Mh. Math. 88, 87—105 (1979)

Monatshefte für Mathematik

Operatormethoden für q-Identitäten

Von

J. Cigler, Wien

(Eingegangen am 6. März 1979)

Herrn Prof. Dr. L. Schmetterer zum 60. Geburtstag gewidmet

Abstract. Operator Methods for q-Identities. We use some simple operator methods in order to give more insight into q-identities.

Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht vor allem darin, möglichst einfache und effektive Methoden zur Ableitung von q-Identitäten anzugeben. Die Identitäten selbst sind in den meisten Fällen wohlbekannt und in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Uns geht es vor allem darum, ein wenig Ordnung in das Chaos spezieller Identitäten zu bringen, so wie das für $q = 1$ in letzter Zeit mit Hilfe des umbralen Kalküls erreicht wurde. (Man vgl. etwa [4], [5], [13], [14].) Rein technisch gesehen geht es darum, Folgerungen aus der Identität $RT - qTR = I$ abzuleiten, wobei R und T lineare Operatoren auf dem Vektorraum P aller Polynome in der Veränderlichen x über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind und I die identische Abbildung bedeutet.

1. Der q-binomische Lehrsatz

Als einfachstes Beispiel von Operatoren R und T mit $RT - qTR = I$ betrachten wir bei festem $q \neq 0, -1$ den q-Differentiationsoperator $R = D$, definiert durch

$$(Dp)(x) = \frac{p(qx) - p(x)}{(q-1)x}$$

und den Multiplikationsoperator $T = x$ mit $Tp(x) = xp(x)$. Es ist dann $Dx^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}$, wenn wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ das in der q-Analysis übliche Symbol $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$ verwenden.

0026—9255/79/0088/0087/$03.80

Ebenso führen wir die Abkürzungen $[n]! = [1][2]\ldots[n]$, $[0]! = 1$ und $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}$ ein.

Als weiteren Operator betrachten wir ε, definiert durch $(\varepsilon p)(x) = p(qx)$. Dann sind die Operatoren D, x und ε durch die folgenden Identitäten miteinander verknüpft.

$$Dx - qxD = I, \tag{1}$$

$$Dx - xD = \varepsilon. \tag{2}$$

Man beweist das am einfachsten dadurch, daß man beide Seiten auf die Basispolynome x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, anwendet. Dann sind (1) und (2) äquivalent mit den trivialen Identitäten

$$[n+1] - q[n] = 1 \tag{1'}$$

und

$$[n+1] - [n] = q^n. \tag{2'}$$

Etwas allgemeiner zeigt man mit derselben Methode

$$Dx^k - q^k x^k D = [k]\,x^{k-1} \tag{3}$$

und

$$Dx^k - x^k D = [k]\,x^{k-1}\,\varepsilon. \tag{4}$$

Diese Identitäten sind wieder äquivalent mit

$$[n+k] - q^k[n] = [k] \tag{3'}$$

und

$$[n+k] - [n] = [k]\,q^n. \tag{4'}$$

Etwas interessanter sind die dualen Identitäten

$$D^k x - q^k x D^k = [k]\,D^{k-1} \tag{5}$$

und

$$D^k x - x D^k = \varepsilon\,[k]\,D^{k-1}, \tag{6}$$

welche mit den folgenden Rekursionsrelationen für die q-Binomialkoeffizienten äquivalent sind:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{5'}$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{6'}$$

Für $q = 1$ erhalten wir den üblichen Differentiationsoperator D und die üblichen Binomialkoeffizienten.

Wir wollen als erstes Resultat eine besonders durchsichtige Form des q-binomischen Lehrsatzes geben.

Satz 1: *Seien A und B lineare Operatoren auf P mit $BA = qAB$. Dann gilt für $n = 0, 1, 2, \ldots$*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}. \tag{7}$$

Der *Beweis* ergibt sich sofort mittels Induktion aus (5').

