

Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung.

III. Die verschiedenen Formulierungen der Tragerkinetik.

Von

G ECKER

(Eingegangen am 9 Februar 1955)

In den vorausgegangenen Arbeiten (I, II) ist die Frage der Beschreibung kollektiver Gesamtheiten unter dem grundlegenden Gesichtspunkt „individuelles oder kollektives Verhalten“ diskutiert worden. Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit der mathematischen Formulierung der innerhalb der kollektiven Bereiche geltenden kinetischen Gesetzmäßigkeiten. Die verschiedenen in der Literatur verwendeten Näherungen werden diskutiert. Für die einzelnen Verfahren ergeben sich Beschränkungen des Anwendungsbereiches, die sich auf die Ergebnisse entscheidend auswirken. Dies gilt insbesondere für die „isotherme hydrodynamische“ Beschreibung, die nichtlinearen Untersuchungen an Hand der LORENTZ-Gleichung und die von LANDAU kritisierte Überbestimmung der Variablen der Substitutionsanalyse. Die in I geschilderten Diskrepanzen lassen sich — soweit sie nicht schon in I, II gedeutet werden konnten — auf Grund der vorliegenden Überlegungen verstehen.

In der Einleitung zu einer früheren Untersuchung [1]¹ haben wir auf gewisse Diskrepanzen sowie begriffliche Unklarheiten der üblichen Beschreibung von Gesamtheiten mit integraler Wechselwirkung hingewiesen. Ein Teil dieser Schwierigkeiten konnte in den Arbeiten [1] bzw. [2]¹ durch die Formulierung und Abgrenzung des Anwendungsbereiches kollektiver Beschreibung beseitigt werden. Nach diesen Überlegungen läßt sich der Phasenraum hinsichtlich der Beschreibung in zwei Bereiche von wesentlich verschiedener Qualifikation unterteilen. Wir haben diese beiden Gebiete als „individuelle“ bzw. „kollektive“ Zonen unterschieden. Die kollektiven Bereiche zeichnen sich dadurch aus, daß in ihnen das Verhalten des Tragerensembles mit Hilfe einer mittleren Dichtefunktion unter Zugrundelegung des Dispersionsmodelles (D-Modell) ausreichend beschrieben werden kann. Innerhalb der individuellen Zonen dagegen ist der Teilchencharakter des einzelnen Individuums nicht zu vernachlässigen. Die kollektive Beschreibung unter Verwendung der VLASOVschen Näherung bzw. der bekannten gaskinetischen Grundgleichungen bricht in den individuellen Zonen völlig zusammen. Die genannte Aufgliederung des Phasenraumes ist keinesfalls eine fest vorgegebene, sondern hängt sowohl von den Eigenschaften des einzelnen Tragers, wie auch von den

¹ [1] bzw. [2] im folgenden mit I und II bezeichnet

speziellen Eigenschaften und dem augenblicklichen Zustand der untersuchten Gesamtheit ab. Demzufolge ändert sich die Einteilung des Phasenraumes mit der Zeit. Insbesondere ist die Aufgliederung aber auch von der zu beschreibenden Verhaltensweise abhängig. Aus diesem Grunde liefert die Tragerdynamik gemäß den beiden dynamischen Grundaufgaben — der Formulierung der inneren Wechselwirkung und der Beschreibung der Tragerkinetik — zwei voneinander verschiedene Zoneneinteilungen des Phasenraumes, die durch die Bedingungsgleichungen (1a—1b) und (2a—2m) in II¹ festgelegt wurden.

Wir hatten auch bereits a. a. O. auseinandergesetzt, daß wir eine vorgegebene Gesamtheit mit langreichweitigen Zwischenkräften in einem bestimmten Vorgang dann uneingeschränkt kollektiv beschreiben können, wenn die Träger der individuellen Bereiche nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf den Gesamtablauf des Vorganges in den kollektiven Bereichen ausüben. Und zwar muß dies auch dann noch gelten, wenn wir — ungerechtfertigterweise — die kollektive Beschreibung auch auf die individuellen Zonen ausdehnen. In allen anderen Fällen sind die individuellen Bereiche von der kollektiven Beschreibung auszuschließen. Die entsprechenden Träger müssen unter Berücksichtigung ihres Teilchencharakters erfaßt und in ihrer Wechselwirkung mit den kollektiven Zonen des Systems beschrieben werden.

Damit ist zwar entschieden, welche Methodik auf welche Bereiche anzuwenden ist. Die Form der gesetzmäßigen Erfassung des individuellen oder kollektiven Verhaltens kann dagegen noch nach Gesichtspunkten der Zweckmäßigkeit passend gewählt werden. Gewiß, — hinsichtlich der Formulierung der inneren Wechselwirkung ist die angemessene Beschreibung der Elektron-Ion-Gesamtheiten in den Beziehungen der Potentialtheorie und der Elektrodynamik ziemlich eindeutig vorgegeben und auch allgemein in der Literatur verwendet. Bezüglich der Tragerkinetik dagegen kann und hat man aus verschiedenen Erwägungen heraus verschiedene Formulierungen gewählt und nach diesem Gesichtspunkt lassen sich die Untersuchungen in drei Gruppen teilen, die wir der Kürze halber durch die Buchstaben (B, L, M) kennzeichnen wollen.

