

Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.

Von A. Friedmann in Petersburg.

(Eingegangen am 7. Januar 1924.)

§ 1. 1. In unserer Notiz „Über die Krümmung des Raumes“¹⁾ haben wir diejenigen Lösungen der Einsteinschen Weltgleichungen betrachtet, welche zu Weltypen führen, denen eine konstante positive Krümmung als gemeinsames Merkmal angehört; dabei haben wir alle möglichen Fälle erörtert. Die Möglichkeit, aus den Weltgleichungen eine Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung abzuleiten, steht aber mit der Frage nach der Endlichkeit des Raumes im Zusammenhange. Aus diesem Grunde dürfte es von Interesse sein zu untersuchen, ob man aus denselben Weltgleichungen eine Welt konstanter negativer Krümmung erhalten kann, von deren Endlichkeit (auch unter einigen ergänzenden Annahmen) wohl kaum die Rede sein kann.

In der vorliegenden Notiz wird gezeigt, daß es wirklich möglich ist, aus den Einsteinschen Weltgleichungen eine Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes abzuleiten. Wie in der zitierten Arbeit, so haben wir auch hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1. den Fall einer stationären Welt, deren Krümmung zeitlich konstant ist, und 2. den Fall einer nichtstationären Welt, deren Krümmung zwar räumlich konstant ist, wohl aber im Laufe der Zeit variiert. Zwischen den stationären Welten konstanter negativer und denjenigen konstanter positiver räumlicher Krümmung besteht ein wesentlicher Unterschied. Die Welten stationärer negativer Krümmung lassen nämlich keine positive Dichte der Materie zu; dieselbe ist entweder Null oder negativ. Die physikalisch möglichen stationären Welten (d. h. diejenigen mit nicht negativer Dichte der Materie) finden demzufolge ihr Analogon in der de Sitterschen, nicht aber in der Einsteinschen Welt²⁾.

Zum Schluß dieser Notiz werden wir die Frage berühren, ob man überhaupt auf Grund der Krümmung des Raumes über dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit urteilen darf.

2. Wir wenden uns zu unseren allgemeinen Annahmen, die wir in dieselben zwei Klassen wie in der zitierten Notiz gruppiert denken;

¹⁾ ZS. f. Phys. 10, 377, 1922, Heft 6.

²⁾ Auf die Notwendigkeit einer besonderen Untersuchung über die Möglichkeit einer Welt mit negativem Krümmungsmaße des Raumes hat mich mein Freund Prof. Dr. Tamarkine aufmerksam gemacht.

dabei behalten wir unsere früheren Bezeichnungen. Die Annahmen der ersten Klasse bestehen darin, daß wir als Einsteinsche Weltgleichungen die Gleichungen (A), (B), (C) der erwähnten Arbeit zugrunde legen. Die Annahmen der zweiten Klasse werden jetzt von den früheren verschieden sein. Nehmen wir an, daß eine von den Weltkoordinaten, x_4 , als Zeitkoordinate bezeichnet werden darf, so können wir (für den betrachteten Fall der Welt mit negativer konstanter Krümmung des Raumes) die Annahmen der zweiten Klasse dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir fordern, es solle das Intervall ds von der Form:

$$ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2 \quad (D')$$

sein, wo R eine Funktion der Zeit und M eine Funktion aller vier Weltkoordinaten bedeutet. Die konstante negative Krümmung des Raumes unserer Welt ist dabei proportional $-\frac{1}{R^2}$ ¹⁾.

Beachten wir, daß für unsere Welt ds^2 eine indefinite Form ist, so können wir, unter Änderung der Bezeichnungen, die Formel (D') folgendermaßen umschreiben:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{c^2 x_3^2} + M^2 dx_4^2. \quad (D'')$$

Selbstverständlich bleibt die räumliche Krümmung unserer Welt negativ und proportional $-\frac{1}{R^2}$.