Beispiel: Wählt man $A = x\varepsilon$ und $B = a\varepsilon$ mit einer Konstanten a, dann sind die Voraussetzungen erfüllt. Es gilt

$$(x\varepsilon)^k 1 = q^{\binom{k}{2}} x^k \text{ und}$$

$$(x\varepsilon + a\varepsilon)^k 1 = (x+a)(qx+a)(q^2x+a)\ldots(q^{k-1}x+a).$$

Es ergibt sich somit die bekannte Gleichung

$$(x+a)(qx+a)\ldots(q^{n-1}x+a) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k a^{n-k}. \tag{8}$$

Bemerkung: Die einfache Idee, die zu (7) geführt hat, läßt sich auf eine Reihe weiterer Probleme anwenden. Sind etwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Elemente einer assoziativen Algebra mit $A_j A_i = q A_i A_j$ für $i < j$, dann ist

$$[n]!\, A_1 A_2 \ldots A_n = \sum_{\pi} A_{\pi(1)} A_{\pi(2)} \ldots A_{\pi(n)},$$

wobei π alle Permutationen der Indizes durchläuft, wie man durch Induktion sofort verifiziert.

Andererseits gilt

$$A_{\pi(1)} A_{\pi(2)} \dots A_{\pi(n)} = q^k A_1 A_2 \dots A_n$$

genau dann, wenn die Permutation π genau k Inversionen, d. h. k Paare (i,j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$, enthält.

Bezeichnet man mit $I(n,k)$ die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen, so gilt also die bekannte Formel

$$\sum I(n,k) q^k = [n]! = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1}). \quad (9)$$

Der q-binomische Lehrsatz läßt sich sehr einfach mit Hilfe der Eulerschen Exponentialfunktion (man vgl. z. B. [6])

$$e(z) = e_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]!},$$

die wir als formale Potenzreihe betrachten, formulieren.

Satz 2: *Sind A und B lineare Operatoren auf P mit $BA = qAB$, dann gilt*

$$e(Az)\, e(Bz) = e\big((A+B)z\big). \quad (10)$$

Der *Beweis* ergibt sich sofort durch Koeffizientenvergleich.

Beispiele:

1) Für $A = x$, $B = -x\varepsilon$ folgt

$$e(x)\, e(-x\varepsilon) = e\big(x(1-\varepsilon)\big).$$

Wendet man beide Seiten auf die konstante Reihe 1 an, so erhält man wegen $(1-\varepsilon)1 = 0$

$$e(-x\varepsilon)1 = \frac{1}{e(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!}.$$

Das ist wohl der einfachste Beweis für diese wohlbekannte Formel.

2) Für $A = x$, $B = a\varepsilon$ ergibt sich

$$\sum_0^{\infty} \frac{H_n(x,a)}{[n]!} z^n = e(xz)\, e(az) \text{ mit}$$

$$(A+B)^n 1 = (x + a\varepsilon)^n 1 = H_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}. \quad (11)$$

3) Wählt man $A = -x\varepsilon$, $B = a\varepsilon$, so erhalten wir

$$\sum_0^\infty \frac{p_n(a,x)}{[n]!} z^n = \frac{e(az)}{e(xz)} \tag{12}$$

mit $p_n(a,x) = (a-x)(a-qx)\dots(a-q^{n-1}x)$.

Wir benötigen noch die charakteristische Eigenschaft der q-Exponentialfunktion, nämlich $D e(x) = e(x)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{e(qx) - e(x)}{(q-1)x} = e(x)$$

d. h. $e(qx) = \big(1 + (q-1)x\big)e(x)$. Mit Induktion folgt dann

$$e(q^n x) = p_n\big(1, (1-q)x\big)e(x). \tag{13}$$

Satz 3: *Es gilt*

$$e(\varepsilon z)e(xt) = \frac{e(xt)e(z)}{e\big((1-q)xtz\big)}. \tag{14}$$

Beweis:

$$e(\varepsilon z)e(xt) = \sum_{k,l} \frac{\varepsilon^l z^l x^k t^k}{[k]!\,[l]!} = \sum_{k,l} \frac{q^{kl} t^k x^k z^l}{[k]!\,[l]!} =$$

$$= \sum \frac{(xt)^k}{[k]!} \sum \frac{(q^k z)^l}{[l]!} = \sum \frac{(xt)^k}{[k]!} e(q^k z) =$$

$$= e(z) \sum \frac{p_k\big(1,(1-q)z\big)}{[k]!} (xt)^k = e(z) \frac{e(xt)}{e\big((1-q)xtz\big)}.$$

