \frac{E}{1 + \alpha} \quad (8)$$

und absorbiert bei jeder Periode eine Energiemenge:

$$\varepsilon = \int_0^{2\pi/\nu} P \frac{dy}{dt} dt = A^2 \frac{F(1 + \alpha)}{E} \int_0^{2\pi/\nu} \sin \nu t \cos(\nu t - \xi) dt,$$

also bei Vernachlässigung der Ordnung β^2 :

$$\varepsilon = A^2 \frac{F}{E} \pi \xi = y_0^2 \cdot \frac{E}{F} \pi \xi, \quad (9)$$

¹⁾ Vgl. etwa die ausführlichere Berechnung bei Bennewitz l. c.

wo bei dieser Näherung $y_0 = A \frac{F}{E}$ die Amplitude der Deformation (7) bedeutet.

Im mechanischen Gebiet besteht die wichtigste Anwendung der Formeln (8) und (9) in einer Berechnung der Schwingungsdauer und Dämpfung von freien elastischen Schwingungen. Dabei treten die Trägheitskräfte der in Bewegung gesetzten Massen an die Stelle der oben benutzten periodischen Kraft. Die durch (8) gegebene scheinbare Vergrößerung des Elastizitätsmoduls wird sich dabei durch eine Vergrößerung der Schwingungsdauer und der Energieverlust (9) durch eine Dämpfung der Schwingungen bemerkbar machen. Besonders der letztere Einfluß ist mehrfach Gegenstand experimenteller Untersuchungen gewesen. Man erhält die Dämpfung der Schwingung einfach aus der Tatsache, daß Schwingungsenergie W und Amplitude y_0 verknüpft sind durch die Beziehung

$$W = \frac{1}{2} \frac{E}{F} y_0^2.$$

Eine Abnahme ε der Energie W ist also mit einer Verkleinerung δy_0 der Amplitude verknüpft durch die Beziehung $\frac{\delta y_0}{y_0} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{W}$.

Das „logarithmische Dekrement“ $A = \delta y_0 / y_0$ der Schwingung ist daher nach (9) und (6) gegeben durch

$$A = \pi \xi = \pi \beta \int_0^{\infty} \sin \nu \omega \varphi(\omega) d\omega. \quad (10)$$

Bei Gültigkeit¹⁾ von (3): $\varphi(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$ wird das Integral $= \frac{\pi}{2}$ und

$$A = \beta \frac{\pi^2}{2}. \quad (10a)$$

Eine wichtige experimentelle Prüfung der Boltzmannschen Theorie besteht darin, daß man aus einer statischen Messung vom Typus A oder B die Größe β bestimmt und die nach (10a) berechnete Dämpfung einer freien Schwingung mit der Beobachtung vergleicht. Dieser Versuch

¹⁾ Da Gleichung (3) sicher nicht bis $\varphi = 0$ gültig ist, bedarf der Wert (10a) noch einer Korrektur [vgl. weiter unten Formel (26)], die jedoch bei langsamen Schwingungen nicht wesentlich ist.

fürte in mehreren Fällen zu einer erfreulichen Bestätigung der Theorie, nämlich bei Torsionsschwingungen [Boltzmann]¹⁾ und Biegungsschwingungen [Bennewitz]²⁾. Auch im Gebiet der magnetischen Erregung von Eisen und der elektrischen Polarisierung von Isoliermaterial konnte Jordan³⁾ zeigen, daß die Energieverluste bei periodischer Erregung sich quantitativ aus statischen Nachwirkungserscheinungen vom Typus *A* in genau analoger Weise vorausberechnen lassen.

Die später aufgestellten Theorien von Wiechert⁴⁾ und Bennewitz²⁾ sind, insoweit sie eine Beschreibung der beobachteten Erscheinungen geben, mit der Boltzmannschen identisch.

Auf die Wiechertsche Theorie werden wir später noch kurz zurückkommen. Für die Theorie von Bennewitz ist der folgende Umstand charakteristisch: Wenn man etwa nach Gleichung (2) den Elastizitätsmodul *E* der Substanz bestimmen will, so hat man im Moment $t = 0$ die Last *P* anzubringen und in diesem selben Augenblick die Deformation *y* abzulesen. Tatsächlich braucht man aber eine endliche Zeit zum Anbringen der vollen Last und kann erst danach mit der Ablesung beginnen; dann ist aber bereits so viel Zeit verfließen, daß *y* im $\ln t$ -Gebiet angekommen ist, wo die zeitliche Änderung von *y* gegeben ist durch $y(t) = A + B \cdot \ln t$. Insoweit die Substanz diese Gleichung streng befolgt, lassen sich auch die Größen *A* und *B* exakt bestimmen. Unter Einführung einer ungeheuer kleinen Zeitgröße τ durch die Beziehung $A = -B \cdot \ln \tau$ kann man alsdann den beobachteten Verlauf auch beschreiben durch $y = B \ln \frac{t + \tau}{\tau}$, da τ neben jeder beobachtbaren Zeit noch ungeheuer klein ist. Bennewitz führt seine Theorie durch unter Verwendung der so empirisch ermittelten Konstanten *B* und τ . Elastische und Nachwirkungserscheinungen sind dadurch in seinen Formeln so innig miteinander verquickt, daß aus ihnen der einfache Grenzfall des rein elastischen Körpers erst durch einen komplizierten Grenzübergang ($B \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, $B \cdot \ln \tau = \text{const}$) gewonnen werden kann. Ich werde demgegenüber die Auffassung vertreten, daß die mit der exakten Bestimmung des Elastizitätsmoduls verbundenen Schwierigkeiten rein experimenteller und nicht grundsätzlicher Art sind und daß daher die Theorie keine Veranlassung hat, deshalb auf eine prinzipielle Scheidung zwischen elastischen und Nachwirkungsgrößen zu verzichten. In diesem Sinne ist der Elastizitätsmodul vollkommen ausreichend dadurch definiert, daß man für Belastung und Ablesung eine so kurze Zeit fordert, daß innerhalb derselben die elastische Nachwirkung vernachlässigt werden kann. Mit dieser Auffassung wird die Hypothese eingeführt, daß elastische Vorgänge sich grundsätzlich in Zeiten abspielen können, die von kleinerer Größenordnung sind als die für Nachwirkungserscheinungen erforderliche Zeit. Übrigens sind die von Bennewitz erhaltenen Formeln, wie bereits bemerkt, hinsichtlich ihres erfahrungsgemäß prüfbareren Inhalts mit den Boltzmannschen identisch. Vgl. auch die anschauliche Diskussion der Bennewitzschen Formel durch Jordan, Phys. ZS. 25, 579, 1924.

1) Boltzmann, l. c.

2) Bennewitz, Phys. ZS. 25, 417, 1924.

3) Jordan, Verh. d. D. Phys. Ges. 14, 451, 1912.

4) Wiechert, Wied. Ann. 50, 335, 1893.

II. Plastische Inhomogenität als Ursache der Nachwirkung.

Gegenüber den älteren Theorien, die im wesentlichen auf eine der Beobachtung entsprechende Beschreibung der Nachwirkungserscheinungen abzielten, bedeutet eine Untersuchung von v. Wartenberg¹⁾ einen großen Fortschritt, indem sie — wenn auch nur in qualitativer Weise — eine wirkliche physikalische Erklärung der Nachwirkung ermöglicht. Die Grundlage der v. Wartenbergschen Theorie bildet die Erfahrungstatsache, daß gut ausgebildete Einkristalle keine merkbare Nachwirkung zeigen²⁾, auch dann nicht, wenn sie — wie es bei Metallen der Fall ist — viel weicher sind als das bearbeitete und strukturell deformierte Material. Eine wesentliche Vorbedingung für die Nachwirkung besteht demnach in einer plastischen Inhomogenität des Materials in dem Sinne, daß Teilchen von größerer und geringerer Deformierbarkeit regellos nebeneinander liegen³⁾. Der qualitative Verlauf eines Belastungs- und Entlastungsversuchs ist bereits vollkommen verständlich, wenn man sich vorstellt, daß der Körper eine Anzahl leicht deformierbarer (plastischer) Teilchen enthält, von denen jedes einzelne umgeben ist von solchen, welche sich während der Versuchsdauer vollkommen elastisch verhalten⁴⁾. Alsdann werden während der Belastung die am leichtesten deformierbaren Teilchen sich allmählich entspannen oder „fließen“ und damit eine langsame Verlängerung des Drahtes bewirken, da bei konstanter Gesamtbelastung die Entspannung mit einer geringen Vergrößerung der Spannung in der elastischen Umgebung verbunden ist. Der verzögerte Charakter

¹⁾ v. Wartenberg, Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, 113, 1918. Nach der Darstellung von v. Kármán (Enzykl. math. Wiss. IV, 4, S. 694, 1913) ist auch schon früher versucht worden, die Nachwirkung durch gewisse Inhomogenitäten der Körper zu erklären. Auch neuere Ansätze von Hencky (ZS. f. ang. Math. u. Mech. **4**, 323, 1924, und ZS. f. Metallkde. **17**, 68, 1925) bewegen sich in ähnlicher Richtung.

