Mh. Math. 92, 291—297 (1981)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1981

Nullstellen von Real- und Imaginärteil der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

Von

H. Herold, Marburg

(Eingegangen am 28. November 1980; in modifizierter Fassung 7. Juli 1981)

Abstract. On the Zeros of the Real and Imaginary Part of the Solutions of Second Order Linear Differential Equations. This paper is concerned with complex Sturm-type comparison theorems. Especially it is shown that the location of the zeros of a nontrivial solution of a second order linear differential equation with complex-valued coefficients gives information about the distribution of the zeros of the real and imaginary part of any solution of certain other complex second order linear differential equations.

Der klassische Sturmsche Vergleichs- und Trennungssatz und seine zahlreichen Verallgemeinerungen im Reellen (siehe [7; Chapter 1], [6] und [1]) gestatten es, mittels der Nullstellenverteilung der Lösungen (und deren Ableitungen) einer reellen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung Einblick in die Nullstellenverteilung der Lösungen gewissep anderer derartiger Differentialgleichungen zu erhalten.

Bei der Übertragung des Sturmschen Satzes ins Komplexe handelt es sich durchwegs darum, die Lage der Nullstellen der Lösungen geeigneter reeller linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit der Lage der Nullstellen der Lösungen komplexer linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung zu vergleichen (siehe [5; Chapter 8], [2] und [3]).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich aus der Verteilung der Nullstellen der Lösungen einer komplexen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung Aufschluß über die Lage der Nullstellen von Real- und Imaginärteil der Lösungen bestimmter anderer komplexer linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung gewinnen läßt. In [4] wurden bereits Aussagen über Nullstellen (und Nullstellen der Ableitung) von Real- und Imaginärteil der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung und insbesondere Aussagen über Trennungseigenschaften dieser Nullstellen gemacht, die vor allem in

0026—9255/81/0092/0291/$01.40

Verbindung mit dem Ergebnis dieser Arbeit der Ermittlung der Nullstellenverteilung besagter Real- und Imaginärteile dienlich sind.

Im folgenden seien die reellwertigen Funktionen $p, q, P \in C(\alpha, \beta)$ sowie $a, A \in C[\alpha, \beta]$, und es gelte $p \leqslant P$ sowie $0 < A \leqslant a$.

Satz 1: *Seien* $p(x)$, $q(x)$, $P(x) = O((x-\alpha)^{-1}(\beta - x)^{-1}))$. *Die Differentialgleichung*

$$(z' a(x))' + (p(x) + i q(x)) z = 0 \tag{1}$$

besitze eine Lösung z* *mit* $\lim\limits_{x \to \alpha} z(x) = 0 = \lim\limits_{x \to \beta} z(x)$, $z(x) \neq 0$ *für* $x \in (\alpha, \beta)$.

Dann trifft für jede nichttriviale reellwertige Lösung u der Differentialgleichung

$$(u' A(x))' + P(x) u = 0 \tag{2}$$

genau eine der beiden folgenden Aussagen zu:

u hat mindestens eine Nullstelle in (α, β);

u und z sind linear abhängig und es ist $a = A, p = P, q \equiv 0$.

Zusatz: Dieselbe Aussage gilt für jede nichttriviale reellwertige Lösung u der Differentialgleichung

$$(u' A(x))' + P(x) u = 0 \text{ mit } P(x) = O((x-\alpha)^{-2}(\beta - x)^{-2}), \tag{3}$$

für die $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = O((x-\alpha)^{-1}(\beta - x)^{-1})$ gilt.

Korollar: *Besitzt* (2) *eine in* (α, β) *nullstellenfreie reellwertige Lösung, oder hat* (3) *eine in* (α, β) *nullstellenfreie reellwertige Lösung u mit* $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = O((x-\alpha)^{-1}(\beta - x)^{-1})$, *dann ist* (1) *mit* $q \not\equiv 0$ *diskonjugiert in* $[\alpha, \beta]$ (*d. h. jede nichttriviale Lösung von* (1) *hat höchstens eine Nullstelle in* $[\alpha, \beta]$).