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist implizit in [3] enthalten und kann dazu verwendet werden, um das dort erzielte Resultat

$$\sum \frac{H_n(x)H_n(y)}{[n]!} z^n = \frac{e(z)e(xz)e(yz)e(xyz)}{e\big((1-q)xyz^2\big)}$$

mit $H_n(x) = H_n(x,1)$ besonders einfach abzuleiten:

$$\sum \frac{H_n(x)H_n(y)}{[n]!} z^n = \sum \frac{H_n(y)}{[n]!} \big((x+\varepsilon)z\big)^n 1 = e\big(y(x+\varepsilon)z\big)e\big((x+\varepsilon)z\big)1$$

nach (11). Aus Satz 3 ergibt sich nun die Behauptung.

Nun noch einige Modifikationen bzw. Erweiterungen des q-binomialen Lehrsatzes:

1) Ist B invertierbar auf P, dann gilt

$$p_n(I, -AB^{-1}) = (A+B)^n B^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{-k}. \tag{15}$$

Zum Beweis braucht man nur zu zeigen, daß die zwei linken Ausdrücke identisch sind, was sich sofort aus $BA = qAB$ ergibt.

2) Unter geeigneten Voraussetzungen über A und B (etwa für $A = D$ und $B = \varepsilon^{-1}$) oder indem man P zum Ring der formalen Potenzreihen erweitert (und etwa $A = x\varepsilon$, $B = \varepsilon$ wählt), läßt sich sofort zeigen, daß

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k} \tag{16}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn man $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\dots[n-k+1]}{[k]!}$ setzt.

3) Wählt man $A = x\varepsilon$ und $B = \varepsilon$ auf dem Vektorraum aller Polynome in x und $1/x$ mit $\varepsilon(x^n) = q^n x^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist A invertierbar und

$$A^{-m}(A+B)^{m+n} = \sum \begin{bmatrix} m+n \\ l \end{bmatrix} A^{-m} A^l B^{m+n-l} = \sum_{k=-m}^{n} \begin{bmatrix} m+n \\ k+m \end{bmatrix} A^k B^{n-k}.$$

Wendet man das auf 1 an, so ergibt sich eine Identität von MacMahon (vgl. [9]):

$$\left(\frac{q^m}{x}+1\right)\left(\frac{q^{m-1}}{x}+1\right)\left(\frac{q}{x}+1\right)(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) = \\ = \sum_{k=-m}^{n} \begin{bmatrix} n+m \\ k+m \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k. \tag{17}$$

4) Aus der trivialen Gleichung $(A+B)^{r+s} = (A+B)^r(A+B)^s$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das q-Analogon der Vandermondeschen Formel:

$$\begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix} q^{(n-k)(r-k)}. \tag{18}$$

2. Verallgemeinerte Sheffer-Folgen

Wir nennen eine Folge $p = \{p_n\}$ von Polynomen eine Hauptfolge, wenn gilt:

1) $p_0 \equiv 1$,
2) p_n ist genau vom Grad n,
3) $p_n(0) = 0$ für $n > 0$.

Bei gegebenem q und fester Hauptfolge $p = \{p_n\}$ betrachten wir lineare Operatoren $T = T(p, q)$, $R = R(p, q)$ und $\varepsilon = \varepsilon(p, q)$, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{gathered} T p_n = p_{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \\ R p_n = [n] p_{n-1} \text{ für } n \geqslant 1, \; R p_0 = 0, \\ \varepsilon p_n = q^n p_n . \end{gathered} \tag{19}$$

Für die Hauptfolge $i = \{x^n\}$ und $q = 1$ ist T der Multiplikationsoperator mit x, R der Differentiationsoperator und ε die Identität.