²⁾ W und Zn nach v. Wartenberg (l. c.) und Schönborn (ZS. f. Phys. **8**, 377, 1922). Quarz nach Joffé, Ann. d. Phys. **20**, 919, 1906; ferner Masing und Polanyi, Erg. d. ex. Naturw. III, 1923, S. 214, Anm.

³⁾ v. Wartenberg selbst beschränkt sich auf Metalle und identifiziert diese Teilchen im wesentlichen mit den mikroskopisch sichtbaren Kristalliten. Diese Beschränkung erscheint mir vorerst vollkommen entbehrlich, um so mehr, als der Charakter der Nachwirkungserscheinungen bei nichtkristallinen Substanzen (z. B. Glas) wesentlich der gleiche zu sein scheint wie bei Metallen. (Vgl. auch Masing, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 686, 1919).

⁴⁾ Der Elastizitätsmodul der verschiedenen Teilchen soll nicht verschieden sein; wir sehen also den Körper in elastischer Beziehung als homogen an. Natürlich ist die Möglichkeit auch einer elastischen Inhomogenität ohne weiteres zuzugeben; wir wollen sie jedoch — als für die Nachwirkungserscheinungen unwesentlich — hier außer Betracht lassen.

der Belastungskurve ist dadurch bewirkt, daß bei völliger Entspannung der plastischen Teilchen die Bewegung zum Stillstand kommt. Wenn man den Bereich der Nachwirkung nicht überschreiten und eine plastische Deformation des Materials vermeiden will, so darf man den Belastungsversuch nur so weit ausdehnen, daß jedes merklich geflossene Teilchen noch umgeben ist von solchen, welche während der Versuchsdauer sich noch nicht merklich entspannt haben. Wenn man jetzt entlastet, so wird auf jedes geflossene Teilchen durch die sich elastisch kontrahierende Umgebung eine der ursprünglichen Spannung entgegengesetzte ausgeübt, unter deren Wirkung seine erste plastische Deformation allmählich wieder rückgängig gemacht wird, so daß der Ausgangszustand praktisch vollkommen wieder hergestellt ist. Wurde jedoch die Belastung so lange fortgesetzt, daß größere nebeneinanderliegende Gruppen von Teilchen geflossen sind, so werden diese nach der Entlastung von der Umgebung nicht mehr vollkommen zurückgeschoben werden können, da sie ihrerseits auf die Umgebung deformierend einwirken werden. Die Folge dieser Rückwirkung der deformierten Gruppen auf ihre Umgebung ist eine bleibende plastische Deformation. — Ob man sich im Gebiet der reinen Nachwirkung oder der plastischen Deformation befindet, läßt sich während der Belastungskurve überhaupt nicht entscheiden, insbesondere gilt das $\ln t$ -Gesetz weit ins plastische Gebiet hinein. Erst bei der Entlastung stellt sich heraus, ob das Gebiet der reinen Nachwirkung überschritten wurde.

Das Befriedigende an der v. Wartenbergschen Theorie liegt darin, daß die Nachwirkung durch die einfache und wohlbegründete Hypothese der plastischen Inhomogenität vollkommen zurückgeführt werden kann auf die allgemeine Erscheinung der „Plastizität“ oder „inneren Reibung“. Jede weitere Ausgestaltung dieses Bildes ist daher gleichbedeutend mit einer Annahme über das Wesen der Plastizität, welche jene Entspannung der einzelnen Teilchen bewirkt. Man weiß, daß in kristallinen Substanzen diese Plastizität in geometrischer Hinsicht häufig beschrieben werden kann als eine durch Schubspannungen ausgelöste Betätigung gewisser kristallographisch ausgezeichneter Gleitebenen. In mechanischer Beziehung ist damit für eine quantitative Behandlung der Nachwirkung wenig erreicht, solange man nicht weiß, in welcher Weise jene Gleitebenenverschiebung von der deformierenden Kraft abhängt. v. Wartenberg neigt zu der Annahme, daß — wie bei der Flüssigkeitsreibung — die Gleitebenen mit einer der Kraft proportionalen Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten. Diese Annahme ist nun sicher nicht zutreffend.

Nur die ohne Gleitebenen erfolgende Reibung der amorphen Substanzen bewirkt eine der Kraft proportionale Fließgeschwindigkeit. Die Annahme einer solchen Reibung führt, wie im folgenden gezeigt werden soll, genau auf die lineare Boltzmannsche Formel (1) für die Nachwirkung, während jede andere Annahme über die Plastizität eine abweichende und komplizierte Gestalt der Nachwirkung zur Folge hat.

III. Quantitative Durchführung der v. Wartenbergschen Theorie.

Wir betrachten speziell den Fall der Dehnung und denken uns den zu dehnenden Körper unterteilt in N Bereiche, von denen jeder einzelne als plastisch homogen angesehen werden kann, und welche völlig regellos durcheinanderliegen. Der Einfachheit halber nehmen wir alle Bereiche gleich groß an. Obwohl diese Annahme in der Natur sicher nicht zutrifft, bedeutet sie doch keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit. Nimmt man die Teilchen zunächst verschieden groß an, so wird man nach gehöriger Mittelbildung doch auf die gleichen Resultate geführt. Wirkt auf den Körper die Last P , so würde bei rein elastischem Verhalten die Spannung σ aller Teilchen den gleichen Betrag

$$\sigma_0 = f \cdot P \quad (11)$$

besitzen, wo f eine Konstante bedeutet. Wir fassen nun ein einzelnes Teilchen ins Auge, welches infolge vorhergegangener Fließvorgänge nicht unter der Normalspannung σ_0 steht, sondern unter einer davon abweichenden Spannung σ . Die Differenz $\sigma_0 - \sigma$ ist ein Maß für den Betrag, um welchen sich das Teilchen am Tragen der Last zu wenig beteiligt und welcher bei konstant gehaltener Gesamtlast P durch die übrigen Teilchen des Querschnitts aufgenommen werden muß¹⁾. Infolge dieses Spannungsdefekts des hervorgehobenen Teilchens wird somit der Draht gegenüber der rein elastischen Dehnung

$$y = \frac{F}{E} P$$

um einen gewissen, mit $\sigma_0 - \sigma$ proportionalen Betrag zu lang erscheinen. Die durch den Spannungsdefekt $\sigma_0 - \sigma$ des einen Teilchens bewirkte Verlängerung sei nun

$$\Delta y = \frac{F}{E} \lambda (\sigma_0 - \sigma),$$

¹⁾ Die hierdurch bewirkte Vergrößerung der Spannung über den durch (11) gegebenen Betrag können wir bei der Kleinheit der Einzelteilchen im reinen Nachwirkungsgebiet vernachlässigen.

wo λ als Konstante angesehen werden kann (gegeben durch Abmessungen und elastische Eigenschaften des Körpers sowie die Größe der einzelnen Teilchen). Die wirkliche momentane Länge ergibt sich durch Summation der beiden letzten Formeln zu

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P(t) + \lambda \sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) \right], \quad (12)$$

wo die Summe zu erstrecken ist über die Spannungsdefekte aller N Teilchen.