Das Problem, das uns vorliegt, besteht in der Auffindung zweier Funktionen R und M , welche den Einsteinschen Weltgleichungen, d. h. den Gleichungen (A), (B) und (C) der erwähnten Notiz genügen sollen.

Setzen wir in (A) $i = 1, 2, 3$, $k = 4$, so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die betrachteten Welten zu einem der beiden Typen gehören können:

1. Typus. Stationäre Welten, $R' = 0$, R ist zeitlich konstant.
2. Typus. Nichtstationäre Welten, $R' \neq 0$, M hängt nur von der Zeit ab.

¹⁾ Bezüglich des Linienelements ds^2 siehe z. B. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* I, 345.

Wir betrachten zunächst den Fall der stationären Welt; der Fall der nichtstationären Welt bietet eine große Ähnlichkeit mit dem der nichtstationären Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung; aus diesem Grunde werden wir diesen zweiten Fall nur ganz kurz behandeln.

§ 2. 1. Die Gleichungen (A) liefern für die Indizes $i, k = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt:

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \quad (1)$$

wo P , Q und L zunächst willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Zur Bestimmung von P , Q und L dienen uns die Gleichungen (A), wo man $i, k = 1, 2, 3$ zu setzen hat.

Die Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2}{x_3} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x_3} &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Subtrahiert man die erste Gleichung dieses Systems von der zweiten, so kommt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} P &= n(x_4) x_1^2 + a_1(x_4) + b_1(x_4), \\ Q &= n(x_4) x_2^2 + a_2(x_4) + b_2(x_4). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Beachtet man (1) und (3), so läßt sich die letzte der Gleichungen (2) in der Form:

$$-\frac{3 - \lambda R^2}{x_3^3} (P + Q) = \frac{4n}{x_3} + \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2} - \frac{2}{x_3} \frac{\partial L}{\partial x_3} \quad (4)$$

schreiben. Falls also $P + Q$ eine der Größen x_1 oder x_2 wirklich enthält, d. h. falls einer der Koeffizienten n , a_1 , a_2 von Null verschieden ist, muß der Faktor von $P + Q$ in der Gleichung (4) ver-

schwinden; die rechte Seite dieser Gleichung hängt nämlich weder von x_1 noch von x_2 ab. Der Fall, daß alle drei Größen n, a_1, a_2 verschwinden, muß gesondert betrachtet werden.

Im Falle, daß die Größen n, a_1, a_2 nicht alle drei verschwinden, muß also zwischen λ und der Krümmung des Raumes die Relation:

$$\lambda R^3 = 3 \tag{5}$$

bestehen.

Beachtet man Gl. (5), so reduzieren sich die Gleichungen (2) auf eine einzige Gleichung, welche die Funktion L bestimmt, nämlich:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n. \tag{6}$$

2. Im folgenden müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. $n \neq 0$, 2. $n = 0$. Im ersten Falle zeigen uns die Formeln (D'), (1) und (3), daß die Größe n ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden darf; man kann nämlich durch eine passende Substitution $x_4 = \varphi(x_4)$ immer erreichen, daß $n = 1$ wird. Beachten wir dies, so ergibt Gl. (6):

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3. \tag{7}$$

Um ϱ zu bestimmen, setzen wir in den Gleichungen (A) $i = k = 4$; eine einfache Rechnung zeigt, daß in unserem Falle ϱ gleich Null wird. Der erste Fall wird also durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2}{x_3} \right)^2 dx_4^2 \tag{D'_1}$$

charakterisiert.

Gehen wir zum zweiten Falle ($n = 0$) über, so finden wir für L die Gleichung:

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}. \tag{8}$$

Auch in diesem Falle ergibt die Rechnung für ϱ den Wert Null. Somit charakterisiert sich der zweite Fall ebenfalls durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left[\frac{a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4)}{x_3} \right]^2 dx_4^2. \tag{D'_2}$$

Wir betrachten endlich den Fall, daß alle drei Koeffizienten n, a_1, a_2 verschwinden, so daß M von x_1 und x_2 nicht abhängt.