Bemerkung: Das Korollar umfaßt Theorem 8.2.1 sowie Theorem 8.3.1 im Falle $\mu = 0$ in [5].

Beispiele: Sei $\alpha = -1, \beta = 1, p(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$ (insbesondere $p \leqslant 0$) oder

---

* z Lösung von (1) impliziert $z' a \in C^1(\alpha, \beta)$; sonst analog.

$p(x) \leqslant \frac{2}{1-x^2}$ oder $p(x) \leqslant \frac{1}{(1-x^2)^2}$. Dann ist

$$z'' + (p(x) + i\,q(x))\,z = 0, \; q \not\equiv 0,$$

in $[-1, 1]$ diskonjugiert.

Beweis: $u'' + \frac{\pi^2}{4} u = 0$ hat die Lösung $u = \sin\frac{\pi}{2}(x+1)$,

$u'' + \frac{2}{1-x^2} u = 0$ die Lösung $u = 1 - x^2$ und

$u'' + \frac{u}{(1-x^2)^2} = 0$ die Lösung $u = \sqrt{1-x^2}$.

Hilfssatz: *Sei* $f\colon [0,1) \to \mathbb{C}$ *stetig und* $|f(x)| = O((1-x)^{-1})$ *sowie* $b \in C[0,1], b > 0$. *Dann gilt für jede Lösung* w *der Differentialgleichung*

$$(w'\,b(x))' + f(x)\,w = 0:$$

$w \in C[0,1]$ *und* $|w'(x)| = O(\log(1-x))$, *sowie, falls* $w(1) = 0$ *ist,* $|w(x)| = O(1-x)$ *und* $w' \in C[0,1]$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $b \equiv 1$. Für $0 \leqslant s, x < 1$ gilt

$$w'(x) = w'(s) - \int_s^x f(t)\,w(t)\,dt \tag{4}$$

und

$$w(x) = w(s) + (x-s)\,w'(s) - \int_s^x (x-t)\,f(t)\,w(t)\,dt. \tag{5}$$

Aus (5) folgt für $s = 0$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$

$$|w(x)| \leqslant c_1 + \int_0^x (1-t)\,|f(t)|\,|w(t)|\,dt \leqslant c_1 + c_2 \int_0^x |w(t)|\,dt$$

und hieraus nach dem Lemma von Gronwall

$$|w(x)| \leqslant c_1 e^{c_2 x} \quad (0 \leqslant x < 1).$$

Daher folgt aus (5) die Existenz von $\lim_{x \to 1} w(x)$, so daß nach (4) $|w'(x)| = O(\log(1-x))$ ist. Hiermit ergibt sich im Falle $w(1) = 0$ aus (5) $|w(s)| = O((1-s)^c)$ mit $c > 0$, was gemäß (4) $w' \in C[0,1]$ und damit $|w(x)| = O(1-x)$ zur Folge hat.

Beweis von Satz 1: Auf Grund des Hilfssatzes ist $|z(x)| = O((x-\alpha)(\beta-x))$ und $|z'(x)| = O(1)$. Man setzt $z(x) = y(x) + iv(x)$ und zerlegt (1) in Real- und Imaginärteil:

$$(y' a)' + p y - q v = 0, \tag{6}$$

$$(v' a)' + p v + q y = 0. \tag{7}$$

Es wird

$$\int_\alpha^\beta q(x) y(x) v(x)\, dx \geqslant 0 \text{ und } y \not\equiv 0$$

angenommen und (6) herangezogen, während im Falle

$$\int_\alpha^\beta q(x) y(x) v(x)\, dx \leqslant 0 \text{ oder } y \equiv 0$$

mit Gleichung (7) analog zu verfahren ist.

