Zeitschrift für Physik, Bd. 144, S. 612–631 (1956)

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG., Erlangen

Über den Zusammenhang des STEENBECKschen Minimumprinzips mit dem thermodynamischen Prinzip der minimalen Entropieerzeugung

Von

TH. PETERS

Mit 2 Figuren im Text

(Eingegangen am 4. Januar 1956)

Das in der Gasentladungsphysik bekannte STEENBECKsche Prinzip der minimalen Brennspannung läßt sich zurückführen auf das Prinzip der minimalen Entropieproduktion, welches in der thermodynamischen Theorie irreversibler Prozesse auftritt. Als EULERsche Gleichungen dieses Extremalprinzips ergeben sich in erster Näherung die Massen- und Energie-Erhaltungssätze (WERGELAND, MAZUR). Beim Kanalmodell der Lichtbogensäule wird gezeigt, daß neben dem Energiesatz auch das Entropieprinzip erfüllt sein muß, woraus wieder die STEENBECKschen Bedingungen $dE/dr = 0$ bzw. $dE/dT = 0$ folgen.

I. Einleitung

In der Gasentladungsphysik spielt seit langem ein aus der Erfahrung gewonnenes Extremalprinzip eine Rolle, dessen eindeutige Formulierung STEENBECK [*15*] gelang und das seitdem als STEENBECKsches Minimumprinzip bekannt ist. Es wird meist so ausgedrückt, daß der Durchmesser (oder die Temperatur) eines elektrischen Lichtbogens sich so einstellt, daß bei konstantem Strom die Brennspannung einen Minimalwert annimmt. Dieses Prinzip führte insbesondere bei der Anwendung auf thermische Lichtbögen zu überraschend guten Ergebnissen, löste jedoch einerseits gerade wegen seiner praktischen Brauchbarkeit und andererseits wegen der mangelnden theoretischen Deutung zahlreiche Diskussionen aus. Es handelte sich dabei im wesentlichen um die Frage, wieviel Gleichungen zur Bestimmung der Lichtbogendaten erforderlich seien. Diejenigen Autoren, die, wie z.B. KESSELRING und KOPPELMANN [*2*], von vornherein mit dem vereinfachten Kanalmodell der Lichtbogensäule arbeiteten, wiesen darauf hin, daß zur Bestimmung der Säulendaten in ihrem Fall außer der Stromtransport- und Energiegleichung noch eine dritte Gleichung erforderlich sei, an deren Stelle mit Erfolg das STEENBECKsche Minimalprinzip treten konnte. ELENBAAS [*2*] stellte sich hingegen auf den Standpunkt, daß Feldstärke, Stromstärke und Temperaturverteilung in der Bogensäule bei exakter

Integration der Stromtransport- und Energiegleichung völlig bestimmt und daher die Anwendung einer dritten Gleichung, etwa in der Form eines Minimalprinzips, überflüssig sei.

Vom heutigen Standpunkt aus dürfte zu diesem Problem folgendes zu sagen sein: Der allgemeinste Lichtbogen mit Konvektion ist ein Problem der Gasdynamik hoher Temperaturen („Plasmadynamik") und wird somit wie jedes andere thermodynamische System beschrieben durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Ladung, Impuls und Energie. Hinzu kommen die linearen Ansätze für den Stromtransport (OHMsches Gesetz), den ambipolaren Diffusionsstrom (FICKsches Gesetz) und für den Wärmestrom (FOURIERsches Gesetz). Schließlich müssen in diesem Falle auch die MAXWELLschen Gleichungen berücksichtigt werden. Zusammen mit den Randbedingungen können durch Lösung dieses Gleichungssystems alle Zustands- und Feldgrößen im Lichtbogenraum* eindeutig bestimmt werden. Da es indessen fast hoffnungslos ist, mathematische Lösungen dieses allgemeinsten Problems zu finden, vereinfacht man die Grundvoraussetzungen und beschränkt sich auf den stationären zylindersymmetrischen Lichtbogen, zu dessen Beschreibung dann nur noch zwei Bestimmungsgleichungen erforderlich sind, nämlich die Stromtransport-Gleichung und die Energiebilanz, die auch als ELENBAAS-HELLERsche Differentialgleichung bezeichnet wird.

Während bei dieser Problemstellung nun auch wirklich die beiden genannten Beziehungen mit den entsprechenden Randbedingungen zur Festlegung des Lichtbogenzustandes ausreichen, wird die Sachlage ganz anders, wenn man zu weiteren Vereinfachungen schreitet und zum Kanalmodell des Lichtbogens übergeht. Dabei wird die Säule gewöhnlich aufgeteilt in eine elektrische Leitfähigkeitszone mit einheitlicher Temperatur T und variablem Durchmesser $2r$ und in eine Energieableitungszone. Durch diese Modellvorstellung erscheint also ungerufen eine neue Variable, nämlich der „Modellbogenradius" r. Das Problem ist nun nicht mehr durch zwei Gleichungen beschreibbar, erfordert also eine zusätzliche dritte Bestimmungsgleichung, die sich in Gestalt des STEENBECKschen Minimumprinzips anbietet.

ROMPE und WEIZEL [*14*] haben diesen Sachverhalt schon einmal dargestellt und kamen zu dem Schluß, daß der ELENBAASsche Standpunkt, nach dem die zusätzliche Verwendung eines Minimalprinzips bei exakt formuliertem Problem überflüssig ist, seine Berechtigung hat, denn die Forderung nach einer dritten Bestimmungsgleichung ist ja nur im Näherungscharakter des Kanalmodells begründet. Sie diskutierten aber weiter die einzige noch verbleibende Möglichkeit, daß

---

* Dieser Lichtbogenraum enthält unseren Voraussetzungen gemäß nur thermisches Plasma, umfaßt also nicht die Kathoden- und Anodenfallgebiete.

es sich nämlich bei der STEENBECKschen Forderung um ein echtes Extremalprinzip im Sinne der mechanischen oder thermodynamischen Prinzipien handeln könnte, wobei die ELENBAAS-HELLERsche Energiebilanz dann allerdings als EULERsche Gleichung dieses Variationsproblems erscheinen müßte. Die weiteren Untersuchungen der genannten Autoren führten indessen zu dem Ergebnis, daß auch diese Deutung unhaltbar ist, das Prinzip der minimalen Brennspannung als solches also kein echtes Minimumprinzip sein kann und daß der Grund für dieses Versagen offensichtlich darin zu erblicken ist, daß die Bogenentladung keine rein elektrische Erscheinung darstellt, weil auch thermische Prozesse wesentlich daran beteiligt sind.

Immerhin war die praktische Brauchbarkeit des STEENBECKschen Minimumtheorems insbesondere durch die Arbeiten von STEENBECK [*16*], FOITZIK [*3*], KIRSCHSTEIN und KOPPELMANN [*7*] ziemlich gesichert. Dennoch schien das Prinzip auf Grund der Fehlschläge in den theoretischen Deutungsversuchen lediglich den Wert einer Art Faustregel zu besitzen.

Nun wurde unabhängig von dieser experimentell fundierten Entwicklung auf dem Gebiete der Gasentladungsphysik sowohl beim Ausbau der kinetischen Gastheorie (ENSKOG, CHAPMAN) als auch gleich zu Beginn der Entstehung einer phänomenologischen Theorie irreversibler thermodynamischer Prozesse (ONSAGER, PRIGOGINE, MEIXNER) ein Prinzip bekannt, das Aussagen über Extremaleigenschaften der Entropieproduktion beim Ablauf irreversibler Prozesse bzw. gaskinetischer Stoßvorgänge zuließ. Im weiteren Verlauf der Entwicklung, die auf gaskinetischer Seite unter anderen von KOHLER, auf thermodynamischer Basis im wesentlichen von DE GROOT, HAASE, WERGELAND und MAZUR vorangetrieben wurde, ergab sich folgende Aussage:

Der *stationäre Nichtgleichgewichtszustand* eines thermodynamischen Systems ist ausgezeichnet durch einen (positiven) *Minimalwert der Entropieproduktion.*

Demnach ist nicht das Prinzip der Entropievermehrung das entscheidende Gesetz, welches den Ablauf eines thermodynamischen Prozesses regelt — die Entropie eines offenen Systems kann beispielsweise durchaus abnehmen —, sondern die Tendenz, eine minimale (stets positive) Entropieproduktion anzustreben, bestimmt das Geschehen.