Bei der Integration der Gl. (2) stoßen wir wiederum auf zwei Fälle:

$$\begin{aligned} 1. \lambda R^2 &= 3, & M &= \frac{M_0(x_4)}{x_3}, \\ 2. \lambda R^2 &= 1, & M &= M(x_4), \end{aligned}$$

wo M_0 und M willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Der erste Fall erweist sich als ein Spezialfall des durch die Formel (D₂') bestimmten Intervalls; eine leichte Rechnung zeigt, daß die Dichte ρ der Materie hier verschwindet.

Der zweite Fall¹⁾ führt, wie man sich leicht überzeugt, zu einer von Null verschiedenen Dichte der Materie. Um zu entscheiden, ob hier die Dichte positiv oder negativ ausfällt, müssen wir diejenige Form des Intervalls heranziehen, welche einer indefiniten quadratischen Form entspricht und durch die Formel (D'') ausgedrückt wird. Rechnet man mit den Gravitationspotentialen der Formel (D'), so findet man, daß im betrachteten Falle M eine Funktion von x_4 allein ist; folglich können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $M = 1$ setzen [dazu braucht man nur statt x_4 die Koordinate $\bar{x}_4 = \varphi(x_4)$ einzuführen]. Berechnet man unter dieser Voraussetzung die Dichte ρ , so findet man:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{c^2}{R^2}, & \rho &= -\frac{2}{\kappa R^2}, \\ d\tau^2 &= -\frac{R^2}{c^2} \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \end{aligned} \quad (D''_3)$$

Dieser Fall ergibt also für ρ einen negativen Wert.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die stationäre Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes nur bei verschwindender oder negativer Dichte der Materie möglich ist; das dieser Welt entsprechende Intervall wird durch die oben angeführten Formeln (D₁'), (D₂') und (D₃'') ausgedrückt.

3. Wir wenden uns nun zum Fall der nichtstationären Welt. Wir bemerken zunächst, daß hier M eine Funktion von x_4 allein ist; die von uns mehrmals gebrauchten Erwägungen zeigen, daß man M der Einheit gleich annehmen darf. Unter den genannten Voraussetzungen finden wir ohne Mühe, daß die Gleichungen (A) für $i = 1, 2, 3$; $k = 4$; und für $i, k = 1, 2, 3$ von selbst erfüllt sind. Setzen wir hierin $i = k = 1, 2, 3$, so erhalten wir die zur Bestimmung der Funktion $R(x_4)$ dienende Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^3} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \quad (9)$$

¹⁾ Auf die Möglichkeit dieses Falles hat mich Dr. W. Fock aufmerksam gemacht.

Diese Gleichung ist völlig analog unserer früheren Gleichung [Gl. (4) der zitierten Notiz]; die letztere geht genau in Gl. (9) über, wenn man dort $c = 1$ setzt. Wir können also die ganze Diskussion der Gl. (4), l. c., auf die soeben hingeschriebene Gleichung übertragen. Demgemäß wollen wir darauf nicht eingehen, sondern berechnen nur die Dichte der Materie ρ für die nichtstationäre Welt.

Schreiben wir für den Fall der nichtstationären Welt das Intervall in der Form (D'') , so erhalten wir für R die Differentialgleichung:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2 R R''}{R^2} - \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert uns die Beziehung:

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{A + R + \frac{\lambda}{3 c^2} R^3}{R},$$

wo A eine willkürliche Konstante ist. Berechnet man die Dichte ρ , so ergibt sich:

$$\rho = \frac{3 A}{\pi R^3}. \quad (10)$$

Die Formel (10) zeigt, daß für ein positives A die Dichte der Materie ebenfalls positiv ist.

Daraus folgt die Möglichkeit der nichtstationären Welten mit konstanter negativer Krümmung des Raumes und mit positiver Dichte der Materie.