Gleichung (12) ist der allgemeine Ausdruck jeder Inhomogenitätstheorie der Nachwirkungserscheinungen. Zur Auswertung der Summe haben wir also den Spannungsdefekt jedes Teilchens zu ermitteln und über alle Teilchen zu summieren. Um die Spannung σ eines einzelnen Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit bei beliebig vorgegebenem Belastungswechsel zu berechnen, nehmen wir zunächst mit v. Wartenberg an, daß die plastische Entspannung besteht in einer der gerade vorhandenen Spannung proportionalen Fließgeschwindigkeit. In der Zeit dt vermindert sich infolgedessen die Spannung σ um einen Betrag $-d\sigma_1$, dessen Größe gegeben ist durch

$$d\sigma_1 = -\rho \sigma dt, \quad (13)$$

wo die Konstante ρ ein direktes Maß für die Plastizität bedeutet [oder auch ein reziprokes Maß für die „innere Reibung“ des Materials]¹⁾. Bei zeitlich veränderlicher Belastung $P(t)$ tritt nach (11) zu der plastischen Änderung (7) noch eine elastische Änderung vom Betrage

$$d\sigma_2 = f dP$$

hinzu, so daß die ganze Änderung von σ in dt wird:

$$d\sigma = -\rho \sigma dt + f dP$$

oder

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\rho \sigma + f \frac{dP}{dt}. \quad (14)$$

Hier ist P als Funktion von t vorgegeben, $\sigma(t)$ zu ermitteln. Unter Benutzung der Identität

$$e^{-\rho t} \cdot \frac{d}{dt} (\sigma e^{\rho t}) = \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \rho$$

¹⁾ ρ ist eine dem betreffenden Teilchen eigentümliche Konstante und soll sich auch bei der Deformation nicht ändern. Eine „Verfestigung“ soll also nicht erfolgen. In einer von Maxwell herrührenden Ausdrucksweise heißt $1/\rho$ die „Relaxationszeit“.

läßt sich (14) schreiben

$$\frac{d}{dt} (\sigma e^{\varrho t}) = f \cdot \frac{d}{dt} (P e^{\varrho t}) - f \varrho P e^{\varrho t},$$

oder

$$\sigma e^{\varrho t} = f \cdot P e^{\varrho t} - f \int_{-\infty}^t \varrho P(\vartheta) e^{\varrho \vartheta} d\vartheta.$$

Für den zeitlichen Verlauf der Spannung $\sigma(t)$ eines durch die Reibungsgröße ϱ charakterisierten Teilchens haben wir somit:

$$\sigma(t) = f \left[P(t) - \int_{-\infty}^t \varrho P(\vartheta) e^{-\varrho(t-\vartheta)} d\vartheta \right],$$

oder unter Einführung der Vergangenheit $\omega = t - \vartheta$ und Benutzung von $f \cdot P(t) = \sigma_0(t)$

$$\sigma_0(t) - \sigma(t) = f \int_0^{\infty} \varrho P(t - \omega) e^{-\varrho \omega} d\omega. \quad (15)$$

Damit ist der Beitrag eines durch die Plastizität ϱ charakterisierten Teilchens zu der in (12) stehenden Summe vollständig bestimmt.

Um jetzt den ganzen Körper in seinem plastischen Verhalten zu charakterisieren, müssen wir angeben, wie viele der N Teilchen eine zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegende Plastizität besitzen. Die Anzahl dieser Teilchen sei nun durch $F(\varrho) d\varrho$ gegeben, wo die Verteilungsfunktion $F(\varrho)$ natürlich der Bedingung

$$\int_0^{\infty} F(\varrho) d\varrho = N \quad (16)$$

genügen muß.

Damit ist auch die in (12) auftretende Summe bestimmt. Es wird nämlich nach (15):

$$\sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) = f \int_0^{\infty} P(t - \omega) d\omega \int_0^{\infty} F(\varrho) \varrho e^{-\varrho \omega} d\varrho.$$

Setzen wir diesen Wert in (6) ein, so erhalten wir genau die Boltzmannsche Nachwirkungsformel

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P(t) + \beta \int_0^{\infty} P(t - \omega) \varphi(\omega) d\omega \right],$$

wenn wir für die Nachwirkungsfunktion $\varphi(\omega)$ schreiben:

$$\beta \varphi(\omega) = \lambda f \int_0^{\infty} \varrho F(\varrho) e^{-\varrho \omega} d\varrho, \quad (17)$$

also auch

$$\beta \psi(t) = \beta \int_0^t \varphi(\omega) d\omega = \lambda f \int_0^{\infty} (1 - e^{-\varrho t}) F(\varrho) d\varrho. \quad (17a)$$

Damit ist gezeigt, daß v. Wartenbergs Theorie genau auf die allgemeine Boltzmannsche Formel führt¹⁾. Die Nachwirkungsfunktion $\varphi(\omega)$ ist durch (17) zurückgeführt auf die für die plastische Struktur charakteristische Verteilungsfunktion $F(\varrho)$. Es liegt im Wesen der ganzen Betrachtung, daß (17) nur angewandt werden darf auf wirklich inhomogene Körper, d. h. auf solche Funktionen $F(\varrho)$, in welchen weit auseinander liegende Werte von ϱ auch wirklich vertreten sind.

Während nach (17) $\varphi(\omega)$ eindeutig durch $F(\varrho)$ gegeben ist, ist umgekehrt $F(\varrho)$ durch die beobachtbare Funktion $\varphi(\omega)$ keineswegs eindeutig bestimmt. Es ist jedoch leicht, eine einfache spezielle Form für $F(\varrho)$ anzugeben, welche, in (17) eingesetzt, für φ in hinreichender Entfernung vom Nullpunkt den Verlauf $1/\omega$ liefert. Das wird erreicht, wenn F im wesentlichen wie $\frac{\text{const}}{\varrho}$ verläuft. Da aber nur Teilchen mit relativ großen ϱ -Werten bei der reinen Nachwirkung merklich fließen, genügt es, anzunehmen, daß F für derartige Werte wie $\frac{1}{\varrho}$ verläuft. Dagegen ist der Verlauf von F im Bereich kleiner Werte von ϱ ohne Einfluß auf die Nachwirkung. Wir können somit dem beobachteten Verlauf von φ Rechnung tragen durch die Annahme, daß N_1 von den N -Teilchen in ihrer Plastizität nach einem Gesetz $F_1(\varrho) \sim \frac{1}{\varrho}$ verteilt sind, während die übrigen $N - N_1$ -Teilchen die Plastizität Null haben.

Um für $F_1(\varrho)$ die Bedingung $\int F_1(\varrho) d\varrho = N_1$ zu erfüllen, begrenzen wir F_1 durch einen sehr kleinen Wert r und einen sehr großen Wert R von ϱ , indem wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\varrho) &= 0 && \text{für } \varrho < r \text{ und } \varrho > R \\ F_1(\varrho) &= \frac{c}{\varrho} && \text{für } r < \varrho < R. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

¹⁾ Der Nachweis, daß die Boltzmannsche Formel eine notwendige Folge der Differentialgleichung (14) ist, wurde bereits durch Wiechert (l. c.) erbracht. Allerdings waren bei Wiechert die zugrunde liegenden physikalischen Vorstellungen von den hier benutzten wesentlich verschieden.

Die Konstante c muß der Bedingung

$$\int_r^R \frac{c}{\varrho} d\varrho = c \cdot \ln \frac{R}{r} = N_1 \quad (19)$$

genügen. Für die mittlere Plastizität $\bar{\varrho}$ des ganzen Körpers gilt alsdann

$$\bar{\varrho} = \frac{c(R-r)}{N} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{R-r}{\ln R/r}$$

und damit auch

$$c = N \cdot \frac{\bar{\varrho}}{R-r}.$$

Für $\varphi(\omega)$ ergibt sich jetzt

$$\beta \varphi(\omega) = \lambda f c \int_r^R e^{-\varrho \omega} d\varrho = \frac{\lambda f c}{\omega} [e^{-r\omega} - e^{-R\omega}].$$

Unter der Bedingung, daß $r \cdot \omega$ stets eine sehr kleine Zahl ist, daß also die festesten Teilchen während der Beobachtungszeit nicht merklich plastisch deformiert wurden¹⁾, kann man somit setzen:

$$\varphi(\omega) = \frac{1 - e^{-R\omega}}{\omega}; \quad \beta = \lambda f c = \lambda f N \frac{\bar{\varrho}}{R}. \quad (20)$$

Im Falle der homogenen Zugbeanspruchung eines zylindrischen Versuchskörpers wird übrigens $\lambda f N = 1$, wovon jedoch weiterhin kein Gebrauch gemacht wird. Integration von $\varphi(\omega)$ liefert nun auch einen modellmäßig begründeten Verlauf der Belastungsfunktion $\psi(t)$:

$$\psi = \int_0^t \varphi(\omega) d\omega = \int_0^{Rt} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$$

Mit endlicher unterer Grenze ε ist das Integral zunächst²⁾:

$$\begin{aligned} & \ln Rt - \ln \varepsilon - Ei(-Rt) + Ei(-\varepsilon), \\ [Ei(-\varepsilon) - \ln \varepsilon]_{\varepsilon=0} & \text{ ist aber} = C = 0,5772, \text{ so daß wir erhalten} \\ \psi & = 0,5772 + \ln(Rt) - Ei(-Rt). \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁾ Diese Bedingung ist innerhalb der reinen Nachwirkungserscheinungen natürlich stets erfüllt. Für diese ist von der Funktion $F(\varrho)$ in (18) nur der Bereich $\varrho \gg r$ wesentlich.