Die Arbeiten [3] bis [7] der Gruppe (B) verwenden die folgende vereinfachte Form der BOLTZMANNschen Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{F} \frac{\partial f}{\partial c} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (1B)$$

¹ Anmerkung zu I, II. In I, II wurde ein Schreibfehler übersehen, insofern als es in der Beziehung (2k II) und allen entsprechenden Gleichungen aus I, II selbstverständlich nicht $t_c/\Delta t$, sondern $\Delta t/t_c$ heißen muß. Außerdem ist die Größe I auf S. 283 I und 296, II korrekt definiert, als $\langle \Delta v/\bar{c} \rangle$ für Gl. (11a, I) bzw. die kleinste der Größen $\langle \Delta v/\bar{v} \rangle$, t_c für Gl. (11b I). In der Gl. (20b), I wurde die Mitteilung der rechten Seite über das Zeitintervall $\Delta_m t$ nicht gekennzeichnet.

wo f die BOLTZMANNsche Verteilungsfunktion bezeichnet und \mathfrak{F} durch

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{F}}{m} = \frac{e}{m} \left(\mathfrak{E} + \frac{[c, \mathfrak{H}]}{c^0} \right) \quad (2)$$

gegeben ist, wenn \mathfrak{E} , \mathfrak{H} elektrische bzw magnetische Feldstärke und c^0 die Lichtgeschwindigkeit kennzeichnet

Die Untersuchungen $[\beta]$ bis $[13]$ (L) dagegen benutzen den Tragerhaltungssatz und die LORENTZ-Gleichung

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \text{div} (\varrho_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (1_L a)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \right\} \mathbf{v}_s = \mathfrak{F}, \quad (1_L b)$$

während schließlich im Fall (M) der Arbeiten $[14]$ bis $[19]$ die folgende Form der bekannten MAXWELLSchen „hydrodynamischen Gleichungen“

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (1_M a)$$

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{v})}{\partial t} + \text{div} \mathcal{P}_0 = \mathfrak{F} \quad (1_M b)$$

zugrunde gelegt wird. Es bezeichnen in $(1_{L,M})$ ϱ , ϱ_s die mittlere Dichte bzw \mathbf{v} , \mathbf{v}_s die mittlere Geschwindigkeit, definiert durch

$$\varrho, \varrho_s = \int^{(c)} (f, f_s) dV_c \quad (3 a)$$

und

$$\mathbf{v}, \mathbf{v}_s = \frac{\int^{(c)} \mathbf{c} (f, f_s) dV_c}{\int^{(c)} (f, f_s) dV_c}, \quad (3 b)$$

wo sich die Integration (c) über den gesamten Geschwindigkeitsraum erstreckt und f_s , im Fall von mehreren Stromkomponenten, die Verteilungsfunktion der s -ten Komponente bezeichnet. dV_c gibt das Volumenelement des Geschwindigkeitsraumes an. \mathcal{P}_0 kennzeichnet die isotherme Näherung des Drucktensors

$$\mathcal{P}_{i,l} = \int^{(c)} f c_i c_l dV_c \quad (4)$$

Die Formulierungen (1) enthalten notgedrungen gewisse Vernachlässigungen, die man sich vergegenwärtigen muß, um die Tragweite der verschiedenen Methoden beurteilen zu können. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die in I beschriebenen Diskrepanzen von Interesse.

Zu diesem Zweck gehen wir von der BOLTZMANNschen Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \kappa f}{\partial t} \quad (5_B)$$

aus, in der das Glied $\partial_{\mathbf{K}} f / \partial t$ zunächst allen Änderungen der Verteilungsfunktion durch innere Wechselwirkung Rechnung tragen soll. Allerdings wird man bei den hier diskutierten Systemen mit langreichweitigen Zwischenkräften den kollektiven Anteil der inneren Wechselwirkung mit Vorteil abspalten und entsprechend dem Gebrauch in den Gln (1) unter Verwendung der VLASOVschen Näherung in \mathfrak{F} erfassen. Dann enthält $\partial_{\mathbf{K}} f / \partial t$ nur noch die Dichteänderungen infolge individueller Wechselwirkungsanteile mit artfremden und artgleichen Partikeln.

Aus der Beziehung (5_B) lassen sich unmittelbar durch einfache Umformungen auch die allgemeinen Gesetzmaßigkeiten finden, welche den Gln (1_{L,M}) zuzuordnen sind. Dazu integrieren wir die Gl (5_B) einmal direkt und ein zweites Mal nach vorheriger Multiplikation mit der Tragergeschwindigkeit c über den gesamten Impulsraum. Unter Verwendung der Bezeichnungen (3) (4), sowie der Abkürzungen

$$\Delta_{\mathbf{K}} \varrho = \int \frac{\partial_{\mathbf{K}} f}{\partial t} dV_c \quad (6a)$$

$$\Delta_{\mathbf{K}} (\varrho v) = \int c \frac{\partial_{\mathbf{K}} f}{\partial t} dV_c \quad (6b)$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho v) = \Delta_{\mathbf{K}} \varrho \quad (5_{M a})$$

$$\frac{\partial (\varrho v)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{P} - \varrho \mathfrak{F} = \Delta_{\mathbf{K}} (\varrho v) \quad (5_{M b})$$

Handelt es sich um ein System von mehreren Stromkomponenten, die wir getrennt durch Verteilungsfunktionen f_s beschreiben, so gilt für jede der Stromkomponenten ein zu (5_M) entsprechendes Paar von Bewegungsgleichungen, wo lediglich an die Stelle von ϱ , v , \mathcal{P} die Größen ϱ_s , v_s , \mathcal{P}_s treten.