Da nun der elektrische Lichtbogen sich durch nichts anderes von den übrigen thermodynamischen Systemen unterscheidet, als daß in seinem thermischen Plasma besonders wirksame irreversible Prozesse ablaufen, muß das Theorem der minimalen Entropieerzeugung auch hier gelten, und es taucht zwangsläufig die Frage auf, ob nicht ein Zusammenhang zwischen diesem Prinzip und der STEENBECKschen

Forderung nach minimaler Brennspannung existiert. Denn wenn das letztere Prinzip nach der Feststellung von ROMPE und WEIZEL selbst auch kein echtes Minimumprinzip ist, so besteht dennoch die Möglichkeit, daß es sich auf ein übergeordnetes Extremalprinzip zurückführen läßt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß die STEENBECKsche Minimumforderung für die Brennspannung aus dem Prinzip der minimalen Entropieproduktion abgeleitet werden kann und somit lediglich ein Spezialfall des allgemeineren thermodynamischen Prinzips ist.

II. Die Erhaltungssätze als EULERsche Gleichungen des Prinzips der minimalen Entropieproduktion

Bevor wir den Zusammenhang zwischen den beiden Extremalprinzipien im einzelnen untersuchen, müssen wir zunächst noch auf einige Voraussetzungen und Begriffe der Thermodynamik irreversibler Prozesse eingehen.

Eine ausführlichere Behandlung der Methodik dieser phänomenologischen Theorie ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht möglich. Nähere Einzelheiten sind aus den umfassenden Darstellungen von PRIGOGINE [*12*], DE GROOT [*1*], HAASE [*6*] und aus den zahlreichen Arbeiten von MEIXNER [*11*] zu entnehmen. MAECKER und PETERS [*9*] haben die Theorie speziell auf das thermische Plasma und den elektrischen Lichtbogen angewandt (siehe vorangehende Arbeit).

Wenn das Theorem der minimalen Entropieproduktion ein echtes Extremalprinzip sein soll, so muß nachgewiesen werden, daß die Erhaltungssätze für Masse, Ladung und Energie identisch sind mit den EULERschen Gleichungen dieses Extremalproblems. Diesen Nachweis haben WERGELAND [*18*] und MAZUR [*10*] erbracht. Während letzterer die irreversiblen Prozesse der Wärmeleitung, des elektrischen Stromtransportes, der Thermodiffusion und der chemischen Reaktionen einzeln behandelt und auch zeigt, daß im stationären Zustand wirklich ein *Minimum* der Entropieerzeugung vorliegt, hat der erstgenannte Autor eine geschlossene Ableitung für alle Diffusionsströme einschließlich der Wärmeströmung gegeben.

Voraussetzung für die Behandlung irreversibler Prozesse in „Gleichgewichtsnähe" ist, daß zwischen den in den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie vorkommenden generalisierten „Strömen" $\mathfrak{J}_i$ und „Kräften" $\mathfrak{X}_i$ lineare Beziehungen bestehen. Diese sog. phänomenologischen Ansätze lauten

für die Massenströme: $$\mathfrak{J}_i = \sum_K L_{iK}\, \mathfrak{X}_K + L_{iu}\, \mathfrak{X}_u \tag{1a}$$

und für den Energiestrom: $$\mathfrak{J}_u = \sum_K L_{uK}\, \mathfrak{X}_K + L_{uu}\, \mathfrak{X}_u \tag{1b}$$

Dabei gelten für die Transportkoeffizienten die ONSAGERschen Symmetriebeziehungen

$$\left.\begin{aligned} L_{iK} &= L_{Ki} \\ L_{uK} &= L_{Ku} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und für die Kräfte

$$\mathfrak{X}_K = \mathfrak{F}_K - T \operatorname{grad} \frac{\mu_K}{T} \tag{3a}$$

bzw. für die „thermische Kraft"

$$\mathfrak{X}_u = -\frac{1}{T} \operatorname{grad} T = T \operatorname{grad} \frac{1}{T} \tag{3b}$$

mit μ_K = chemisches Potential pro Masseneinheit der Komponente K, $\mathfrak{F}_K$ = äußere Kraft auf die Masseneinheit der Komponente K.

Bei der hier vorliegenden Problemstellung erweist es sich nun als vorteilhaft, von dem allgemeinen System (1) durch eine Lineartransformation der Ströme und Kräfte zu einem „elektrochemischen System" derart überzugehen, daß in den Kraftbeziehungen an Stelle der chemischen Potentiale die elektrochemischen Potentiale

$$\tilde{\mu}_K = \mu_K + \frac{e_K}{m_K} \varphi \tag{4}$$

treten.

e_K = Elementarladung eines Teilchens der Komponente K (positiv, negativ oder Null),
m_K = Masse eines solchen Teilchens und
φ = elektrisches Potential.

Teilen wir außerdem die äußeren Kräfte auf in Massenkräfte $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ und elektrische Kräfte

$$\mathfrak{F}_K = \tilde{\mathfrak{F}}_K - \frac{e_K}{m_K} \operatorname{grad} \varphi \tag{5}$$

$$(\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi = \text{elektrische Feldstärke}),$$

so ergeben sich für das transformierte System die Gleichungen

$$\tilde{\mathfrak{J}}_i = \sum_K \tilde{L}_{iK} \tilde{\mathfrak{X}}_K + \tilde{L}_{iu} \tilde{\mathfrak{X}}_u, \tag{6a}$$

$$\tilde{\mathfrak{J}}_u = \sum_K \tilde{L}_{uK} \tilde{\mathfrak{X}}_K + \tilde{L}_{uu} \tilde{\mathfrak{X}}_u \tag{6b}$$

mit folgenden Transformationseigenschaften für die Ströme und Kräfte:

$$\tilde{\mathfrak{J}}_i = \mathfrak{J}_i, \tag{7a}$$

$$\tilde{\mathfrak{J}}_u = \mathfrak{J}_u + \sum_K \frac{e_K}{m_K} \mathfrak{J}_K \varphi = \mathfrak{J}_u + \varphi j, \tag{7b}$$

$$\tilde{\mathfrak{X}}_K = \tilde{\mathfrak{F}}_K - T \operatorname{grad} \frac{\tilde{\mu}_K}{T} = \mathfrak{X}_K - \frac{e_K}{m_K} \varphi \mathfrak{X}_u, \tag{7c}$$

$$\tilde{\mathfrak{X}}_u = \mathfrak{X}_u = T \operatorname{grad} \frac{1}{T}. \tag{7d}$$

Die in (7b) auftretende elektrische Stromdichte j ist definiert durch

$$j = \sum_K \frac{e_K}{m_K} \mathfrak{J}_K . \tag{8}$$

Der neue Energiestrom $\tilde{\mathfrak{J}}_u$ setzt sich zusammen aus dem eigentlichen Wärmestrom $\mathfrak{J}_u$ und dem elektrischen Energiestrom.