²⁾ Nähere Angaben über die hier eingeführte Funktion $Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$ stehen z. B. bei Jahnke und Emde, Funktionstabeln, S. 19 f. Für kleine reelle und positive x ist $Ei(-x) = 0,5772 \dots + \ln x - x + \frac{x^2}{8} \dots$, während es für $x > 1$ schnell gegen Null geht.

Rt ist das Verhältnis der Beobachtungszeit t zur Relaxationszeit $1/R$ der am leichtesten deformierbaren Teilchen. Aus (21) folgt, daß der logarithmische Verlauf der Belastungskurve beginnt, wenn Rt etwa $= 3$ oder 4 ist, d. h. wenn die am leichtesten fließenden Teilchen praktisch vollkommen entspannt sind. Für den Beginn des Vorgangs ($Rt \ll 1$) dagegen ist

$$\psi(t) = Rt, \quad (22a)$$

also mit (20)

$$\beta \cdot \psi(t) = \lambda f N \bar{\rho} t. \quad (23)$$

Der ganze Verlauf der für die Belastungskurve

$$y(t) = \frac{F}{E} P [1 + \beta \{0,5772 + \ln(Rt) - Ei(-Rt)\}]$$

charakteristischen Funktion ψ in Abhängigkeit von Rt nach Gleichung (21) ist in der Fig. 1 wiedergegeben. Die gesamte Kurve läßt sich in drei

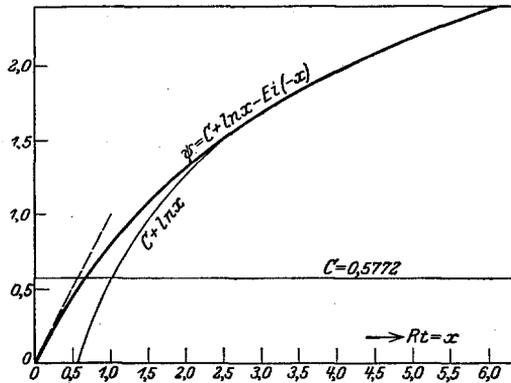


Fig. 1.

Verlauf der durch Gleichung (21) gegebenen Belastungskurve $\psi(x) = \psi(Rt)$.
Übergang von $\psi = x$ für $x \ll 1$ in $\psi = C + \ln x$ für $x \gg 1$.

Bereiche zerlegen, nämlich in einen geradlinig ansteigenden Teil mit der durch Gleichung (23) gegebenen relativ beträchtlichen Fließgeschwindigkeit, die im wesentlichen bestimmt ist durch den Mittelwert der Plastizität $\bar{\rho}$. Dieser Bereich geht etwa bis $Rt = 0,2$. Hieran schließt sich ein Kurvenstück an, welches zur $\ln t$ -Kurve hinüberführt und etwa von $Rt = 0,2$ bis $Rt = 4$ reicht. In diesem Zeitintervall werden die am leichtesten deformierbaren Teilchen praktisch vollkommen entspannt. Von $Rt = 4$ an befindet man sich vollkommen im $\ln t$ -Gebiet¹⁾. Man

¹⁾ Wenn man die Beobachtungszeit beim Belastungsversuch sehr lange ausdehnt, also das Nachwirkungsgebiet weit überschreitet, so würde die $\ln t$ -Kurve

hat bisher keinen Anhalt zur Bestimmung der Größe R und damit auch keine Möglichkeit, zu entscheiden, ob beim Belastungsversuch der in der Figur dargestellte Teil der Belastungskurve etwa in $1/10$ oder $1/1000$ Sekunde durchlaufen wird. Ist z. B. $R = 1000 \text{ sec}^{-1}$ und beginnt die Beobachtung der Belastungskurve bei $t = 0,1 \text{ sec}$, so ist der Wert von Ei völlig zu vernachlässigen, und man erhält:

$$y = \frac{F}{E} P [1 + \beta (0,5772 + \ln R) + \beta \ln t].$$

Mißt man nun zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls die Verlängerung y etwa nach t Sekunden, so erhält man einen scheinbaren Elastizitätsmodul E^* vom Betrage

$$E^* = \frac{E}{1 + \beta (0,577 + \ln R) + \beta \ln t}. \quad (24)$$

Bei der mutmaßlichen Größe von R macht es nicht viel aus, ob man die Bestimmung von E^* etwa nach 1 sec oder nach 10 sec vornimmt, da in jedem Falle der erste schnell verlaufende und relativ beträchtliche Teil der Nachwirkung sich der Beobachtung entzogen hat.

Da β aus dem Verlauf der $\ln t$ -Kurve zu ermitteln ist,¹⁾ bietet Gleichung (24) eine Möglichkeit zur Messung von R , indem man den Elastizitätsmodul E^* des nachwirkenden Körpers vergleicht mit dem Modul E eines aus dem gleichen Material bestehenden plastisch homogenen Körpers (Einkristall oder vollkommen rekristallisiertes Material). Die in (24) enthaltene allgemeine Aussage, daß $\frac{E^*}{E} < 1$ ist, wird von den verschiedensten Beobachtern bestätigt¹⁾. Die innige Verknüpfung dieser Tatsache mit der Nachwirkung ist jedoch bisher scheinbar nicht bemerkt worden.

schließlich in eine schwach geneigte Gerade übergehen; d. h. man würde ein zähes Fließen beobachten, dessen konstante Geschwindigkeit sich dadurch bestimmt, daß in jedem Teilchen sich eine zeitlich konstante und zu $1/\bar{\rho}$ proportionale Spannung σ eingestellt hat. Die alsdann resultierende „zähe“ Fließgeschwindigkeit unterscheidet sich von dem durch (23) gegebenen Anfangsteil der Fließkurve nur dadurch, daß der Mittelwert $\bar{\rho}$ zu ersetzen ist durch das Reziproke des Mittelwerts $\frac{1}{\bar{\rho}}$.

¹⁾ Z. B. Sieg, Phys. Rev. **35**, 347, 1912, und (2) **9**, 337, 1917; Baumeister, Ann. d. Phys. **18**, 578, 1883; Deodhar, ZS. f. Phys. **21**, 247, 1924; König, Diss. Berlin 1925 (noch nicht erschienen). Widersprechende Angaben finden sich jedoch z. B. bei Wertheim, Pogg. Ann., Erg.-Band **2**, 1—118, 1848 und **78**, 391, 1849, sowie Müller, Forschungsarb. d. Ver. D. Ing., Heft 211, 1918, so daß von einer sicheren experimentellen Bestätigung der Behauptung $E^*/E < 1$ noch nicht die Rede sein kann.