Die Beziehungen (5_M) liefern nun auch leicht die allgemeinen Formeln, welche den Gesetzmaßigkeiten (1_L) zugeordnet sind. Die Gl (5_{M a}) können wir in unveränderter Form übernehmen. Die Beziehung (5_{M b}) dagegen formen wir ein wenig um, indem wir (5_{M a}) mit der mittleren Geschwindigkeit multiplizieren und von (5_{M b}) subtrahieren. Damit erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_s v_s) = \Delta_{\mathbf{K}} \varrho_s \quad (5_{L a})$$

$$\varrho_s \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v_s \nabla) \right\} v_s + \operatorname{div} \bar{\mathcal{P}}_s - \varrho_s \mathfrak{F} = \varrho_s \Delta_{\mathbf{K}} v_s, \quad (5_{L b})$$

wo jetzt die Abkürzungen

$$\bar{\mathcal{P}}_{s,i} = \int f (c_i - v_i) (c_i - v_i) dV_c \quad (7a)$$

und

$$\varrho_s \Delta_{\mathbf{K}} v_s = \int^{(c)} \frac{\partial_{\mathbf{K}} f_s}{\partial t} c dV_c - v_s \int^{(c)} \frac{\partial_{\mathbf{K}} f_s}{\partial t} dV_c = \varrho_s \frac{\partial_{\mathbf{K}}}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\varrho_s} \int^{(c)} f_s c dV_c \right\} \quad (7b)$$

verwendet sind

Um die Beschränkungen der Beziehungen (1) zu beurteilen, vergleichen wir diese Formeln mit den Gln (5)

Die Vernachlässigung der individuellen Wechselwirkung mit art-eigenen und artfremden Trägern, wie sie das Fehlen der Glieder $\partial_{\mathbf{K}} f / \partial t$ bzw $\Delta_{\mathbf{K}}(\varrho_s)$, $\varrho_s \Delta_{\mathbf{K}}(v_s)$ und $\Delta_{\mathbf{K}}(\varrho_s v_s)$ in (1) zum Ausdruck bringt, ist ersichtlich allen Verfahren (M, L, B) gemeinsam. Was den arteigenen Anteil anbetrifft, ist diese Vernachlässigung berechtigt, wenn das in II hergeleitete Kriterium [II, Gl (8b)] befriedigt ist. Die Vernachlässigung der artfremden individuellen Wechselwirkung, — der entsprechende kollektive Anteil kann wiederum befriedigend in § berücksichtigt werden — erscheint jedoch im allgemeinen weniger einleuchtend, und bedurfte von Fall zu Fall der Rechtfertigung. Insbesondere im Innern eines Plasmas großer Neutralteilchendichte muß man erwarten, daß diese artfremden Einflüsse merkbar werden, und einige Berechnungen haben dementsprechend versucht, der individuellen Einwirkung artfremder Teilchen durch einen einfachen Relaxationsterm der Form

$$\varrho_s \Delta_{\mathbf{K}} v_s = -a_1 \varrho_s v_s \quad (8a)$$

in (1_L) bzw durch ein Glied der Form

$$\frac{\partial_{\mathbf{K}} f}{\partial t} = -a_2 f_1 \quad (8b)$$

in (1_B) Rechnung zu tragen. v_1 und f_1 bezeichnen dabei die Abweichungen $v_1 = v - v_0$, $f_1 = f - f_0$ vom Ausgangszustand v_0, f_0 .

Obschon diese Ansätze einen erfreulichen ersten Schritt zur Erfassung der artfremden Einflüsse darstellen, so darf man ihre Tragweite doch nicht überschätzen. Die kinetische Theorie der Gase zeigt zwar, daß man ähnliche Relaxationsglieder näher begründen kann, jedoch gelingt dies nur unter sehr beschränkenden Bedingungen. So muß die Stoßfrequenz ausreichend groß sein, um die statistische Erfassung der Stoßprozesse zu erlauben, die Abweichungen müssen die Beschränkungen auf lineare Glieder ermöglichen und die Wechselwirkung muß entweder derjenigen der MAXWELL-Moleküle entsprechen oder aber — bei beliebiger Potenz n des Wechselwirkungsgesetzes ($1/r^n$) — die Masse der untersuchten Träger muß sehr klein gegenüber derjenigen der artfremden Teilchen sein. Beruhigt man sich mit der Annahme, daß diese Forderungen für die Elektronen in einem Plasma angenähert erfüllt seien, so kann man das Ergebnis der Gaskinetik verwenden, welche für $\partial_{\mathbf{K}} f / \partial t$ bei elastischen