§ 3. 1. Wir wenden uns zur Diskussion der physikalischen Bedeutung des in den vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultats. Wir haben uns überzeugt, daß die Einsteinschen Weltgleichungen Lösungen besitzen, die einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes entsprechen. Diese Tatsache weist darauf hin, daß die Weltgleichungen allein genommen noch nicht hinreichen, um die Frage nach der Endlichkeit unserer Welt zu entscheiden. Die Kenntnis der Krümmung des Raumes gibt uns noch keinen unmittelbaren Hinweis auf dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit. Um zu einem bestimmten Schluß über die Endlichkeit des Raumes zu gelangen, bedarf man einiger ergänzender Verabredungen. In der Tat bezeichnen wir einen Raum als endlich, wenn der Abstand zweier beliebiger nicht zusammenfallender Punkte dieses Raumes eine gewisse konstante Zahl nicht überschreitet, was für Punktepaare wir auch nehmen mögen. Folglich müssen wir, bevor wir das Problem der Endlichkeit des Raumes angreifen, uns noch verabreden, welche Punkte dieses Raumes wir als verschieden ansehen. Fassen wir z. B. eine Kugel als eine Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes

auf, so zählen wir die Punkte, die auf demselben Breitenkreise liegen und deren Längen gerade um 360° verschieden ist, als zusammenfallend; hätten wir dagegen diese Punkte als verschieden betrachtet, so würden wir eine mehrblättrige sphärische Fläche im euklidischen Raume erhalten. Der Abstand beliebiger zweier Punkte auf einer Kugel übertrifft nicht eine endliche Zahl; wenn wir jedoch diese Kugel als eine unendlich-vielblättrige Fläche auffassen, können wir (indem wir auf gehörige Weise die Punkte verschiedenen Blättern zuordnen) diesen Abstand beliebig groß machen. Daraus erhellt, daß man, ehe man in die Betrachtungen über die Endlichkeit des Raumes eingeht, präzisieren muß, welche Punkte als zusammenfallend und welche als verschieden angesehen werden.

2. Als Kriterium für die Verschiedenheit der Punkte könnte unter anderem das Prinzip der „Phantomenangst“ dienen. Wir meinen darunter das Axiom, man könne zwischen je zwei verschiedenen Punkten nur eine gerade (geodätische) Linie führen. Nimmt man dies Prinzip an, so darf man zwei Punkte, welche durch mehr als eine gerade Linie verbunden werden können, nicht für verschieden halten. Diesem Prinzip zufolge sind z. B. die zwei Endpunkte desselben Durchmessers einer Sphäre nicht voneinander verschieden. Selbstverständlich schließt dieses Prinzip die Möglichkeit der Phantome aus, denn das Phantom erscheint im selben Punkte wie das ihn erzeugende Bild selbst.

Die soeben besprochene Formulierung des Begriffs von den zusammenfallenden und nicht zusammenfallenden Punkten kann wohl zur Vorstellung führen, daß die Räume mit positiver konstanter Krümmung endlich sind. Jedoch ermöglicht uns das erwähnte Kriterium nicht, auf die Endlichkeit der Räume negativer konstanter Krümmung zu schließen. Dies ist der Grund dafür, daß, unserer Meinung nach, Einsteins Weltgleichungen ohne ergänzende Annahmen noch nicht hinreichen, um einen Schluß über die Endlichkeit unserer Welt zu ziehen.

St. Petersburg, November 1923.

Berichtigung

zu der Arbeit: G. P. Woronkoff und G. J. Pokrowski, Über die selektive Reflexion des Lichtes an diffus reflektierenden Körpern¹⁾.

S. 364, Fig. 10. Neben die Kurve II ist zu setzen ε ; die punktierte Gerade bezieht sich auf Alexandritpapier.

S. 369, Fig. 11. Die Kurven beziehen sich auf Rhodamin B (auf Alexandritpapier), links für $\lambda = 550 \text{ m}\mu$, rechts für $\lambda = 650 \text{ m}\mu$.

¹⁾ ZS. f. Phys. 20, 358—370, 1923.