Die entsprechende Energiebilanz erhält dann im stationären Fall und bei Vernachlässigung einer makroskopischen Strömung die Form

$$-\operatorname{div} \tilde{\mathfrak{J}}_u + \sum_K \tilde{\mathfrak{F}}_K \cdot \tilde{\mathfrak{J}}_K = 0 . \tag{9}$$

Schließlich ergibt sich die Entropiebilanz unter denselben Bedingungen zu

$$-\operatorname{div} \tilde{\mathfrak{J}}_s + \tilde{\sigma}_s = 0 , \tag{10}$$

wobei die Entropiestromdichte

$$\tilde{\mathfrak{J}}_s = \frac{1}{T}\Big(\tilde{\mathfrak{J}}_u - \sum_K \tilde{\mu}_K \tilde{\mathfrak{J}}_K\Big) = \frac{1}{T}\Big(\mathfrak{J}_u - \sum_K \mu_K \mathfrak{J}_K\Big) = \mathfrak{J}_s \tag{11}$$

und die Entropieproduktion

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{1}{T}\Big(\tilde{\mathfrak{J}}_u \cdot \tilde{\mathfrak{X}}_u + \sum_K \tilde{\mathfrak{J}}_K \cdot \tilde{\mathfrak{X}}_K\Big) = \frac{1}{T}\Big(\mathfrak{J}_u \cdot \mathfrak{X}_u + \sum_K \mathfrak{J}_K \cdot \mathfrak{X}_K\Big) = \sigma_s \tag{12}$$

invariant gegenüber der vorgenommenen Lineartransformation sind.

Indem wir nun speziell zur WERGELANDschen Formulierung übergehen und aus den Koeffizienten L_{iK}, L_{uK}, die als Funktion von φ und T aufzufassen sind, einen Faktor $1/T$ abspalten, können wir für alle Ströme schreiben

$$\tilde{\mathfrak{J}}_i = \sum_K \alpha_{iK} \Big(\frac{1}{T} \mathfrak{F}_K - \operatorname{grad} \frac{\tilde{\mu}_K}{T}\Big) \tag{13}$$

müssen dann aber, damit in (13) auch der Energiestrom $\tilde{\mathfrak{J}}_u$ und die „thermischen Kräfte" enthalten sind, definieren

$$\tilde{\mathfrak{F}}_u = 0 , \quad \tilde{\mu}_u = 1 .$$

Die Koeffizienten α_{iK} genügen nach wie vor der ONSAGER-Beziehung $\alpha_{iK} = \alpha_{Ki}$. Für die Entropieproduktion $\tilde{\sigma}_s$ gilt also mit Gl. (12)

$$\tilde{\sigma}_s = \sum_{i,K} \alpha_{iK} \Big(\frac{1}{T} \tilde{\mathfrak{F}}_i - \operatorname{grad} \frac{\tilde{\mu}_i}{T}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{T} \tilde{\mathfrak{F}}_K - \operatorname{grad} \frac{\tilde{\mu}_K}{T}\Big) . \tag{14}$$

Nach dem Prinzip der minimalen Entropieerzeugung wird nun im stationären Zustand mit $d\tau$ als Volumelement

$$\delta \Theta = \delta \int \tilde{\sigma}_s \, d\tau = 0 . \tag{15}$$

Betrachten wir $\tilde{\sigma}_s$ als Funktion der Potentiale $\left(\frac{\tilde{\mu}_K}{T}\right)$ und $\left(\frac{1}{T}\right)$ und halten die Koeffizienten bei der Variation in erster Näherung konstant*, so ergeben sich aus diesem Variationsproblem die EULERschen Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\delta\tilde{\sigma}_s}{\delta\left(\frac{\tilde{\mu}_K}{T}\right)} = -\operatorname{div}\tilde{\mathfrak{J}}_i = 0, \quad i \neq u, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\delta\tilde{\sigma}_s}{\delta\left(\frac{1}{T}\right)} = \operatorname{div}\tilde{\mathfrak{J}}_u - \sum_i \tilde{\mathfrak{J}}_i \cdot \tilde{\mathfrak{F}}_i = 0. \tag{17}$$

Gl. (16) ist die Kontinuitätsgleichung für die Masse. Mit der Beziehung (8) ist daher auch die Erhaltungsgleichung für die elektrische Ladung

$$\operatorname{div} j = 0 \tag{18}$$

erfüllt. Gl. (17) stellt die stationäre Form des Energiesatzes dar und ist identisch mit Gl. (9). Das bedeutet, daß die Erhaltungssätze für Masse, Ladung und Energie die EULERschen Gleichungen des Prinzips der minimalen Entropieproduktion sind.

(Es mag an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich betont werden, daß man dieses Resultat nur auf der Grundlage der ONSAGER-Beziehungen $\alpha_{iK} = \alpha_{Ki}$ erzielen kann.)

Sind nun z.B. keine mechanischen Kräfte $\tilde{\mathfrak{F}}_i$ vorhanden, und schreibt man den Wärmestrom** in der einfachen Form $\mathfrak{J}_u = -\varkappa \operatorname{grad} T$, so geht Gl. (17) unter Berücksichtigung von (7b) und (18) über in

$$\operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} T + (j, \mathfrak{E}) = 0, \tag{19}$$

d.h., die ELENBAAS-HELLERsche Differentialgleichung der Lichtbogentheorie ist ebenfalls eine EULERsche Gleichung des Minimalprinzips.

III. Rückführung der STEENBECKschen Minimumbedingung auf das thermodynamische Prinzip der minimalen Entropieerzeugung

Nachdem wir, der Ableitung von WERGELAND folgend, festgestellt haben, daß die Erhaltungssätze und somit auch die darin enthaltene ELENBAAS-HELLERsche Energiebilanz als EULERsche Gleichungen des Prinzips der minimalen Entropieproduktion anzusehen sind, wenden wir uns nunmehr der eingangs aufgeworfenen Frage zu, ob ein Zusammenhang besteht zwischen diesem allgemeinen thermodynamischen Prinzip und der STEENBECKschen Minimumbedingung. Dazu müssen

* Dieser Näherungscharakter des Variationsverfahrens wird in Abschn. V genauer diskutiert.

** Ganz allgemein ist in der Energiestromdichte natürlich auch die der Strahlung enthalten.

wir versuchen, die Entropiebilanz für den stationären Zustand mit Hilfe der Erhaltungssätze so umzuformen, daß ein Ausdruck entsteht, in den nur noch meßbare elektrische Größen oder bekannte Randbedingungen eingehen.

Nach Gl. (10) gilt für die Entropiebilanz in einem stationären Nichtgleichgewichtssystem unter Anwendung des GAUSSschen Satzes

$$\int \tilde{\sigma}_s \, d\tau = \int \operatorname{div} \tilde{\mathfrak{J}}_s \, d\tau = \oint \tilde{\mathfrak{J}}_s \cdot d f, \tag{20}$$

d.h., die im Inneren des gesamten Systems produzierte Entropie ist gleich dem Integral der Entropiestromdichte genommen über die das System umgebende Fläche.

Setzen wir für $\tilde{\mathfrak{J}}_s$ den Ausdruck aus Gl. (11) ein, so wird die gesamte Entropieproduktion zu

$$\Theta = \int \tilde{\sigma}_s \, d\tau = \oint \frac{1}{T} \Big(\tilde{\mathfrak{J}}_u - \sum_K \tilde{\mu}_K \tilde{\mathfrak{J}}_K \Big) \cdot d f. \tag{21}$$

Um alle irreversiblen Prozesse zu erfassen, müssen wir als das System begrenzende Fläche eine Isothermenfläche wählen, auf der die Temperatur konstant und gleich der Umgebungstemperatur ist.

Dazu denke man sich das betrachtete System eingebettet in eine so große Umgebung (Wärmebehälter), daß deren Temperatur trotz ständiger Energiezufuhr aus dem System nicht geändert wird.