Stoßen die Beziehung

$$\left(\frac{\partial_{\kappa} f}{\partial t}\right)_e = \varrho \left(\frac{\partial_{\kappa} f'}{\partial t}\right)_e = -a_e \varrho f'_1 \quad (9a)$$

liefert, wo f' durch die Umformung

$$f = \int^{(c)} f dV_c \quad \frac{f}{\int^{(c)} f dV_c} = \varrho f' \quad (10)$$

definiert ist und, wie oben, $f' = f'_0 + f'_1$ und $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ gilt. Gl (9a) in Gl (7b) eingesetzt, bestätigt dann den Ansatz (8a). Allerdings gilt dies nur unter den genannten Voraussetzungen und man hat außerdem zu bedenken, daß neben den elastischen Stoßen auch unelastische Vorgänge eine wesentliche Rolle spielen. Gemeint sind damit Anregungs-, Rekombinations- und Ionisationsprozesse. Auch diese Vorgänge liefern selbstverständlich analog zu $(\partial_{\kappa} f' / \partial t)_e$ einen Beitrag $(\partial_{\kappa} f' / \partial t)_u$. Es erscheint jedoch außerordentlich zweifelhaft, ob sich auch in diesem Fall ein Ansatz der Form

$$\left(\frac{\partial_{\kappa} f'}{\partial t}\right)_u = -a_u f'_1 \quad (9b)$$

rechtfertigen läßt. Darüberhinaus verlangen die genannten Einflüsse im Gegensatz zu den elastischen Stoßen auch die Berücksichtigung des Gliedes $\Delta_{\kappa} \varrho_s$ in (5a) und es ist schwer, über diesen Term allgemeingültige Aussagen zu machen. Allerdings, im Fall des unbegrenzten homogenen Plasmas, auf das sich die meisten Untersuchungen beziehen, läßt sich in linearer Näherung auch für dieses Glied eine Art Relaxationsterm begründen. Nach den bekannten Gesetzen der Ionisation und Rekombination ist die Zahl der sekundlich durch Ionisation erzeugten Elektronen durch

$$\left(\frac{\partial_{\kappa} \varrho}{\partial t}\right)_J = b \varrho, \quad (11a)$$

die Zahl der rekombinierenden Elektronen durch

$$\left(\frac{\partial_{\kappa} \varrho}{\partial t}\right)_R = -b_R \varrho^2 \quad (11b)$$

gegeben. Da sich bei der genannten Anordnung im Gleichgewicht (ϱ_0) die Ionisations- und Rekombinationsvorgänge die Waage halten müssen, gilt

$$b = b_R \varrho_0 \quad (11c)$$

und damit folgt unter Verwendung von (11a, b)

$$\Delta_{\kappa} \varrho_s = b(\varrho_0 + \varrho_1) - b_R(\varrho_0 + \varrho_1)^2 = -b \varrho_1 \quad (11d)$$

Dieser Ausdruck wäre zur Berücksichtigung der teilchenerzeugenden und -vernichtenden Stöße in (5_La) einzuführen.

Wir sehen also, daß die Beziehung (8a) zwar ein nahegelegener Ansatz ist, — jedoch erheblichen Beschränkungen unterliegt

Die Formulierung (8b) berücksichtigt zwar über (8a) hinausgehend die teilchenerzeugenden und -vernichtenden Einflüsse, legt dabei allerdings gleichzeitig eine sehr bedenkliche Annahme zugrunde

Man erkennt dies, wenn man die Formel (10) differenziert

$$\frac{\partial_K f}{\partial t} = \varrho \frac{\partial_K f'}{\partial t} + f' \frac{\partial_K \varrho}{\partial t} \quad (12)$$

und (9), (11) verwendet Mit $a = a_e + a_u$ ergibt sich

$$\frac{\partial_K f}{\partial t} = -a(\varrho f'_1 + f' \varrho_1) + (a-b) \varrho_1 f' = -a f_1 + (a-b) \varrho_1 f' \quad (13)$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, daß der Ansatz (8b) nicht nur die zweifelhafte Beziehung (9b) benutzt, sondern auch noch die Voraussetzung $a=b$ verwendet Mit anderen Worten, — im Gegensatz zu (8a) sind zwar jetzt rekombinierende und ionisierende Vorgänge mitberücksichtigt, dabei ist aber gleichzeitig die völlig willkürliche Annahme gemacht, daß die entsprechenden Relaxationskonstanten a, b identisch sind Diese willkürliche Verfügung über die Relaxationskonstanten bringt sicher keinerlei Fortschritt gegenüber der volligen Vernachlässigung der Ionisations- und Rekombinationsprozesse in (8a) Im Gegenteil, es erscheint zweckmäßig, auch im Fall (8b) den Ansatz $(\partial_K f/\partial t) = -a \varrho f'_1$ entsprechend zu (8a) zu benutzen Dieser Ansatz ist nämlich wenigstens dann gültig, wenn Anregung, Ionisation und Rekombination zu vernachlässigen sind Demgegenüber erweist sich (8b) auch in diesem Fall als unbrauchbar

Außer den beschriebenen gemeinsamen Vernachlässigungen der Methoden (B, L, M) enthalten die Verfahren (L, M) weitere Vereinfachungen