Zur Berechnung der Amplitude und Dämpfung freier Schwingungen eines Körpers mit der durch (20) gegebenen Nachwirkungsfunktion φ haben wir nach Abschnitt II die dort [Gleichung (6)] angegebenen Integrale α und ξ zu berechnen:

$$\alpha = \beta \int_0^{\infty} \cos \nu \omega \frac{1 - e^{-R\omega}}{\omega} d\omega; \quad \xi = \beta \int_0^{\infty} \sin \nu \omega \frac{1 - e^{-R\omega}}{\omega} d\omega.$$

Benutzt man dazu die Identitäten:

$$\frac{1 - e^{-\frac{R}{\nu}x}}{x} = \int_0^{R/\nu} e^{-zx} dz, \quad (a)$$

$$\frac{d}{dx} e^{-zx} (\cos x + z \sin x) = -e^{-zx} (1 + z^2) \sin x, \quad (b)$$

$$\frac{d}{dx} e^{-zx} (\sin x - z \cos x) = e^{-zx} (1 + z^2) \cos x, \quad (c)$$

so folgt zunächst aus (a) nach der Substitution $\nu \omega = x$:

$$\alpha = \beta \cdot \int_0^{R/\nu} dz \int_0^{\infty} \cos x e^{-xz} dx \quad \text{und} \quad \xi = \beta \int_0^{R/\nu} dz \int_0^{\infty} \sin x \cdot e^{-xz} dx.$$

Aus (b) und (c) ergibt sich andererseits:

$$\int_0^{\infty} \cos x \cdot e^{-xz} dx = \frac{z}{1 + z^2} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \sin x \cdot e^{-xz} dx = \frac{1}{1 + z^2},$$

so daß wir erhalten

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \ln \left(1 + \frac{R^2}{\nu^2} \right); \quad \xi = \beta \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\nu}{R} \right). \quad (25)$$

Aus den früher [Gleichung (8) und (10)] gegebenen Zusammenhängen folgt somit für Schwingungen von der Kreisfrequenz ν

$$\text{Logarithmisches Dekrement} \dots \mathcal{A} = \beta \frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{R} \right), \quad (26)$$

$$\text{„Scheinbarer Elastizitätsmodul“} \dots E^{**} = \frac{E}{1 + \frac{\beta}{2} \ln \left(1 + \frac{R^2}{\nu^2} \right)}. \quad (27)$$

Ist speziell, wie es bei mechanischen Schwingungsversuchen bisher stets der Fall war, die Schwingungsdauer $2\pi/\nu$ sehr groß gegen die

„kleinste“ Relaxationszeit $1/R$, so lauten diese Beziehungen mit ausreichender Näherung

$$\mathcal{A} = \beta \frac{\pi^2}{2}, \quad E^{**} = \frac{E}{1 + \beta \ln \frac{R}{\nu}}. \quad (28)$$

Der früher (24) angegebene statische Elastizitätsmodul E^* ist mit dem durch (28) bestimmten „dynamischen“ Modul E^{**} dann in völliger Übereinstimmung, wenn man ihn zu einer Zeit t_d nach dem Anbringen der Last ermittelt, die mit der Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$ verknüpft ist durch die Beziehung

$$0,577 + \ln t_d = \ln \frac{\tau}{2\pi} \quad \text{oder} \quad t_d = 0,09 \cdot \tau.$$

Die Bestätigung der Dämpfungsformel (28) durch Boltzmann, Jordan und Bennowitz wurde oben bereits erwähnt. Von besonderem Interesse ist die von den allgemeinen Formeln (26) und (27) vorausgesagte Frequenzabhängigkeit von \mathcal{A} und E^{**} , die sich bei hinreichend schnellen Schwingungen (vielleicht im akustischen Gebiet) bemerkbar machen muß, wenn nämlich ν und R von gleicher Größenordnung werden. Bemerkenswert ist an Formel (27) noch, daß der scheinbare Elastizitätsmodul nicht von der Amplitude der Schwingung abhängt im Gegensatz zu der im nächsten Abschnitt zu entwickelnden Auffassung.

IV. Versuch einer Berücksichtigung der wirklichen plastischen Eigenschaften von Metallen.

Bei Anwendung auf Metalle lassen sich gegen die bisherigen Ansätze zwei Einwände erheben, die zu einer Revision der Boltzmannschen Theorie nötigen, nämlich ein experimenteller und ein theoretischer.

Experimentell findet man nämlich, daß sowohl die Dämpfung wie auch die Dauer der Torsionsschwingungen von der Amplitude abhängt¹⁾, während bereits nach den allgemeinen Formeln (6) und (7) die Amplitude einer periodischen Kraft weder auf die Phasenverzögerung noch auf die Vergrößerung des scheinbaren Elastizitätsmoduls von Einfluß ist. Außerdem entspricht nach Versuchen von Jordan²⁾ das wirkliche Verhalten von Metallstäben beim Überlagerungsversuch nicht der einfachen Formel (5). Diese immerhin spärlichen direkten experimen-

¹⁾ Vgl. insbesondere die sorgfältigen Versuche von Sieg, l. c.

²⁾ Jordan, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 423, 1915.

tellen Widersprüche gegen die Boltzmannsche Theorie erfahren eine wirksame Unterstützung von seiten der Theorie. Wenn man nämlich an dem Gedanken der plastischen Inhomogenität und dem daraus abgeleiteten allgemeinen Ausdruck (12) grundsätzlich festhält, so gründet sich nach der obigen Ableitung die Boltzmannsche Gleichung (1) wesentlich auf die in (13) enthaltene Annahme einer der Kraft proportionalen Fließgeschwindigkeit, welche durch keine Erfahrungstatsache gestützt wird¹⁾. Die bisherigen Erfahrungen an kristallinischem Material deuten vielmehr stets darauf hin, daß die Fließgeschwindigkeit viel schneller als linear mit der Kraft anwächst. Allein die Tatsache, daß man in der Technik mit gutem Erfolg den Begriff der Elastizitätsgrenze einführen konnte, kann als Beweis für eine sehr viel stärker ausgeprägte Abhängigkeit der Fließgeschwindigkeit von der Kraft angesehen werden. Schönborn²⁾ und Geiss³⁾ befürworteten speziell eine exponentielle Abhängigkeit, jedoch wird die Deutung der Schönbornschen Versuche durch die mit ihrer Anordnung verbundene schnelle Kraftänderung während des Versuches erschwert. Bei Geiss fehlen dagegen experimentelle Einzelangaben überhaupt, so daß man exakte Aussagen wohl erst nach weiteren Versuchen machen kann. Der von Prandtl, Nádai⁴⁾ u. a. herausgearbeitete Begriff des „vollkommen plastischen“ Körpers (charakterisiert durch eine im fließenden Material überall konstante Schubspannung) führt in unserem Zusammenhang, wo es auf die Fließgeschwindigkeit ankommt, nicht wesentlich weiter. Die — wenn auch noch recht dürftigen — Tatsachen im Gebiet der Reibung fester Körper zwingen jedenfalls dazu, den Ansatz (13) durch einen anderen zu ersetzen. Man könnte zunächst daran denken, auf der rechten Seite an Stelle von σ eine Funktion von σ einzuführen. Obwohl man auf diese Weise fraglos die Möglichkeit hätte, den Erfahrungen in umfassenderer Weise gerecht zu werden, bleibt dabei immer noch der Einwand, ob das Fließen der plastisch homogenen Bezirke denn überhaupt ein kontinuierlicher Prozeß ist. Tatsächlich deuten die bei Metallen beobachteten isolierten Gleit-

¹⁾ In einem theoretischen Ansatz von W. Voigt (Ann. d. Phys. 47, 671, 1892) wird die innere Reibung fester Körper zwar als eine der Geschwindigkeit proportionale Kraft eingeführt; aber auch hier werden überzeugende Gründe für diese Annahme nicht vorgebracht. Eine derartige Reibungskraft dürfte existieren bei amorphen Körpern, bei welchen dann die Boltzmannsche Theorie exakt zutreffen würde.

²⁾ Schönborn, l. c.

³⁾ Geiss, ZS. f. Phys. 29, 78, 1924.

⁴⁾ Z. B. Nádai, ebenda 30, 106, 1924.

flächen¹⁾ darauf hin, daß beim Fließen des kristallinen Materials immer einzelne Gleitflächen um endliche Beträge gegeneinander verschoben werden; es ist deshalb schon öfter vermutet worden, daß die scheinbar kontinuierliche plastische Deformation aus einzelnen diskreten Sprüngen besteht.