Bezeichnen wir die Temperatur der Umgebung mit T_R = Randtemperatur, so ist

$$\Theta = \frac{1}{T_R} \oint \Big(\tilde{\mathfrak{J}}_u - \sum_K \tilde{\mu}_K \tilde{\mathfrak{J}}_K \Big) \cdot d f = \frac{1}{T_R} \int \operatorname{div} \Big(\tilde{\mathfrak{J}}_u - \sum_K \tilde{\mu}_K \tilde{\mathfrak{J}}_K \Big) \, d\tau. \tag{22}$$

Mit den Erhaltungssätzen für die Masse (16) und die Energie (17) im stationären Zustand wird aus (22)

$$\Theta = \frac{1}{T_R} \int \sum_K \big(\tilde{\mathfrak{J}}_K , \tilde{\mathfrak{F}}_K - \operatorname{grad} \tilde{\mu}_K \big) \, d\tau. \tag{23 a}$$

Haben die äußeren Kräfte $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ ein Potential: $\tilde{\mathfrak{F}}_K = -\operatorname{grad} \psi$, so ist mit Einführung des allgemeinen Potential $\tilde{\tilde{\mu}}_K = \tilde{\mu}_K + \psi$

$$T_R \cdot \Theta = \int \sum_K - \big(\tilde{\mathfrak{J}}_K , \operatorname{grad} \tilde{\tilde{\mu}}_K \big) \, d\tau. \tag{23 b}$$

Für das Folgende ist es indessen vorteilhafter, das Integral mittels der Beziehung (4) in einen mechanisch-thermischen und einen rein elektrischen Anteil aufzuteilen, dann folgt mit $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ und $j = \sum_K \frac{e_K}{m_K} \mathfrak{J}_K$ der Ausdruck

$$T_R \cdot \Theta = \int \sum_K -\left(\mathfrak{J}_K, \operatorname{grad}(\mu_K + \psi)\right) d\tau + \int (j, \mathfrak{E})\, d\tau. \tag{24}$$

Das erste Integral enthält sowohl die durch mechanische als auch durch „chemisch-thermische" Kräfte verursachten Verlustleistungen, während das zweite Integral die elektrische Verlustleistung (JOULEsche Wärme) darstellt. In Worten können wir die Gl. (23b) bzw. (24) also folgendermaßen ausdrücken:

Umgebungstemperatur × Entropieerzeugung = Verlustleistung.

Dieser Satz ist ertmalig klar von GOUY und STODOLA auf Grund einfacher thermodynamischer Überlegungen unter Verwendung des zweiten Hauptsatzes ausgesprochen worden. Er lautet in der Formulierung von STODOLA [*17*]:

„Bei nicht umkehrbaren Vorgängen irgendwelcher (auch chemischer) Art erleidet die Nutzarbeit eine Verringerung um das Produkt aus der stattgefundenen Zunahme der Entropie aller am Prozeß beteiligten Körper und der Temperatur des wärmeableitenden Körpers, d.h. der Umgebung."

An Stelle des Ausdrucks „Verringerung der Nutzarbeit" steht oben „Verlustleistung" und dementsprechend muß „Zunahme der Entropie" durch „Entropieerzeugung" ersetzt werden.

Wendet man Gl. (24) nun auf den elektrischen Lichtbogen an, so ist einzusehen, daß das erste Integral, welches den mechanisch-thermischen Beitrag zur Verlustleistung darstellt, keine Rolle spielt gegenüber dem zweiten Integral, welches die JOULEsche Wärme enthält. Denn der Einfluß z.B. des Schwerefeldes und weiterhin von Druck-, Temperatur- oder Konzentrationsgradienten, die impliziet im Gradienten des chemischen Potentials enthalten sind, auf den Stromtransport ist im elektrischen Lichtbogen so gering gegenüber dem des angelegten elektrischen Feldes, daß er in sehr guter Näherung vernachlässigt werden kann. Bei der gewöhnlichen Schreibweise des OHMschen Gesetzes $j = \sigma \mathfrak{E}$ bleiben die durch mechanische oder „thermische" Kräfte erzeugten Stromanteile ja ebenfalls unberücksichtigt.

Die Entropieproduktion im Lichtbogenraum ist daher gegeben durch

$$\Theta = \frac{1}{T_R} \int (j, \mathfrak{E})\, d\tau = \frac{I \cdot U}{T_R}, \tag{25a}$$

wenn unter $U = \int \mathfrak{E} \cdot ds$ die Potentialdifferenz, also die Brennspannung und unter $I = \int j \cdot df$ die Stromstärke verstanden wird.

Für einen zylindrischen Lichtbogen gilt dementsprechend pro cm Säulenlänge

$$\Theta = \frac{I E}{T_R} . \tag{25b}$$

Da nun die Entropieproduktion im stationären Zustand einen Minimalwert annimmt, ergibt sich die Bedingung

$$\delta\Theta = \delta\left(\frac{I U}{T_R}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta\Theta = \delta\left(\frac{I E}{T_R}\right) = 0 , \tag{26a, b}$$

und mit vorgegebener Stromstärke I und selbstverständlich fester Randtemperatur T_R

$$\delta U = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta E = 0 . \tag{27a, b}$$

Das heißt die Brennspannung bzw. die elektrische Feldstärke nimmt bei gegebenem Strom und gegebenen Randbedingungen einen Minimalwert an. Das ist das STEENBECKsche Minimumprinzip, welches sich somit als Spezialfall eines echten thermodynamischen Extremalprinzips erweist.

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse kurz zusammenfassen: Aus dem Variationsproblem, das Integral über die Entropieerzeugung zu einem Minimum zu machen, ergeben sich als EULERsche Gleichungen nach WERGELAND und MAZUR die Erhaltungssätze für Masse, Ladung und Energie. Die Lösungsfunktionen $\frac{\tilde{\mu}_K}{T}(x, y, z)$ und $T(x, y, z)$ dieser Gleichungen sind demnach die „Extremalen" des Variationsproblems.

Bei der elektrischen Lichtbogensäule, bei der der Einfluß des mechanischen und chemischen Potentials $(\psi + \mu_K)$ gegenüber dem des elektrischen Potentials φ auf den Stromtransport vernachlässigt werden kann, ist die Forderung nach minimaler Entropieerzeugung gleichbedeutend mit der Aussage, daß der Spannungsverlust entlang der gesamten Säule bei konstantem Strom und festen Randbedingungen einen Minimalwert annehmen soll. Das STEENBECKsche Prinzip ist allgemein daher folgendermaßen zu formulieren:

In einem stationären Lichtbogen stellt sich bei *gegebenem Strom* und *festen Randbedingungen* die *Temperaturverteilung* und damit auch die *Stromdichteverteilung* in der Säule so ein, daß der *Spannungsverlust* entlang der Säule einen *Minimalwert* annimmt.

Die eingangs angegebene, oft verwendete Formulierung, nach welcher sich der *Bogenradius* entsprechend der Minimalforderung für die Brennspannung einstelle, ist demgegenüber mit Vorsicht zu behandeln. Sie bezieht sich speziell auf die Kanalmodellvorstellung der Lichtbogensäule, auf die wir im folgenden Abschnitt näher eingehen werden.

IV. Kanalmodell

Praktische Anwendung findet das STEENBECKsche Minimumprinzip im wesentlichen beim Kanalmodell des elektrischen Lichtbogens. Dabei wird die zylindrische Lichtbogensäule aufgeteilt (STEENBECK [*16*]) in einen „Kern" mit dem Durchmesser $2r$, in dem bei konstanter Temperatur ausschließlich die elektrische Leitung stattfindet und in eine daran anschließende Energieableitungszone, die bis zum Bogenrand R mit der Randtemperatur (Umgebungstemperatur) T_R reicht (Fig. 1).