Wir bemerken, daß in der Gl (1_Lb) gegenüber (5_Lb) der Term des Drucktensors vernachlässigt ist und wir wollen untersuchen, inwieweit sich dies rechtfertigen läßt Das Glied $\text{div } \bar{p}$ wird durch die Gl (7a) bestimmt, wo \bar{p} als Funktion der Dichte f und der Relativgeschwindigkeit $u = c - v$ angegeben ist Zum Vergleich ziehen wir den Term $\text{div } \{ \varrho v \} (v)$ heran, der nach einfacher Umformung ebenfalls in (5_Lb) auftritt und erhalten als notwendige Bedingung für die Vernachlässigung des Drucktermes

$$\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{u} \rangle \ll \langle v \rangle (v) \quad (14a)$$

Diese Forderung (14a) schließt insbesondere die Bedingung

$$\langle \bar{u}^2 \rangle \leq \langle \bar{u}^2 \rangle \ll \langle v^2 \rangle \quad (14b)$$

ein Der Druckterm kann also nur dann vernachlässigt werden, wenn die mittlere Geschwindigkeitsstreuung $\langle \bar{u} \rangle$ klein ist gegenüber der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der betrachteten Stromkomponente Diese

Aussage erlaubt uns, einen wichtigen Schluß zu ziehen, wenn wir bedenken, welche Einflüsse die Geschwindigkeitsstreuung $\langle \bar{u} \rangle$ bestimmen

Bereits im Ausgangszustand ist jedem Aufpunkt des Raumes neben der mittleren Geschwindigkeit v_s eine gewisse Streuung $\langle \bar{u}_{0s} \rangle$ zugeordnet, deren Größe durch die Verteilungsfunktion f_{0s} im Ausgangszustand festgelegt ist. Im Ablauf des untersuchten Vorganges ändert sich diese Ausgangsstreuung in allgemein unübersichtlicher Weise. Zu einem späteren Zeitpunkt setzen sich die Träger in einem herausgegriffenen Volumenelement aus Teilchen zusammen, die im Vorgang den verschiedensten Geschwindigkeiten $v_{1s} = v_s - v_{0s}$ zugeordnet waren. Auf diese Weise übt die Ortsabhängigkeit von v_{1s} einen Einfluß auf die mittlere Geschwindigkeitsstreuung aus. Allerdings kann man die aus diesem Durchmischungsvorgang resultierende Streuung für den einzelnen Aufpunkt nicht ohne weiteres angeben, da die Geschwindigkeit v_1 während des Überganges von einem Volumenelement zum anderen durch die innere Wechselwirkung verändert wird. Mitteln wir jedoch über alle Aufpunkte der untersuchten Gesamtheit, so heben sich diese Feldeinflüsse weitgehend heraus, indem sowohl Träger beschleunigt, wie auch verzögert werden. Wir müssen daher erwarten, daß die mittlere Geschwindigkeitsstreuung $\langle \bar{u}_s \rangle$ im allgemeinen mindestens von der Größenordnung $\langle v_{1s} \rangle$ ist, wenn $\langle v_{1s} \rangle$ die mittlere Geschwindigkeitsabweichung vom Ausgangszustand v_{0s} charakterisiert¹. Damit folgt

$$\langle \bar{u}_s \rangle = \langle \bar{u}_{0s}, v_{1s} \rangle \quad (14c)$$

und (14b) geht in

$$\langle \bar{u}_{0s}^2, v_{1s}^2 \rangle \ll \langle v_s^2 \rangle \quad (14d)$$

über

Die Berechnungen (L) an Hand der Formeln (1_L) sind demnach an die Voraussetzung geknüpft, daß die Ausgangsstreuung $\langle \bar{u}_{0s} \rangle$ des Teilchenstromes klein gegenüber der mittleren Trägergeschwindigkeit $\langle v_{0s} \rangle$ ist. Außerdem müssen aber auch die Geschwindigkeitsabweichungen $\langle v_{1s} \rangle$ vom Ausgangszustand $\langle v_{0s} \rangle$ klein gegenüber $\langle v_{0s} \rangle$ selbst sein. Mit anderen Worten, — die Vernachlässigung des Drucktermes in (1_Lb) beschränkt bereits den Anwendungsbereich dieser Formeln automatisch auf die lineare Theorie. Dieser Gesichtspunkt ist wesentlich für die Ergebnisse nichtlinearer Untersuchungen, die — wie beispielsweise in [20] — auf der Basis der Gln (1_L) durchgeführt wurden.

¹ Hier ist natürlich zu beachten, daß sich jetzt die Mittelung nicht nur auf den Geschwindigkeitsraum, sondern auf die Aufpunkte des gesamten Phasenraumes erstreckt. Trotzdem mag es sein, daß man zu einem bestimmten System einen speziellen Vorgang konstruieren kann, bei dem die innere Wechselwirkung gerade geeignet ist, den Einfluß der Ortsabhängigkeit von v_{1s} auf die Geschwindigkeitsstreuung \bar{u} zu verhindern. Ein derartiges Verhalten bedurfte jedoch im Einzelfall der näheren Begründung, — es gilt nicht allgemein.