Ohne zu spezielle Annahmen einzuführen, wollen wir uns zunächst eine Anschauung davon bilden, wie derartige diskrete Sprünge etwa an einem gedehnten Einkristall aussehen könnten. In der Fig. 2 ist mit den ausgezogenen Geraden der Spannungszustand in einem elastisch gedrehten Draht angedeutet. Die Geraden stellen die Spuren von solchen materiellen Ebenen dar, welche vor der Dehnung sich rechtwinklig durchschnitten. Wir fassen speziell die Ebene AB ins Auge und stellen uns vor, daß zufällig für einen kurzen Augenblick die Festigkeit sehr klein wird. Das wird zur Folge haben, daß das Material in unmittelbarer Nähe seiner Schubspannung (d. h. dem Streben nach Wiederherstellung der rechten Winkel) nachgeben kann. Dabei gehen die oben erwähnten Ebenen etwa in die Lage der punktierten Kurven über, wobei natürlich die zu beiden Ufern der Ebene AB liegenden Teile aneinander vorbeigleiten. Die als Schwankungsphänomen²⁾ gedeutete Entfestigung der Fläche ist nach sehr kurzer Zeit wieder beseitigt. Somit ist der eigentliche Gleitungsprozeß nach Herstellung der punktiert angedeuteten Anordnung beendet. Erst jetzt erfolgt, wenn etwa die Spannung durch ein angehängtes Gewicht erzeugt war, ein Absinken des Gewichtes um einen gewissen Betrag, nämlich so weit, bis die vorübergehend entspannten Teile nun wieder unter der vollen Belastung, d. h. unter der entsprechenden Schubspannung stehen. — Bei dieser Auffassung erscheint die gedankliche (und zum Teil wohl auch reale) Unterteilung der Dehnung in eine spontane Entspannung und die darauf folgende makroskopische Verlängerung als wesentliches Moment. Gehen wir nämlich zum plastisch

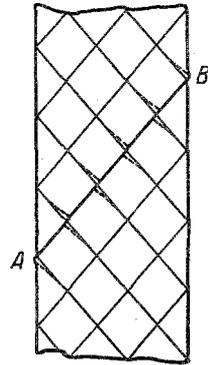


Fig. 2.

Schema eines Gleit-sprunges.
Spontane Entfernung der Umgebung der Gleitebene AB .

¹⁾ Vgl. etwa Tammann, Lehrb. d. Metallographie; Masing und Polanyi, Erg. ex. Naturw. 2, 177, 1923; R. Gross, ZS. f. Metallkde. 16, 18, 1924.

²⁾ Ein instruktives, wenn auch stark idealisiertes Modell einer durch thermische Schwankungen bedingten Gleitung wurde bereits vor längerer Zeit durch Prandtl vorgeschlagen und von v. Kármán (l. c. S. 767f.) beschrieben.

inhomogenen Material über, so wird dessen Inhomogenität eben dadurch zum Ausdruck kommen, daß derartige spontane Entspannungen nicht über den ganzen Querschnitt hin erfolgen, sondern nur auf jeweils eng begrenzte Teile sich beschränken. Die spontane Entspannung möge dabei in ganz ähnlicher Weise erfolgen¹⁾. Dagegen wird der Erfolg einer Entspannung hinsichtlich der Verlängerung des Drahtes nur sehr gering sein, da die angehängte Last ja durch die überwiegende Zahl der nicht springenden Teilchen gehindert wird, nunmehr das entspannte Teilchen wieder unter Spannung zu setzen. Letzteres bleibt vielmehr im wesentlichen spannungslos, während die Spannung der Umgebung um einen geringen Betrag sich vergrößert. Dieser Betrag kommt seinerseits in einer makroskopischen Dehnung des Drahtes zum Ausdruck.

So unvollkommen und ergänzungsbedürftig diese Vorstellung auch noch sein mag, so kann man doch versuchen, mit ihrer Hilfe die Nachwirkungsvorgänge zu beschreiben. Dabei kommt uns der Umstand zugute, daß für das beobachtbare Verhalten eines nachwirkenden Körpers nur gewisse Mittelwerte der homogenen Einzelteile wesentliche Bedeutung haben. Man darf daher hoffen, bereits bei relativ groben und primitiven Vorstellungen über die Elastizität der homogenen Kristalle schon ein brauchbares Bild des inhomogenen Körpers zu erhalten, in ähnlicher Weise, wie die Gastheorie bereits mit den einfachen Begriffen „elastischer Zusammenstoß“ und „Atomdurchmesser“ weite Erscheinungsgebiete quantitativ klären konnte.

In enger Anlehnung an die Entwicklungen des Abschnitts III machen wir uns von einem nachwirkenden Körper das folgende schematische Bild: Das bis zur Zeit Null spannungsfreie Material werde plötzlich durch die Kraft P gespannt, wodurch zunächst im ganzen Körper die Spannung $\sigma_0 = f \cdot P$ erzeugt wird. Wir fassen ein kleines homogen gedachtes Teilgebiet ins Auge, dessen „Plastizität“ wir nun in folgender Weise durch eine Konstante α charakterisieren: Wenn das Element unter der Spannung σ steht, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit

$$dw = S(\sigma) \alpha dt \quad (29)$$

¹⁾ Eine Komplikation besteht in diesem Falle darin, daß wir nicht im einzelnen angeben können, wie die Betätigung einer Gleitebene sich verträgt mit der von der nicht plastischen Umgebung vorgegebenen Umgrenzung. Dieser Umstand ist für eine exaktere Diskussion sicher von Bedeutung und wird makroskopisch in einer Erhöhung der Festigkeit zum Ausdruck kommen. Er soll hier jedoch nicht weiter erörtert werden.

dafür, daß dieses Teilgebiet sich in der Zeit dt spontan entspannt. κ ist eine für das betreffende Teilchen charakteristische Konstante¹⁾. Von der noch unbekanntem Funktion $S(\sigma)$ setzen wir voraus, daß sie stets positiv ist, für $\sigma = 0$ verschwindet, mit wachsenden absoluten Beträgen von σ zunimmt und nur vom absoluten Betrag der Spannung abhängt. Wir beschränken uns wieder auf reine Nachwirkungsvorgänge; das ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß σ während des Versuches nur in isolierten Teilgebieten springen soll, so daß jedes spontan entspannte Teilchen umgeben bleibt von solchen, welche nahezu die „Sollspannung“ $\sigma_0 = f \cdot P$ besitzen. Wir nehmen nun wieder an, die homogenen Teilgebiete seien alle von gleicher Größe und ihre Gesamtzahl sei N . Ferner sei $F(\kappa) d\kappa$ die Zahl der Teilgebiete mit κ -Werten zwischen κ und $\kappa + d\kappa$, so daß auch, wie in (16), $\int_0^\infty F(\kappa) d\kappa = N$. Von diesen Annahmen dürfte die physikalisch wesentlichste — und experimentell vielleicht zu widerlegende — die sein, daß die Funktion $S(\sigma)$ von κ nicht mehr abhängt, daß also der Charakter der Kraft-Geschwindigkeitskurve für die „härtesten“ und „weichsten“ Teile der gleiche ist. Dagegen ist, wie bereits unter III bemerkt, die Annahme gleich großer Elementargebiete unwesentlich. Die allgemeine Aufgabe ist wieder die Berechnung von $\sum_1^N (\sigma_0 - \sigma)$ in (12) etwa durch Ermittlung einer Funktion $Z(\kappa, t, \sigma)$, die angibt, welcher Bruchteil der $F(\kappa) d\kappa$ Teilchen von der Sorte κ bis $\kappa + d\kappa$ zur Zeit t die Spannung σ hat. Während wir die entsprechende Aufgabe oben für den Fall des Reibungsansatzes (13) bei beliebigem Kraftwechsel $P(t)$ allgemein erledigen konnten, scheiterte hier die Rechnung bisher an rein mathematischen Schwierigkeiten. Dagegen lassen sich die oben unter A, B, C aufgeführten speziellen Versuche leicht behandeln.