Nun wird $u(x) \neq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$ angenommen. Mit dem Hilfssatz folgt die Beschränktheit von $(x-\alpha)(\beta-x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ in (α, β). Nach Multiplikation von (6) mit y und von (2) mit y^2/u ergibt sich durch Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen

$$y(y' a)' - (u' A)' \frac{y^2}{u} + (p - P) y^2 - q y v = 0.$$

Hieraus folgt mittels Integration unter Berücksichtigung des Verhaltens von y und von $\dfrac{u'}{u}$ bei $x = \alpha$ und $x = \beta$:

$$-\int_\alpha^\beta a y'^2 dx + \int_\alpha^\beta A u' \left(\frac{y^2}{u}\right)' dx + \int_\alpha^\beta (p - P) y^2 dx - \int_\alpha^\beta q y v\, dx = 0.$$

Mit der Umformung

$$a y'^2 - A u' \left(\frac{y^2}{u}\right)' = (a - A) y'^2 + A\left(y' - y\frac{u'}{u}\right)^2$$

erhält man hieraus

$$\int_\alpha^\beta [(a - A) y'^2 + (P - p) y^2]\, dx + \int_\alpha^\beta A\left(y' - y\frac{u'}{u}\right)^2 + \int_\alpha^\beta q y v\, dx = 0.$$

Diese Beziehung liefert unter den getroffenen Voraussetzungen einen

Widerspruch zu der Annahme $u(x) \neq 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$, wenn folgender Fall ausscheidet:

$$u \text{ und } y \text{ sind linear abhängig, } a = A, p = P. \tag{8}$$

Liegt der Fall (8) vor, liefern (2) und (6)

$$q(x)\, v(x) = 0 \text{ für alle } x \in (\alpha, \beta),$$

was gemäß (7) offenbar $q \equiv 0$ zur Folge hat. Wegen

$$[a(y' v - v' y)]' \equiv 0 \text{ in } (\alpha, \beta)$$

sind dann auch y und v linear abhängig.

Der durchgeführte Beweis läßt auch die Richtigkeit des Zusatzes erkennen.

Bemerkung: Im Falle $p, P \in C[\alpha, \beta]$ und $q \equiv 0$ reduziert sich Satz 1 auf den Sturmschen Vergleichs- und Trennungssatz.

Satz 2: *Die Funktionen p, P, q, Q seien aus $C[\alpha, \beta]$, und es sei $Q \geqslant 0$ oder $Q \leqslant 0$, aber $Q \not\equiv 0$. Die Differentialgleichung*

$$(z' a(x))' + (p(x) + i q(x))\, z = 0$$

besitze eine nichttriviale Lösung z mit $z(\alpha) = 0$ und $z(\beta) = 0$. Dann hat für jede Lösung Z der Differentialgleichung

$$(Z' A(x))' + (P(x) + i Q(x))\, Z = 0 \tag{9}$$

$\operatorname{Re} Z$ *oder* $\operatorname{Im} Z$ *mindestens eine Nullstelle in* (α, β).

Beweis: Nach Satz 1 gibt es eine nichttriviale reellwertige Lösung v von $(Z' A)' + P(x) Z = 0$ und ein $\gamma \in (\alpha, \beta]$, so daß gilt:

$$v(\alpha) = 0,\ v(\gamma) = 0,\ v \neq 0 \text{ in } (\alpha, \gamma). \tag{10}$$

Sei Z eine beliebige nichttriviale Lösung von (9). Im Falle $Q(x) = 0$ für alle $x \in [\alpha, \gamma]$ (dann ist $\gamma < \beta$) haben nach Satz 1 $\operatorname{Re} Z$ und $\operatorname{Im} Z$ mindestens eine Nullstelle in $(\alpha, \gamma]$.

Im Falle $Q \not\equiv 0$ auf $[\alpha, \gamma]$ wird $\operatorname{Re} Z \neq 0$ und $\operatorname{Im} Z \neq 0$ in (α, γ) angenommen.

Multiplikation von (9) mit v, von $(v' A)' + P v = 0$ mit Z und Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen ergibt

$$\frac{d}{dx}[A(v' Z - Z' v)] = i v Q Z,$$

so daß mit (10) folgt:

$$[A v' Z]_{\alpha}^{\gamma} = i \int_{\alpha}^{\gamma} v(x) Q(x) Z(x) \, dx. \tag{11}$$

Da die Kurve $x \mapsto Z(x)$, $\alpha < x < \gamma$, ganz im Innern eines Quadranten der komplexen Ebene verläuft und $vQ \geqslant 0$ oder $vQ \leqslant 0$, aber $vQ \not\equiv 0$ in (α, γ) ist, stellt das Integral in (11) einen Punkt im Innern eines Quadranten R dar. Wegen $v'(\alpha) v'(\gamma) < 0$ und $A > 0$ stellt

$$[A v' Z]_{\alpha}^{\gamma} \quad \text{oder} \quad -[A v' Z]_{\alpha}^{\gamma}$$

einen Punkt im abgeschlossenen Quadranten R dar. Beziehung (11) bedeutet daher wegen des Faktors i vor dem Integral einen Widerspruch.