Vergleichen wir schließlich noch zur Beurteilung des Verfahrens (M) die Beziehungen (1_M) und (5_M), so sehen wir, daß auch hier das Druckglied unsere Aufmerksamkeit verdient, indem der Drucktensor \mathcal{P} in (1_Mb) durch seinen isothermen Näherungswert \mathcal{P}_0 ersetzt ist. Auf diesen Mangel wurde bereits an anderer Stelle kurz hingewiesen [6]. Wir wollen hier versuchen quantitativ zu zeigen, daß die Annahme der Isothermie den Anwendungsbereich der Methode (M) einschneidend beschränkt und daß insbesondere diese und nur diese Annahme, die in [12] und I aufgezeigten Diskrepanzen zwischen den Dispersionsgesetzen der Methoden (B, L) und (M) bedingt.

Dazu verfolgen wir entsprechend dem Gebrauch in der Substitutionsanalyse eine Normalmode der Form $\exp i(\omega t + \mathbf{r})$ und betrachten die $k\bar{k}$ -Komponente des Drucktensors \mathcal{P} . $\mathcal{P}_{k\bar{k}}$ unterscheidet sich nach (4) von dem entsprechenden isothermen Näherungswert $\mathcal{P}_{0k\bar{k}}$ durch das Glied

$$(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)_{k\bar{k}} = \varrho \Delta \bar{c}_k^2 = \int f_1 \bar{c}_k^2 dV_c - \bar{c}_{0k}^2 \int f_1 dV_c, \quad (15a)$$

wo \bar{c}_{0k}^2 durch

$$\bar{c}_{0k}^2 = \frac{\int f_1 \bar{c}_k^2 dV_c}{\int f_1 dV_c} \quad (15b)$$

definiert ist. Die Vernachlässigung von $\varrho \Delta \bar{c}_k^2$ hatte wenigstens im Rahmen der linearen Näherung Berechtigung, wenn $\Delta \bar{c}_k^2$ von der Größenordnung des Quadrates der mittleren Geschwindigkeit

$$v_1^2 = \left\{ \frac{1}{\varrho} \int f_1 c_k dV_c \right\}^2 \quad (16)$$

oder kleiner wäre. Diese an sich naheliegende Annahme ist jedoch nicht erfüllt, wie sich an Hand der aus den VLASOVschen Untersuchungen [3], [4] bekannten Verteilungsfunktion

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = \sigma(k) \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0 / \partial c_k}{1 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{\omega}\right)^2} \exp i(\omega t + \mathbf{r}) \quad (17)$$

direkt zeigen läßt. Führen wir nämlich diese Funktion (17) in (15) und (16) ein, so erhalten wir für $\Delta \bar{c}_k^2$ und v_1 nach einfacher Umformung die Beziehungen

$$\Delta \bar{c}_k^2 = - \frac{g(k, \mathbf{r}, t)}{\varrho} \frac{k}{\omega} \int \frac{\partial f_0 / \partial c_k (c_k^2 - \bar{c}_{0k}^2) c_k dV_c}{\left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{\omega}\right)^2 \right\}} \quad (18a)$$

und

$$v_1 = \frac{g(k, \mathbf{r}, t)}{\varrho} \int \frac{\partial f_0 / \partial c_k c_k dV_c}{\left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{\omega}\right)^2 \right\}} \quad (18b)$$

mit der Abkürzung

$$g(k, \mathbf{r}, t) = \sigma(k) \frac{\hbar}{\omega} \exp i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18c)$$

und damit nach partieller Integration aus (18) den Zusammenhang

$$\varrho \Delta \overline{c_k^2} = -2 \varrho v_1 \frac{\hbar}{\omega} \overline{c_{0k}^2} \left\{ 1 + \left\langle \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}}{\omega} \right\rangle \right\}, \quad (19)$$

wo $\langle k \overline{c_k}/\omega \rangle$ Glieder erster und höherer Ordnung in $k \overline{c_k}/\omega$ kennzeichnet. Letztere werden nicht berücksichtigt, da nur Vorgänge kollektiv erfaßbar sind, welche der Bedingung $k \overline{c_k}/\omega \ll 1$ genügen. Diese Beschränkung folgt aus den Bedingungsgleichungen (2) in II.

In der Tat bestätigt die Gl (19) die Vermutung, daß der Term $\varrho \Delta \overline{c_k^2}$ nicht quadratisch, sondern linear in der mittleren Geschwindigkeit und daher nicht zu vernachlässigen ist. Man kann noch einen Schritt weitergehen und das Korrekturglied (19) in die hydrodynamischen Grundgleichungen einführen. Bedenkt man dabei, daß für die Normalmode die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\hbar}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \quad (20)$$

gilt, so ergibt sich aus (19) und (20) unter Verwendung von (1_Ma) die Gleichung

$$\operatorname{div}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) = \operatorname{div}(\varrho \Delta \overline{c_k^2}) = 2 \overline{c_{0k}^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} = 2 \operatorname{div} \mathcal{P}_0 \quad (21)$$

und damit

$$\operatorname{div} \mathcal{P} = 3 \operatorname{div} \mathcal{P}_0 \quad (22)$$

Die Gl (22) zeigt damit explizit, daß die Untersuchungen an Hand der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen den Druckterm durch die Annahme der Isothermie großordnungsmaßig falsch ansetzen. Unter den verwendeten Bedingungen liefert der isotherme Näherungswert gerade ein Drittel des richtigen Druckgliedes und diese Tatsache erklärt quantitativ den von BOHM und GROSS [12] kritisierten Fehlfaktor 3 der Diskrepanz zwischen den Dispersionsgesetzen. Der Nachweis dieser quantitativen Übereinstimmung schien uns wesentlich, da er zeigt, daß die Abweichungen der Ergebnisse (M) nur durch die Annahme der Isothermie bedingt sind und keine weiteren grundsätzlichen Einwände [7], [12] gegen die Verwendung der MAXWELLSchen Methode vorliegen.