A. Belastungsversuch. (Konstante Last P von $t = 0$ ab.) Im ersten Moment nach Anbringen der Last stehen alle Teilchen unter der Spannung

$$\sigma_0 = f \cdot P.$$

Nach einiger Zeit haben die gesprungenen Teile die Spannung Null, während die übrigen noch sämtlich die Spannung σ_0 haben. Dabei wollen wir also wie in Abschnitt III im reinen Nachwirkungsgebiet die geringe

¹⁾ Die Frage nach der Ursache der Unterschiede in den κ -Werten wird im Texte absichtlich offen gelassen. Man kann dabei denken an eine verschiedene Orientierung der Gleitebene zur Krafrichtung sowie an eine verschiedene „Güte“ des Kristallgitters, wobei dem letzteren Umstand die größere Bedeutung zukommen wird. (Vgl. auch Masing und Polanyi, l. c.)

Spannungserhöhung in der Umgebung eines gesprungenen Teilchens insofern vernachlässigen, als wir die dadurch bewirkte Vergrößerung der Sprungwahrscheinlichkeit ignorieren. Wir berechnen nun, wie viele der $F(x) dx$ -Teilchen sich nach Ablauf der Zeit t entspannt haben. Nach (29) ist diese Anzahl gegeben durch

$$F(x) dx (1 - e^{-S(\sigma_0)xt}) = F(x) dx Z(x, t, 0). \quad (30)$$

Diese haben also zur Zeit t die Spannung Null, während die übrigen $F(x) dx \cdot e^{-Sxt}$ noch Spannung σ_0 haben. Zu der nach (12) zu berechnenden Summe liefern also nur die durch (30) gegebenen Gebiete einen endlichen Beitrag, und zwar jeder einzelne den Wert σ_0 , so daß wird:

$$\sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) = \sigma_0 \int_0^\infty F(x) dx (1 - e^{-S(\sigma_0)xt}).$$

Die Belastungskurve hat demnach die Gestalt

$$y(t) = \frac{F}{E} \left[P + \lambda \sigma_0 \int_0^\infty F(x) dx (1 - e^{-S(\sigma_0)xt}) \right].$$

Mit $\sigma_0 = fP$ und der Abkürzung

$$\beta \psi(t) = \lambda f \int_0^\infty (1 - e^{-S(\sigma_0)xt}) F(x) dx \quad (31)$$

wird daraus

$$y(t) = \frac{F}{E} P [1 + \beta \psi(t)].$$

Der Zusammenhang (31) zwischen der Belastungskurve $\psi(t)$ und der Verteilungsfunktion $F(x) dx$ ist genau der gleiche, wie er früher (Gleichung 17 a) für den Fall der Reibung gefunden wurde. Um also dem beobachteten $\ln t$ -Verlauf der Belastungskurve gerecht zu werden, können wir auch für $F(x)$ einen Verlauf der Art (18) versuchen, d. h.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 0 \quad \text{für } x < k \text{ und } x > K, \\ F_1(x) &= \frac{c}{x} \quad \text{für } k \leq x \leq K. \end{aligned}$$

Mit diesem Verlauf von $F(x)$ ergibt sich durch die entsprechende Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \psi(t) &= 0,5772 \dots + \ln[S(\sigma_0)Kt] - Ei[-S(\sigma_0)Kt], \\ \beta &= \lambda fc. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Gegenüber dem Werte (17) der v. Wartenberg-Boltzmannschen Theorie besteht der einzige Unterschied darin, daß die dort auftretende konstante Reibungsgröße R ersetzt ist durch die entsprechende Wahr-

scheinlichkeitsgröße $S(\sigma_0) \cdot K$, welche mit der Belastung anwächst und somit bei zwei Versuchen mit verschiedenen Werten von P verschiedene Werte besitzt. Im beobachtbaren Zeitgebiet wird jetzt

$$\psi(t) = 0,577 \dots + \ln [S(\sigma_0) \cdot K] + \ln t, \quad (32a)$$

so daß zwar die Neigung der $\ln t$ -Geraden von $S(\sigma_0)$ nicht abhängt, also nach wie vor mit P proportional bleibt, dagegen wird der scheinbare Elastizitätsmodul jetzt

$$E^* = \frac{E}{1 + \beta (0,577 + \ln [S(\sigma_0) K] + \ln t)}, \quad (33)$$

also wegen des Auftretens von $\sigma_0 = f \cdot P$ im Nenner von der Belastung abhängig. Das bedeutet eine Abweichung vom Hookeschen Gesetz. Bereits Geiss hat versucht, solche Abweichungen durch elastische Nachwirkung zu erklären¹⁾. Dabei ist ihm jedoch entgangen, daß gerade die von ihm zitierte v. Wartenbergsche Arbeit keine solche Abweichung vom Hookeschen Gesetz liefert, sondern erst der neue, oben eingeführte Ansatz. Ob allerdings, wie Geiss möchte, die ganz groben Abweichungen bei Gußeisen allein aus der Nachwirkung erklärt werden können, bedarf wohl noch des experimentellen Beweises, insbesondere durch direkten Nachweis des Zusammenhanges mit einfachen Nachwirkungseffekten. Zu beachten ist jedenfalls, daß (33) eine Möglichkeit zur experimentellen Bestimmung der einstweilen völlig unbekanntem Funktion $S(\sigma_0)$ bietet.

B. Der einfache Entlastungsversuch.

Konstante Belastung P von $t = -t_1$ bis $t = 0$,

Belastung 0 bis $t = -t_1$ und von $t = 0$ ab.

Im Moment $t = 0$ ist nach dem letzten Abschnitt der Bruchteil

$$Z(x, t, 0) = 1 - e^{-S(\sigma_0)x t_1}$$

von dem Teichen x entspannt. Unmittelbar nach der Entlastung stehen diese Elemente unter der Spannung $-\sigma_0$, alle übrigen unter der Spannung Null. Daher wird für $t > 0$ nach dem Elementargesetz (29)

$$Z(x, t, -\sigma_0) = [1 - e^{-S(\sigma_0)x t_1}] \cdot e^{-S(\sigma_0)x t}.$$

Also lautet die Entlastungskurve nach (12), da für $t > 0$, $P = 0$, $\sigma_0 = 0$:

$$y(t) = \frac{F}{E} \lambda \sigma \int_0^\infty F(x) dx [e^{-S(\sigma)x t} - e^{-S(\sigma)x(t+t_1)}].$$

¹⁾ Physica 3, 232, 1923.
Zeitschrift für Physik. Bd. XXXIII.

Mit der in (31) definierten Funktion $\beta\psi(t)$ und mit $\sigma = fP$ wird daraus sogleich

$$y(t) = \frac{F}{E} P \beta [\psi(t_1 + t) - \psi(t)]. \quad (34)$$

Die für beobachtbare Werte von t ausreichende Form (32a) für ψ liefert dieselbe von $S(\sigma)$ unabhängige Entlastungskurve wie die alte Formel (4). Durch den neuen Ansatz wird also nur der Wert des „effektiven Elastizitätsmoduls“ E^* nach Gleichung (33) im Sinne einer Abweichung vom Hookeschen Gesetz geändert, während der zeitliche Verlauf sowohl des Belastungs- wie des Entlastungsversuches völlig unverändert bleibt.

C. Der Überlagerungsversuch.

$P = P_1$ von 0 bis t_1 sowie von t_2 ab,

$P = P_2$ von t_1 bis t_2 .

Wir bezeichnen: $\sigma_1 = fP_1$, $\sigma_2 = fP_2$.