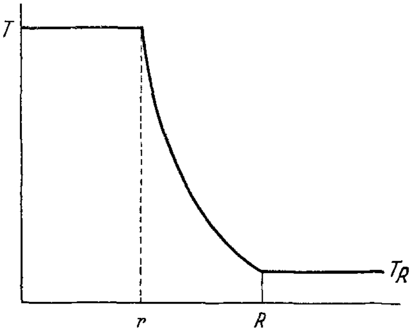

Fig. 1. Kanalmodell des elektrischen Lichtbogens. Aufteilung der Säule in einen elektrisch leitenden „Kern" konstanter Temperatur T und Radius r und daran anschließende Energieableitungszone bis zum Bogenrand R mit der Randtemperatur T_R

Die gesamte im Kern erzeugte elektrische Leistung IE muß in dieser Zone durch Wärmeleitung, Ausstrahlung oder Konvektion abgeführt werden. Wir wollen uns im folgenden auf die reine Wärmeleitung beschränken, möchten aber darauf hinweisen, daß das Endergebnis unabhängig davon ist, welche speziellen Vorstellungen wir uns von dem Mechanismus der Energieabgabe machen.

Um nun die charakteristischen Größen der Modellbogensäule, den Kerndurchmesser $2r$, die Temperatur T und die Feldstärke E bei vorgegebenem Strom I und festen Randbedingungen berechnen zu können, stehen zunächst zwei Gleichungen zur Verfügung: Die Stromtransportgleichung

$$I = j\,\pi r^2 = \sigma(T)\,E\,\pi r^2 \tag{28}$$

und die Energiegleichung

$$IE = 2\pi r\,W_r = -2\pi r\,\varkappa(T)\,\frac{dT}{dr} = \frac{2\pi}{\ln R/r}\int\limits_{T_R}^{T}\varkappa(T)\,dT = g(r)\cdot h(T) \tag{29}$$

mit dem radialen Wärmestrom

$$W_r = -\varkappa(T)\,\frac{dT}{dr}\,. \tag{30}$$

Wir haben somit zwei Bedingungsgleichungen für das Wertetripel (E, r, T), aus denen nur eine Unbekannte, entweder T oder r, eliminiert werden kann, so daß noch eine Funktion $E(r)$ oder $E(T)$ übrig bleibt. An dieser Stelle greift nun STEENBECKs Prinzip der minimalen Feldstärke ein, welches nur die Minima dieser Funktionen zuläßt. Wir erhalten also als dritte Bedingungsgleichung

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dE}{dT} = 0\,. \tag{31a, b}$$

In der Einleitung haben wir bereits auf die Kritik hingewiesen, welche die Anwendung dieses seinerzeit theoretisch unbegründeten Prinzips gefunden hat. Die Frage ist, warum das Kanalmodell eine so eigenartige Unbestimmtheit aufweist, die eine dritte Bestimmungsgleichung erforderlich macht, während die nach ELENBAAS exakt formulierte Theorie zylindrischer Bogensäulen doch mit zwei Gleichungen (Stromtransportgleichung und Energiebilanz) auskommt. Diese mathematische Unbestimmtheit bei der Kanalmodellvorstellung zeigt deutlich, daß wir noch irgendeine physikalische Bedingung, die im elektrischen Lichtbogen erfüllt sein muß, übersehen haben. Nun ist zwar die Energiegleichung (29) formal in Ordnung, aber wir haben es bei dem elektrischen Lichtbogen mit einem thermodynamischen System zu tun, und aus der Thermodynamik ist bekannt, daß man sich sehr wohl Systeme ausdenken kann, die zwar das Energieprinzip, also den ersten Hauptsatz, erfüllen, aber sich dennoch nicht in der Natur realisieren lassen, weil sie dem zweiten Hauptsatz widersprechen.

Die Aufstellung einer Entropiebilanz, wie sie in der Theorie irreversibler Prozesse vorgenommen wird, ist nun im Grunde nichts anderes als eine quantitative Fassung des zweiten Hauptsatzes, und die Minimalforderung für die Entropieproduktion ist offensichtlich eine Bedingung, die jedes thermodynamische System im stationären Nichtgleichgewicht erfüllen muß. Bei der durch die exakten Differentialgleichungen beschriebenen Bogentheorie ist diese Bedingung automatisch befriedigt, weil, wie wir oben gesehen haben, diese Differentialgleichungen mit den EULERschen Gleichungen des Minimalprinzips identisch sind. Beim Kanalmodell arbeiten wir hingegen mit Gleichungen, die der speziellen Modellvorstellung angepaßt sind, es muß daher zusätzlich noch geprüft werden, unter welchen Bedingungen neben dem Energieprinzip auch die Forderungen der Thermodynamik befriedigt sind.

Dazu gehen wir wieder aus von dem Prinzip der minimalen Entropieproduktion. Für die lokale Entropieerzeugung im elektrischen Lichtbogen gilt nach (12) (für $\mathfrak{J}_u$ werde hier $\mathfrak{W}$ geschrieben)

$$\sigma_s = \left(\mathfrak{W}, \operatorname{grad}\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}(j, \mathfrak{E}), \tag{32}$$

bei Zylindersymmetrie also

$$\sigma_s = W_r \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{\sigma(T)\, E^2}{T}. \tag{33}$$

Die gesamte Entropieproduktion pro cm Säulenlänge ist dann

$$\Theta = 2\pi \int_0^R \sigma_s r\, dr = 2\pi \left\{ \int_0^r \frac{\sigma_{(T)} E^2}{T} r\, dr + \int_r^R W_r \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{T}\right) r\, dr \right\}. \tag{34}$$

Bei der Berechnung des ersten Integrals berücksichtigen wir, daß die Temperatur T und die Längsfeldstärke E über den gesamten Querschnitt πr^2 des Kernes konstant sind, in das zweite Integral setzen wir für den Wärmestrom den Ausdruck $W_r = \frac{IE}{2\pi r}$ aus Gl. (29) ein. Dann gilt mit (28)

$$\Theta = \frac{\sigma E^2 \pi r^2}{T} + IE \int_T^{T_R} d\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{IE}{T} + IE\left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T}\right) = \frac{IE}{T_R}. \quad (35)$$

Dasselbe Ergebnis fanden wir bereits bei der allgemeinen Ableitung des STEENBECKschen Prinzips aus dem Entropieprinzip [s. Gl. (25b)].

Denken wir uns nun aus den beiden Gln. (28) und (29) wieder eine Variable (T oder r) eliminiert, so wird bei konstanter Stromstärke I und festen Randbedingungen ($R, T_R = \text{const}$) die Feldstärke E eine reine Funktion von r oder T, und da Θ im stationären Fall ein Minimum haben soll, muß mit I und $T_R = \text{const}$ nach Gl. (35) auch E einen Minimalwert annehmen, der durch

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dE}{dT} = 0 \quad (36\text{a, b})$$

zu bestimmen ist. Mit Einführung des Prinzips der minimalen Entropieproduktion gelangen wir also zwangsläufig wieder zu den Bedingungen (31a, b), die STEENBECK schon früher ohne besondere theoretische Begründung eingeführt hat, um die Bogendaten eindeutig festzulegen. Wir sehen jetzt, daß diese Bedingungen erforderlich sind, um neben dem OHMschen Gesetz (28) und dem Energieprinzip (29) auch die thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten zu befriedigen.