Damit sind die Vernachlässigungen der Gleichungen (1) aus dem Vergleich mit den kinetischen Grundgleichungen (5) erfaßt und ihre Bedeutung für die in I beschriebenen Diskrepanzen diskutiert.

Noch ein wesentlicher Umstand im Zusammenhang mit den kinetischen Grundgleichungen bedarf der Klärung. In seinen kritischen Bemerkungen zur Substitutionsanalyse hat LANDAU [5] den Einwand

erhoben, daß die Zahl der nach der Substitutionsmethode verfügbaren „Parameter zur Befriedigung der Anfangsbedingungen unzureichend sei, indem einer dreifachen Mannigfaltigkeit von ξ -Werten (k_x, k_y, k_z) eine sechsfache Mannigfaltigkeit von Anfangsbedingungen v_0, r_0 ($v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$) gegenüberstehe“

Diese Frage läßt sich mit Hilfe der Gln (1) und (5) leicht beurteilen. Wir betrachten dazu ein System von s -Stromkomponenten und können uns der Kurze halber auf die Methodik (L, M) beschränken, da die Verfahren (B, L, M) — wie wir gesehen haben — völlig aquivalent sind und die Frage der Über- oder Unterbestimmtheit für den Fall (B) außerdem bereits bei der Diskussion der LAPLACE-Transformation in II implizit erledigt ist¹

Wir fragen zunächst nach der Zahl der Variablen, die wir zur Beschreibung des Systems verwenden. In der Substitutionsanalyse, wo wir die Großen Q_s, v_s durch Summen (allgemeiner durch Integraldarstellungen) der Form

$$Q_s, v_s = \sum_{\nu \mu} ({}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}) e^{i(\omega_\nu t + k_\mu \tau)} \quad (23)$$

ersetzen, sind die Koeffizienten ${}_s Q_{\nu \mu}$ und ${}_s v_{\nu \mu}$ als Bestimmungsstücke zu betrachten und wir benutzen dementsprechend $Z = 2 \cdot s \cdot \nu \cdot \mu$ Variablen.

Wieviel Gleichungen stehen andererseits zur Festlegung dieser Bestimmungsstücke zur Verfügung? Wir denken zunächst an die Anfangsbedingungen

$$Q_s(r, 0), v_s(r, 0) = \sum_{\nu \mu} ({}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}) e^{i k_\mu \tau}, \quad (24)$$

welche ersichtlich $2 \cdot s \cdot \mu$ Gleichungen umfassen. Zu diesen treten die Beziehungen hinzu, die sich aus den Bewegungsgleichungen (4_{LM}) bzw (5_{LM}) ergeben. Sie lassen sich in der Form

$$\sum_{\nu \mu} {}_s M_{\nu \mu} \{ {}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}, \mathfrak{F}_{\nu \mu}, \omega_\nu, \xi_\mu \} e^{i(\omega_\nu t + k_\mu \tau)} = 0 \quad (25 a)$$

$$\sum_{\nu \mu} {}_s N_{\nu \mu} \{ {}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}, \mathfrak{F}_{\nu \mu}, \omega_\nu, \xi_\mu \} e^{i(\omega_\nu t + k_\mu \tau)} = 0 \quad (25 b)$$

schreiben. Wegen der Willkür von t, τ folgen hieraus die Gleichungen

$${}_s M_{\nu \mu} \{ {}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}, \mathfrak{F}_{\nu \mu}, \omega_\nu, \xi_\mu \} = 0 \quad (26 a)$$

$${}_s N_{\nu \mu} \{ {}_s Q_{\nu \mu}, {}_s v_{\nu \mu}, \mathfrak{F}_{\nu \mu}, \omega_\nu, \xi_\mu \} = 0 \quad (26 b)$$

¹ Die Wahl einer Anordnung aus s diskreten Stromkomponenten bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir in I, II zeigen konnten, daß auch für Systeme in thermisch ungeordneter Bewegung ein geeigneter Satz diskreter Stromkomponenten das angemessene Modell ist. Darüber hinaus kann aber auch für die folgenden Überlegungen ohne Schwierigkeit der Grenzübergang zur kontinuierlichen Verteilung vollzogen werden.