Zu einer Zeit $t > t_2$ haben wir die Teilchen der Sorte κ , $d\kappa$ in acht verschiedene Gruppen zu unterteilen, je nach den Sprüngen, welche sie von 0 bis t ausgeführt haben:

Gruppe Nr.	0 bis t_1	t_1 bis t_2	t_2 bis t	Spannung zur Zeit t	Spannungsdefekt
1	σ_1 +	$\sigma_2 - \sigma_1$ +	$\sigma_1 - \sigma_2$ +	0	σ_1
2	σ_1 +	$\sigma_2 - \sigma_1$ -	0 +	0	σ_1
3	σ_1 -	σ_2 +	$\sigma_1 - \sigma_2$ +	0	σ_1
4	σ_1 -	σ_2 -	σ_1 +	0	σ_1
5	σ_1 +	$\sigma_2 - \sigma_1$ -	0 -	0	σ_1
6	σ_1 -	σ_2 +	$\sigma_1 - \sigma_2$ -	$\sigma_1 - \sigma_2$	σ_2
7	σ_1 +	$\sigma_2 - \sigma_1$ +	$\sigma_1 - \sigma_2$ -	$\sigma_1 - \sigma_2$	σ_2
8	σ_1 -	σ_2 -	σ_1 -	σ_1	0

In dieser schematischen Tabelle ist unter jedem der drei Zeitabschnitte 0 bis t_1 , t_1 bis t_2 , t_2 bis t zunächst angegeben, mit welcher Spannung das betreffende Teilchen in diesen Zeitabschnitt eintritt; daneben ist durch ein Plus- oder Minuszeichen angedeutet, ob das Teilchen in diesem Abschnitt einen Sprung erleidet oder nicht. Daneben steht weiterhin die Spannung des Teilchens im Augenblick t . Am Schluß der Tabelle endlich stehen die „Spannungsdefekte“, mit denen die betreffenden Teilchen sich an der Summe in (12) beteiligen. Bezeichnen wir zur Abkürzung $S(\sigma_1) = S_1$, $S(\sigma_2) = S_2$, $S(\sigma_2 - \sigma_1) = S_{1,2}$, so können wir die Wahrscheinlichkeiten W_1 , W_2 usw. dafür, daß ein Teilchen

der ersten, zweiten usw. Gruppe angehört, nach (29) sofort hinschreiben. Es wird z. B.

$$\begin{aligned} W_1 &= (1 - e^{S_1 \varkappa t_1}) [1 - e^{-S_{12} \varkappa (t_2 - t_1)}] [1 - e^{-S_{12} \varkappa (t - t_2)}], \\ W_2 &= 0, \\ W_3 &= e^{-S_1 \varkappa t_1} [1 - e^{-S_2 \varkappa (t_2 - t_1)}] [1 - e^{-S_{12} \varkappa (t - t_2)}] \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man hat zur Berechnung von (12) jetzt zu bilden:

$$\begin{aligned} \sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) &= \sigma_1 \int_0^\infty (W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5) F(\varkappa) d\varkappa \\ &+ \sigma_2 \int_0^\infty (W_6 + W_7) F(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned}$$

Die elementare Rechnung ergibt nach Einführung der durch (31) definierten Funktion ψ :

$$\begin{aligned} \lambda \sum_1^N (\sigma_0 - \sigma) &= \beta [P_1 \psi(S_1 t + (S_2 - S_1)(t_2 - t_1)) \\ &+ (P_2 - P_1) \{ \psi(S_{12}(t - t_1)) - \psi(S_{12}(t - t_2)) \\ &+ \psi(S_1 t_1 + S_2(t_2 - t_1) + S_{12}(t - t_2)) - \psi(S_1 t_1 + S_{12}(t - t_1)) \}]. \end{aligned}$$

Bei Gültigkeit des $\ln t$ -Gesetzes (32 a) kann man nach Gleichung (12) den Verlauf des Überlagerungsversuches explizite hinschreiben. Wir beschränken die Diskussion auf den Fall, daß die Überlagerung gerade in einer Verdoppelung der Last bestanden hat, daß also $\sigma_2 = 2\sigma_1$ war. Dann wird nämlich $S_{12} = S_1$, und es stellt sich heraus, daß in dem zeitlichen Verlauf von $y(t)$ nur noch die Kombination

$$S^* = \frac{S(\sigma_2) - S(\sigma_1)}{S(\sigma_1)} = \frac{S(2\sigma_1)}{S(\sigma_1)} - 1 \quad (35)$$

auftritt. Man erhält mit dieser Abkürzung für die Überlagerungskurve bei vorübergehender (von t_1 bis t_2 während) Verdoppelung der Last für $t > t_2$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F}{E} P \left[1 + \beta \left\{ 0,577 + \ln S_1 K + \ln t \right. \right. \\ &\left. \left. + \ln \frac{t - t_1}{t - t_2} + 2 \ln \frac{t + (t_2 - t_1) \cdot S^*}{t} \right\} \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Der gleiche Versuch würde nach der einfachen Boltzmannschen Theorie [Gleichung (5) und (21)] lauten:

$$y(t) = \frac{F}{E} P \left[1 + \beta \left\{ 0,577 + \ln R + \ln t + \ln \frac{t - t_1}{t - t_2} \right\} \right].$$

Davon unterscheidet sich Gleichung (36) zunächst durch das hier unwesentliche, zeitunabhängige Glied $S_1 K$, welches die bereits erwähnte Abweichung vom Hooke'schen Gesetz andeutet. Außerdem zeigt sich aber, daß zu der einfach fortgesetzten Belastungskurve $\ln t$ und der überlagerten Entlastungskurve $\ln \frac{t-t_1}{t-t_2}$ noch ein „Störungsglied“ $\ln \frac{t+(t_2-t_1)S^*}{t}$ hinzutritt. Um qualitativ den Charakter dieser Störung zu übersehen, bezeichnen wir mit $\tau = t_2 - t_1$ die Dauer der Lastverdoppelung und mit $\vartheta = t - t_2$ die von t_2 ab gezählte Zeit. Dann lautet der nach (36) zu $\ln t$ additiv hinzutretende Ausdruck:

$$\ln \left(1 + \frac{\tau}{\vartheta} \right) + 2 \ln \left(1 + \frac{\tau S^*}{\vartheta + t_2} \right).$$

Für sehr kleine ϑ -Werte (so klein, wie sie das $\ln t$ -Gesetz noch zuläßt) ist das erste Glied, d. h. die normale Entlastungskurve, überwiegend. Es nimmt mit wachsendem ϑ schnell ab, während das Störungsglied sich zunächst wenig ändert und erst dann merklich abzunehmen beginnt, wenn ϑ mit t_2 vergleichbar wird. Da S^* sicher groß gegen Eins ist, so wird das zweite jetzt das erste an Größe weit übertreffen.

Man kann dies Verhalten auch so beschreiben, daß man sagt: Die Entlastungskurve wird sich zunächst nicht auf die Verlängerung der $\ln t$ -Geraden herabsenken, sondern scheinbar auf eine andere, welche höher liegt und gegen die $\ln t$ -Achse flacher verläuft. — Genau dieses Verhalten hat nun Jordan bei Eisen beobachtet. Die Tatsache, daß gerade beim Eisen dies Verhalten besonders ausgeprägt war, ist aus folgendem Grunde nicht ohne Interesse: Nach (35) mißt S^* die relative Vergrößerung von S bei Verdoppelung der Spannung, ist also ein recht anschauliches Maß für die Größe der Spannungsabhängigkeit der noch unbekanntem Funktion $S(\sigma)$. Nach Gleichung (33) ist daher S^* zugleich entscheidend für die Größe der Abweichung vom Hooke'schen Gesetz. [$S^* = 0$ gibt in (36) die Boltzmanische Formel.] Nun sind gerade beim Eisen die Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz besonders ausgeprägt¹⁾, so daß möglicherweise ein direkter Zusammenhang hergestellt werden kann zwischen diesen Abweichungen und der von Jordan beobachteten Anomalie. Natürlich wäre es verfrüht, aus dem vorliegenden Material bereits weitergehende Schlüsse zu ziehen; dazu müßten erst alle in Frage kommenden Größen unter Berücksichtigung der angedeuteten Gesichtspunkte am gleichen Materialstück sorgfältig gemessen werden.

¹⁾ S. Berliner, Ann. d. Phys. **20**, 527, 1906; Geiss, Physica **3**, 232, 1923.

D. Periodische Beanspruchung. Eine exakte Behandlung des Verhaltens von einem Material bei einer periodisch wirkenden Kraft $P = A \cdot \sin \nu t$ ließ sich mit dem allgemeinen Ansatz (29) bisher nicht durchführen. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß qualitativ die Wirkung dieses Ansatzes darin besteht, daß sowohl das logarithmische Dekrement wie auch die Schwingungsdauer mit wachsender Amplitude zunehmen muß. Hinsichtlich der Schwingungsdauer wurde dieses Verhalten, wie bereits oben erwähnt, von Sieg tatsächlich beobachtet. Auch die Tatsache, daß bei verschiedenem Bearbeitungszustand des gleichen Materials die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude um so größer ist, je stärker die Schwingungen gedämpft sind, läßt sich aus der hier benutzten Vorstellung ohne Schwierigkeit herleiten.

30. März 1925.