Wir müssen noch etwas zur wörtlichen Formulierung des STEENBECKschen Prinzips sagen. In dem eingangs angegebenen Wortlaut kommt der Begriff des „Bogenradius" vor, der gelegentlich mit dem Gesamtradius R des Bogens verwechselt worden ist. Aus der Art der obigen Ableitung ist zu ersehen, daß damit nur der Radius des Bogenkernes, also der elektrischen Leistungszone, gemeint sein kann, während der Bogenrand R mit seiner Temperatur T_R vorgegeben ist. Das Minimumprinzip muß bei der Anwendung auf das Kanalmodell präziser gefaßt etwa folgendermaßen lauten:

In einem stationären Lichtbogen stellt sich bei *gegebenem Strom I* und *vorgegebenen Randbedingungen* (Bogenrand R mit $T = T_R$) der *Radius* (oder die *Temperatur*) der elektrisch leitenden Zone so ein, daß die *elektrische Feldstärke einen Minimalwert* annimmt.

Die Zweideutigkeit des Begriffes „Bogenradius" hat in der Tat zu einigen scheinbaren Fehlresultaten geführt, für die leider das STEENBECKsche Minimumprinzip verantwortlich gemacht wurde. Da es bei anderen Gelegenheiten wiederum recht gute Ergebnisse lieferte, zog man den Schluß, daß das Minimumprinzip nur in besonders „günstigen" Fällen anwendbar sei. Es erhielt somit den Charakter eines Zufalltreffers und verlor seine Allgemeingültigkeit.

Die vermeintlichen Fehlleistungen können aber sofort aufgeklärt werden, wenn man sich an Hand des obigen Rechenganges klar macht, daß das Minimumprinzip im Grunde als Variationsproblem aufzufassen ist. Stellen wir z.B. die Stromtransportgleichung (28) und die Energiegleichung (29) graphisch dar, so ergeben diese mit der Nebenbedingung $I, R, T_R = \text{const}$ zwei Flächen im (r, T, E)-Raum bzw. deren Schnittkurve (Fig. 2). Im Gegensatz zur exakten Säulentheorie, bei welcher der Bogenzustand durch die obigen Rand- und Nebenbedingungen eindeutig festliegt, wird hier also noch eine unendliche Mannigfaltigkeit von möglichen Bogenzuständen zugelassen. Das Minimumprinzip der Entropieerzeugung bzw. das gleichwertige STEENBECKsche Prinzip gleicht diese durch die Näherungsgleichungen (28) und (29) eingeschleppte Unbestimmtheit wieder aus, indem es von den unendlich vielen Wertetripeln (r, T, E) der Raumkurve nur dasjenige als reell ansieht, welches einem Minimalwert der Feldstärke E und somit auch den thermodynamischen Grundsätzen entspricht*. Sämtliche Punkte mit Ausnahme des einen, der im Minimum der Raumkurve liegt, sind daher physikalisch nicht realisierbar und geben im Sinne unseres Variationsproblems nur virtuelle Zustände wieder. Man kann folglich keine physikalischen Aussagen aus dem Verlauf dieser Kurve entnehmen, obwohl die Versuchung dazu groß ist. Betrachtet man z.B. deren Projektion auf die (T, r)-Ebene — das ist gleichbedeutend mit der Elimination von E aus den Gln. (28) und (29) —, so zeigt diese, daß die Temperatur T mit abnehmendem r anwächst. Das wird nun in der Tat beim ersten Hinsehen von der Erfahrung bestätigt, führt aber sogleich

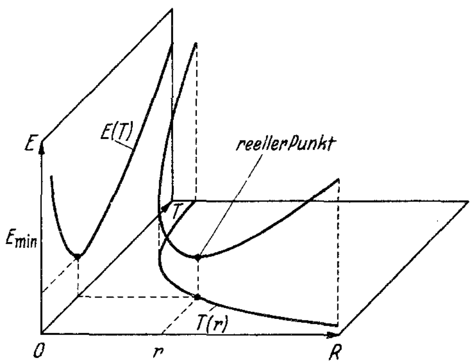

Fig. 2. Darstellung der von der Stromtransportgleichung und Energiegleichung bestimmten Raumkurve im (r, T, E)-Raum und deren Projektion auf die (r, T)- und (T, E)-Ebene. Alle Punkte dieser Kurve sind physikalisch nicht realisierbar bis auf den stationären, der dem Minimumprinzip entspricht. Nebenbedingungen I und $R = \text{const}$

* Im nächsten Abschnitt wird auf ein Analogon zu dieser Raumkurve hingewiesen, nämlich auf die HUGONIOT-Kurve bei der Detonationswellentheorie. Auch diese Kurve wird durch einen Näherungsansatz gewonnen und der einzige stabile Zustand durch dieselbe Forderung nach minimaler Entropieerzeugung aus der unendlichen Mannigfaltigkeit ausgesondert.

zum Widerspruch, wenn man den zugehörigen Feldstärkeverlauf in Fig. 2 betrachtet. Mit abnehmendem Radius r fällt auch E zunächst ab, steigt dann aber nach Durchlaufen eines Minimalwertes wieder an. Das Experiment besagt dagegen, daß die Feldstärke, wenn man den Bogendurchmesser bei konstanter Stromstärke verkleinert, immer nur zunehmen kann, der völlig frei brennende Bogen also die geringste Feldstärke besitzt. Zumindest in einem Teil widerspricht also unsere Raumkurve der Erfahrung. Dieser Widerspruch rührt aber nur daher, daß wir uns im „Virtuellen" bewegen. Von einer Änderung des Bogenradius R war bislang überhaupt nicht die Rede, denn unsere Nebenbedingungen lauten I *und* $R = \text{const}$. Es ist der Radius r der Leitfähigkeitszone mit dem Gesamtradius R des Bogens verwechselt worden.

Um etwa die Abhängigkeit der gesamten Bogeneigenschaften bei Veränderung der Randbedingungen und anderer Parameter zu betrachten, schreiben wir ganz allgemein für die Stromtransportgleichung, entsprechend (28)

$$F(I, E, r, T) = 0$$

und für die Energiebilanz, entsprechend (29)

$$G(I, E, r, R, T, T_R) = 0$$

(die Randtemperatur T_R soll immer konstant bleiben).

Ist die Temperaturabhängigkeit der beiden Funktionen $\sigma(T)$ und $\varkappa(T)$ bekannt, so können aus obigem Gleichungssystem zusammen mit dem Minimumprinzip jeweils zwei Variable eliminiert werden. Um zu den Bogencharakteristiken zu kommen, hat man z.B. r und T zu eliminieren, dann folgt eine Gleichung $H(I, E, R) = 0$ oder $E = E(I, R)$. (Eventuell ist hier noch der Druck p als Parameter einzuführen, denn die Funktionen σ und $\varkappa$ sind ganz allgemein natürlich noch von p abhängig.) Bei $I = \text{const}$ erhält man hieraus auch den mit der Erfahrung übereinstimmenden ständigen Anstieg von E mit abnehmendem R im Gegensatz zu dem oben erwähnten falschen Resultat bei Verwechslung von r mit R. Interessiert man sich für die Temperaturänderung im Bogen mit abnehmendem Radius bei konstantem I, so eliminiert man E und r und bekommt eine Beziehung $T = T(R)$. Diese Funktion zeigt dann einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie die Projektion (T, r) der Raumkurve in Fig. 2, was verständlich ist, weil der Kernradius $r < R$ ist und mit Verkleinerung von R ebenfalls abnimmt. Dennoch haben beide Kurven quantitativ nichts miteinander zu tun, weil die in Fig. 2 dargestellte mit Ausnahme eines einzigen Punktes physikalisch nicht reell ist*.