Nun soll noch die Anwendungsmöglichkeit des Satzes an zwei Beispielen dargelegt werden:

Beispiel 1: Sei M eine positive Konstante, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{M}$, $P \geqslant M^2$ auf $[\alpha, \beta]$, $Q \geqslant 0$ oder $Q \leqslant 0$ in (α, β), $Q \not\equiv 0$. Dann hat für jede Lösung Z von

$$Z'' + (P(x) + i Q(x)) Z = 0$$

$\operatorname{Re} Z$ oder $\operatorname{Im} Z$ mindestens eine Nullstelle in (α, β).

Beweis: $z'' + M^2 z = 0$ hat die Lösung $z = \sin M(x - \alpha)$ mit $z(\alpha) = z(\beta) = 0$.

Beispiel 2: Seien M und c positive Konstanten, sei $\beta = \alpha + \left[\frac{\pi(1+c)}{M}\right]^{1/(1+c)}$, $P \geqslant M^2 (x - \alpha)^{2c}$ auf $[\alpha, \beta]$, $Q \geqslant 0$ oder $Q \leqslant 0$ in (α, β), $Q \not\equiv 0$. Dann hat für jede Lösung Z von

$$Z'' + (P(x) + i Q(x)) Z = 0$$

$\operatorname{Re} Z$ oder $\operatorname{Im} Z$ mindestens eine Nullstelle in (α, β).

Beweis: Die Differentialgleichung

$$z'' + M^2 (x - \alpha)^{2c} z = 0 \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta) \tag{12}$$

wird durch die Transformation

$$t = \frac{M}{1+c} (x - \alpha)^{1+c}, \ \alpha < x \leqslant \beta, \ v(t) = \sqrt{M} (x - \alpha)^{c/2} z(x)$$

übergeführt in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (1 + g(t))\, v = 0 \tag{13}$$

mit $g(t) = \dfrac{c(2+c)}{4(1+c)^2} \dfrac{1}{t^2}, \ 0 < t \leqslant \pi.$

Da $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ die Lösung $y = \sin t$ mit $y(0) = y(\pi) = 0$ besitzt, hat eine nichttriviale Lösung v von (13) mit $v(\pi) = 0$ wegen $g > 0$ eine Nullstelle in $(0, \pi)$. Daher hat (12) eine nichttriviale Lösung z mit $z(\alpha') = 0$ $(\alpha < \alpha' < \beta)$, $z(\beta) = 0$.

Dem Referenten möchte ich für hilfreiche Hinweise herzlich danken.

Literatur

[1] HEROLD, H.: Über die Nullstellen der Ableitung der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math. Z. **119**, 290—312 (1971).

[2] HEROLD, H.: Sturmscher Vergleichssatz im Komplexen. Math. Nachr. **81**, 195—200 (1978).

[3] HEROLD, H.: Vergleichssätze für komplexe lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Portug. Math. **35**, 213—219 (1976).

[4] HEROLD, H.: Nullstellen bei Lösungen komplexer linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mh. Math. **74**, 41—49 (1970).

[5] HILLE, E.: Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York–London–Sydney–Toronto: J. Wiley. 1976.

[6] LEIGHTON, W.: Some elementary Sturm theory. J. Diff. Equat. **4**, 187—193 (1968).

[7] SWANSON, C. A.: Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. New York–London: Academic Press. 1968.

Prof. Dr. H. HEROLD
Fachbereich Mathematik
Universität Marburg
Lahnberge
D-3550 Marburg/Lahn, Bundesrepublik Deutschland