Die Großen $\mathfrak{F}_{\nu\mu}$ sind dabei analog zu (23) als die Koeffizienten der Entwicklung

$$\mathfrak{F} = \sum_{\nu, \mu} \mathfrak{F}_{\nu\mu} e^{s(\omega_{\nu'} + \epsilon_{\mu} \nu)} \quad (27)$$

definiert. Wir haben zu beachten, daß wegen der Linearität unserer Überlegungen die Großen ${}_s M_{\nu\mu}$ und ${}_s N_{\nu\mu}$ lineare homogene Formen der ${}_s Q_{\nu\mu}$, ${}_s v_{\nu\mu}$ und $\mathfrak{F}_{\nu\mu}$ sind. Die Poissonsche Gleichung wiederum erlaubt die Großen $\mathfrak{F}_{\nu\mu}$ als lineare Ausdrücke der ${}_s Q_{\nu\mu}$ darzustellen und wir können daher nach der Elimination der $\mathfrak{F}_{\nu\mu}$ die Beziehungen (26) auch als lineare homogene Gleichungen der Variablen ${}_s Q_{\nu\mu}$, ${}_s v_{\nu\mu}$ selbst betrachten. Dieser Umstand ist wichtig. Gruppieren wir nämlich die Gln (26) nach dem Index ν, μ , so erhalten wir ν, μ solche Gruppen, die jeweils $2s$ homogene lineare Gleichungen für $2s$ Variable enthalten. Aus der Theorie der linearen Gleichungen ist wohlbekannt, daß derartige Systeme nur dann Lösungen besitzen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, womit eine Gleichung linear abhängig wird und zu vernachlässigen ist. Die erwähnte Koeffizientendeterminante liefert das Dispersionsgesetz

Wir sehen also, daß wir bei der Abzählung der Bedingungsgleichungen (26) in den Gruppen ν, μ statt $2s$ nur jeweils $(2s - 1)$ Gleichungen zu berücksichtigen haben. (26) umfaßt also insgesamt $(2s - 1) \nu, \mu$ unabhängige Gleichungen. Das heißt, wir haben zusammen mit (24)

$$\bar{Z} = 2 \mu s + \nu \mu (2s - 1) \quad (28)$$

Bedingungsgleichungen zu befriedigen und die Frage, ob die Anfangsbedingungen die Variablen eindeutig festlegen, überbestimmen oder unterbestimmen, läßt sich formelmäßig in der Beziehung

$$\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{2 \nu \mu s}{2 \nu \mu s + \mu (2s - \nu)} \stackrel{=}{\leq} 1 \quad (29)$$

ausdrücken

Diese Relation zeigt, wie das Verhältnis Z/\bar{Z} infolge des Ghedes $\mu(2s - \nu)$ tatsächlich im allgemeinen von dem Wert 1 abweicht. Insbesondere erkennt man, daß nur etwa die Hälfte der erforderlichen Parameter zur Verfügung steht, wenn wir $\nu = 1$ setzen. Dies ist in Übereinstimmung mit der Aussage LANDAUS [5]. Wir haben allerdings bei der Verfügung $\nu = 1$ außer acht gelassen, daß das Dispersionsgesetz zu jedem ϵ -Wert nicht nur eine, sondern gerade $2s$ -Losungen liefert, so daß wir $\nu = 2s$ in (29) einzuführen haben. Dann wird das Verhältnis Z/\bar{Z} genau gleich 1, und die Zahl der Parameter ist gerade der Befriedigung der Anfangsbedingungen angemessen, — was gezeigt werden sollte. Der irrtümliche Schluß in [5] ist nach diesen Überlegungen durch die Vernachlässigung der Mannigfaltigkeit der Lösungen des Dispersionsgesetzes bedingt.

Herrn Professor K. G. EMELEUS danke ich für seinen Kommentar zu der vorliegenden Untersuchung.

Literatur

- [1] ECKER, G Z Physik **140**, 274 (1955) — [2] ECKER, G Z Physik **140**, 293 (1955) — [3] VLASOV, A J Exper a Theor Phys **8**, 291 (1938) — [4] VLASOV, A J of Phys **9**, 25 (1945) — [5] LANDAU, L J of Phys **10**, 25 (1946) — [6] GROSS, E P Phys Rev **82**, 232 (1951) — [7] BHATNAGAR, P L, E P GROSS and M CROOK Phys Rev **94**, 511 (1954) — [8] HAEFF, A V Phys Rev **74**, 1532 (1948) — [9] TWISS, R Q Phys Rev **88**, 1392 (1952) — [10] TWISS, R Q Phys Rev **80**, 767 (1950) — [11] TWISS, R Q Phys Rev **84**, 448 (1951) — [12] BOHM, D, and E P GROSS Phys Rev **75**, 1850 (1949) — [13] BOHM, D, and E P GROSS Phys Rev **75**, 1865 (1949) — [14] THOMSON J J, and G P THOMSON Conduction of Electricity in Gases, Bd 2, S 353 London Cam Univ Press 1933 — [15] BAILEY, V A J Roy Soc New South Wales **82**, 107 (1948) — [16] BAILEY, V A Nature, Lond **161**, 599 (1948) — [17] BAILEY, V A Phys Rev **75**, 1104 (1949) — [18] BAILEY, V A Phys Rev **78**, 428 (1950) — [19] BAILEY, V A Phys Rev **83**, 439 (1951) — [20] GABOR, D Brit J Appl Phys **2**, 209 (1951)

Bonn, Institut für Theoretische Physik der Universität¹

¹ Die vorliegende Untersuchung wurde im Department of Physics der Queen's University Belfast begonnen