* Die Tatsache, daß die Temperatur des Bogens mit der Einschnürung anwächst, wird gelegentlich als „Bogenparadoxon" mit den Worten ausgedrückt: „Kühlung eines Lichtbogens erhöht dessen Temperatur." Nun bedeutet die Küh-

Diese Ausführungen sollen die Bedeutung der Randbedingungen hervorheben. Nun wird man experimentell, also z.B. aus einer photographischen Aufnahme des Lichtbogens, praktisch doch nur den Kernradius r ermitteln können, weil die hauptsächliche Strahlung in dem inneren Teil des Bogens emittiert wird. Will man Experiment und Theorie miteinander vergleichen, so ist nach dem Vorangehenden ersichtlich, daß die Minimumbedingung ihrerseits die Angabe von r gar nicht leisten kann, wenn nicht irgendeine Aussage über den eigentlichen Bogenrand R mit der zugehörigen Randtemperatur vorliegt. Man kommt also keinesfalls darum herum, diese Randbedingungen irgendwie festzulegen. Bei Bögen, die in definierten Rohren oder Gefäßen brennen, bietet das keine Schwierigkeiten, und es ist bezeichnend, daß das Minimumprinzip gerade in denjenigen Fällen zum Erfolg geführt hat, bei denen diese Randwerte berücksichtigt werden konnten. Wir erinnern an die ausgezeichneten Ergebnisse STEENBECKs [*16*] und FOITZIKs [*3*] bei der Deutung der Messungen am Wälzbogen und an die erfolgreiche Prüfung des Minimalprinzips am „elektrischen Lichtbogen in schnell strömendem Gas" von KIRSCHSTEIN und KOPPELMANN [*7*]. Aber auch beim sog. frei brennenden Lichtbogen sollte die Angabe der Randbedingungen keine Schwierigkeiten machen, denn auf irgendeine Weise wird dieser ja doch stabilisiert.

Wir haben uns hier so eingehend mit dem Kanalmodell beschäftigt, weil wir glauben, daß für viele praktische Zwecke dieses einfach durchzurechnende Modell auch heute noch seine Bedeutung für einen Vergleich von Experiment und Theorie hat. Das Minimumprinzip muß bei richtiger Anwendung auf das Kanalmodell zu guten Näherungswerten für den Bogenzustand führen und hat seine Brauchbarkeit in den Fällen, in denen es vernünftig gehandhabt wurde, auch bewiesen.

V. Diskussion der Ergebnisse

In den vorangehenden Abschnitten haben wir gezeigt, daß das Minimalprinzip der Entropieproduktion, angewandt auf den elektrischen Lichtbogen, sowohl ganz allgemein, als auch bei der vereinfachten Vorstellung des Kanalmodells, zum STEENBECKschen Prinzip der minimalen Brennspannung führt.

Umgekehrt schließend, dürfen wir nun auch die zahlreichen praktischen Erfolge, die man bei der Anwendung dieses Prinzips auf den elektrischen Lichtbogen erzielt hat, als experimentelle Beweise für die

lung einer Bogensäule nichts anderes als das Herabsetzen der Temperatur in den Randgebieten der Säule, bewirkt also eine Verkleinerung des Bogenradius R, mit anderen Worten eine Einschnürung der Bogensäule. Macht man sich dies klar, so ist aber das „Bogenparadoxon" nicht weniger paradox als die Behauptung, daß ein dünner Draht bei derselben Stromstärke heißer wird als ein dicker.

Gültigkeit des Entropieprinzips ansehen, wie sie besser wohl kaum an Hand anderer thermischer Nichtgleichgewichtssysteme erbracht werden können. Der Lichtbogen ist eben ein thermodynamisches System, bei dem die wirksamsten irreversiblen Prozesse besonders gut der Messung zugänglich sind. Der irreversible Strom von Ladungsträgern kann direkt am Amperemeter und die zugehörige „Kraft" am Voltmeter abgelesen werden. Ferner bereitet die spektroskopische Bestimmung der „thermischen Kraft", also des Temperaturgradienten und der Temperatur selbst, heute keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr.

Wir müssen zum Schluß aber noch auf eine eigentümliche Schwierigkeit hinweisen, die in Abschnitt II bei der Berechnung der EULERschen Gleichungen aus dem Variationsproblem von WERGELAND übergangen worden ist. Dort wurden bei den Variationsableitungen der Entropieproduktion nach den thermodynamischen Potentialen die Koeffizienten α_{iK}, die doch selbst im allgemeinen Funktionen dieser Potentiale sind, nicht mitvariiert. Ohne diese Vernachlässigung stößt man aber bei der Identifizierung der EULERschen Gleichungen mit den Erhaltungssätzen auf Unstimmigkeiten, auf die unter anderen GLANSDORFF [4] aufmerksam gemacht hat. Die Ursache für diese scheinbare Diskrepanz ist nun offensichtlich nicht im Entropieprinzip selbst, sondern in dem Näherungscharakter der linearen Ansätze der thermodynamisch-phänomenologischen Theorie irreversibler Prozesse zu suchen.

In einer gaskinetischen Arbeit zeigt KOHLER [8], daß sich die statistische Fundamentalgleichung in ein Variationsprinzip umformen läßt, welches Aussagen über Extremaleigenschaften der Entropieerzeugung durch Stöße zuläßt. Wir können daraus schließen, daß das Entropieprinzip in einem viel größeren Bereich gültig ist, als die thermodynamische Kontinuumstheorie, und daß daher die völlig exakte Lösung des Variationsproblems nur entweder mit den gaskinetischen Methoden von ENSKOG-CHAPMAN oder durch Einführung höherer Glieder in die Reihenentwicklung für die generalisierten Ströme und die thermodynamischen Funktionen wie Entropie, chemisches Potential usw. zu bewältigen sein wird. Innerhalb des Anwendungsbereiches der thermodynamischen Theorie kann jedoch die Vernachlässigung der Variation der phänomenologischen Koeffizienten in den Ableitungen von WERGELAND und MAZUR zu keinen ernsthaften Bedenken Anlaß geben.

Im übrigen spielt dieses Problem bei der eigentlichen Rückführung der STEENBECKschen Minimumbedingung auf das Entropieprinzip überhaupt keine Rolle, weil wir dabei von vornherein von der gesamten Entropieerzeugung ausgegangen sind, ohne die Variationsableitungen bilden zu müssen.

Schließlich mag nicht unerwähnt bleiben, daß es in der Tat einige interessante experimentelle Beobachtungen gibt, die auf die umfassendere Bedeutung des Entropieprinzips hinweisen. Dazu müssen wir daran erinnern, daß das Prinzip der minimalen Brennspannung, welches wir hier in das Entropietheorem eingeordnet haben, ja ursprünglich bei der Erklärung des Kathodenfalles von Glimmentladungen auftauchte (COMPTON und MORSE) und oft auch auf kathodennahe Gebiete des Lichtbogens angewandt wird (ROMPE und WEIZEL [*13*]). Nun ist die thermodynamische Kontinuumstheorie sicher nicht mehr für die Beschreibung des Kathodenfallmechanismus zuständig, wohl aber die gaskinetische Methode mit der exakteren Formulierung der minimalen Entropieproduktion durch Stöße.

Ein paralleler Fall liegt auf gasdynamischem Gebiet vor, nämlich bei der Detonationswelle. Auch hier ist die phänomenologische Theorie auf die Vorgänge innerhalb der Stoßfront nicht mehr anwendbar. Man kann diese Schwierigkeit aber dadurch umgehen, daß man die Welle als stationär und das Gas vor und nach dem Durchlaufen der Stoßfront als im thermischen Gleichgewicht befindlich betrachtet. Die unter diesen Voraussetzungen ableitbare HUGONIOT-Kurve läßt bei gegebenem Ausgangszustand noch eine unendliche Mannigfaltigkeit von Druck- und Dichtewerten zu, in Analogie zu der unendlichen Anzahl von Wertetripeln (r, T, E) bei der oben erwähnten Raumkurve des Kanalmodells der Lichtbogentheorie. Genauso wie beim Lichtbogen der stationäre Zustand durch *den* Punkt der Raumkurve beschrieben wird, der einem Minimum der Feldstärke (STEENBECK-Bedingung) entspricht, gibt dort derjenige Punkt der HUGONIOT-Kurve den tatsächlichen stabilen Zustand an, bei dem ein Minimum der Detonationsgeschwindigkeit (CHAPMAN-JOUGUET-Bedingung) und gleichzeitig ein Minimum der spezifischen Entropie entlang der HUGONIOT-Kurve vorliegt (BECKER und SCORAH). Wie HAASE [*5*] bemerkt hat, sind diese Bedingungen aber gleichbedeutend mit einem Minimum der Entropieproduktion, denn Entropie $\times$ Detonationsgeschwindigkeit $=$ Entropieproduktion in der Stoßfront.

Während also die Anwendung des Prinzips der minimalen Entropieerzeugung bei Gasentladungsproblemen zwangsläufig auf die STEENBECKsche Bedingung zurückführt, gelangt man bei dem gasdynamischen Problem der Detonationswelle mit demselben Prinzip zur experimentell gesicherten CHAPMAN-JOUGUET-Bedingung.

Diese Ähnlichkeit zwischen den Problemen der Gasdynamik und Gasentladung geht wahrscheinlich über eine rein formale Analogie hinaus. Wie wir oben erwähnten, ist das STEENBECKsche Prinzip mit Erfolg auch auf Kathodenfallgebiete angewandt worden. Zwischen den Verhältnissen in den Fallgebieten mancher Gasentladungen und denjenigen innerhalb der Stoßfront einer Detonationswelle bestehen aber weitgehende Ähnlichkeiten. Hohe Teilchengeschwindigkeiten, ein starker Temperatursprung und chemische Reaktionen einschließlich

Ionisationsvorgängen über eine Strecke von wenigen freien Weglängen sind beiden Erscheinungen gemeinsam. Eine Behandlung beider Probleme unter einem einheitlichen gaskinetischen Gesichtspunkt führt möglicherweise zu interessanten Ergebnissen.

Zusammenfassung

Es wird der Zusammenhang zwischen dem in der Gasentladungsphysik bekannten STEENBECKschen Prinzip der minimalen Brennspannung und dem der Theorie irreversibler thermodynamischer Prozesse entnommenen Prinzip der minimalen Entropieproduktion untersucht. Um die übergeordnete Stellung dieses allgemeinen thermodynamischen Prinzips zu erkennen, wird zunächst eine von WERGELAND und MAZUR stammende Ableitung wiedergegeben, welche zeigt, daß die Erhaltungssätze für Masse, Ladung und Energie in erster Näherung als EULERsche Gleichungen dieses Extremalprinzips angesehen werden können. Die Erhaltungssätze enthalten natürlich auch die für die Lichtbogentheorie wesentlichen Grundgleichungen, also z.B. die ELENBAAS-HELLERsche Energiebilanz. Ausgehend von der Entropiebilanz eines allgemeinen thermodynamischen Nichtgleichgewichtssystems im stationären Zustand gelangt man unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze zu einem Ausdruck für die gesamte Entropieproduktion, der bereits als Satz von GOUY und STODOLA bekannt ist. Für den elektrischen Lichtbogen erhält man ferner bei Vernachlässigung aller nichtelektrischen Kräfte auf den Stromtransport für die Entropieerzeugung

$$\Theta = \frac{1}{T_R} \int (j, \mathfrak{E})\, d\tau = \frac{I U}{T_R},$$

wobei I die Stromstärke, U die Brennspannung und T_R die Randtemperatur des Bogens bedeutet. Da Θ im stationären Zustand ein Minimum sein soll, so muß bei I, $T_R = \text{const}$ auch die Brennspannung U einen Minimalwert annehmen. Das STEENBECKsche Prinzip ist somit als Spezialfall eines echten thermodynamischen Extremalprinzips anzusehen.

Bei der Behandlung des Kanalmodells wird darauf hingewiesen, daß bei Modellvorstellungen von thermodynamischen Systemen nicht nur das Energieprinzip (erster Hauptsatz), sondern auch das Entropieprinzip (zweiter Hauptsatz) erfüllt sein muß und daß die Anwendung des letzteren auf den Lichtbogen zwangsläufig wieder auf die STEENBECKschen Forderungen

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dE}{dT} = 0$$

(Minimum der Feldstärke)

führt. Da das STEENBECKsche Prinzip sowohl allgemein als auch im Rahmen der Kanalmodellvorstellung auf das thermodynamische Entropieprinzip zurückgeführt werden kann, dürfen rückschauend auch die zahlreichen positiven Resultate, die man bei der Anwendung auf den Lichtbogen erzielt hat (STEENBECK, FOITZIK, KIRSCHSTEIN und KOPPELMANN), als experimentelle Beweise für das Minimalprinzip der Entropieproduktion angesehen werden.

In der Diskussion der Ergebnisse wird weiterhin noch auf den Näherungscharakter der phänomenologischen Theorie irreversibler Prozesse eingegangen, der sich bei der Ableitung der EULERschen Gleichungen bemerkbar macht. Erfolgreiche Anwendungen des Minimumprinzips auf Kathodenfallgebiete (ROMPE und WEIZEL) und auf die Detonationswelle (HAASE) deuten darauf hin, daß das Entropieprinzip noch in einem Bereich Gültigkeit hat, in dem die phänomenologische Theorie versagen muß. Schließlich wird auf die Ähnlichkeit der Verhältnisse in den Fallgebieten bei Gasentladungen und in der Front der Detonationswelle hingewiesen.

Literatur

[1] GROOT, S. R. DE: Thermodynamics of irreversible processes. Amsterdam 1951. — [2] ELENBAAS, W., F. KESSELRING u. F. KOPPELMANN: ETZ **57**, 1497 (1936). — [3] FOITZIK, R.: Wiss. Veröff. Siemens-Werk **19**, (I), 28 (1940). — [4] GLANSDORFF, P.: Physica, Haag **19**, 737, 1029 (1953). — [5] HAASE, R.: Z. Naturforsch. **6a**, 522 (1951). — [6] HAASE, R.: Thermodynamisch-phänomenologische Theorie der irreversiblen Prozesse. Ergebn. exakt. Naturw. **26**, 56—164 (1952). — [7] KIRSCHSTEIN, B., u. F. KOPPELMANN: Wiss. Veröff. Siemens-Werk **16** (III), 56 (1937). — [8] KOHLER, M.: Z. Physik **124**, 772 (1948). — [9] MAECKER, H., u. TH. PETERS: Z. Physik **144**, 586 (1956). — [10] MAZUR, P.: Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci., V. Ser. **38**, 182 (1952). — [11] MEIXNER, J.: Ann. Phys. (5) **39**, 333 (1941); (5) **43**, 244 (1943). — Z. phys. Chem. **53**, 235 (1943). — [12] PRIGOGINE, I.: Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles. Paris u. Lüttich 1947. — [13] ROMPE, R., u. W. WEIZEL: Z. Physik **119**, 366 (1942). — [14] ROMPE, R., u. W. WEIZEL: Z. Physik **120**, 31 (1943). — Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1949. — [15] STEENBECK, M.: Phys. Z. **33**, 809 (1932). — [16] STEENBECK, M.: Wiss. Veröff. Siemens-Werk **19** (I), 59 (1940). — [17] STODOLA, A.: Dampf- und Gasturbinen. Berlin: Springer 1924. — [18] WERGELAND, H.: K. Norske Vidensk. Selsk. Forhandl. **23**, 110 (1950).