Man rechnet wieder leicht nach, daß (1), (2), (3), (4), (5) und (6) gelten, wenn man D durch R und x durch T ersetzt. Wir verifizieren etwa die Gleichung $RT - TR = \varepsilon$. Dazu wenden wir beide Seiten auf die Basispolynome p_n an und sehen, daß wir wieder die trivialen Gleichungen $[n+1] - [n] = q^n$ erhalten.

Für eine beliebige Folge $\{a_k\}$ reeller Zahlen definieren wir den linearen Operator

$$a(R) = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$$

durch
$$a(R) p_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k p_{n-k} .$$

Eine ausgezeichnete Rolle spielt der Operator $e(aR) = \sum \frac{a^k}{[k]!} R^k$, der sich für $q = 1$, $p = i$ und $R = D$ auf den Verschiebungsoperator $E^a = e^{aD}$ reduziert. Es gilt

$$e(aR) p_n = (T + a\varepsilon)^n 1 . \tag{20}$$

Denn

$$e(aR) p_n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k p_{n-k} = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k T^{n-k} 1 = (T + a\varepsilon)^n 1 ,$$

weil $T^k 1 = p_k$ ist und $\varepsilon T = q T \varepsilon$ gilt.

Satz 4: *Sei $Q: P \to P$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $RQ = QR$,

b) $e(aR)Q = Qe(aR)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

c) *Q ist von der Gestalt* $Q = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$ *für eine gewisse Folge reeller Zahlen $\{a_k\}$. Erfüllt Q eine dieser Bedingungen, so heißt Q R-invariant.*

Beweis: Die einzige nichttriviale Implikation ist b) $\Rightarrow$ c). Sei $Lp = p(0)$. Ein Polynom p ist genau dann identisch 0, wenn $LR^k p = 0$ ist für alle k. Das sieht man etwa, indem man p nach den Basispolynomen p_k entwickelt. Und $LR^k p = 0$ für alle k ist klarerweise äquivalent mit $Le(aR)p = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Sei nun b) erfüllt. Wir behaupten, daß dann

$$Q = \sum \frac{LQp_k}{[k]!} R^k$$

gilt.

Sei nämlich $S = Q - \sum \frac{LQp_k}{[k]!} R_k$. Dann ist $Se(aR) = e(aR)S$ und $LSp_n = 0$ für alle n, d.h. $LS = 0$; $\Rightarrow Le(aR)Sp = = LSe(aR)p = 0$ für alle n; $\Rightarrow Sp = 0$, d.h. $S = 0$.

Satz 5: *Sei $S: P \to P$ linear. Dann gilt $RS = qSR$ genau dann, wenn $S = \varepsilon Q$ ist mit einem R-invarianten Operator Q.*

Beweis: Es gilt $\varepsilon^{-1} R \varepsilon = qR$. Ist $S = \varepsilon Q$ mit $QR = RQ$, dann ist $RS = R\varepsilon Q = q\varepsilon RQ = q\varepsilon QR = qSR$.

Ist umgekehrt $RS = qSR$, dann ist

$$q(\varepsilon^{-1}S)R = \varepsilon^{-1}RS = \varepsilon^{-1}R\varepsilon\varepsilon^{-1}S = qR(\varepsilon^{-1}S),$$

d.h. $\varepsilon^{-1}S$ ist R-invariant.

Satz 6: *Ein Operator $S: P \to P$ erfüllt genau dann $RS - qSR = I$, wenn $S = T + \varepsilon Q$ ist mit einem R-invarianten Operator Q.*

Beweis: $RS - qSR = I$ ist gleichbedeutend mit $R(S - T) - - q(S - T)R = 0$, d.h. mit $S - T = \varepsilon Q$ nach Satz 5.

Ist S ein derartiger Operator, dann definiert $S^n 1 = s_n(x)$ eine Polynomfolge, die wir im Anschluß an die Rotasche Terminologie ([14]) eine R-Shefferfolge nennen wollen.

Satz 7: *Sei Q ein R-invarianter Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R-invarianter Operator $s(R)$ mit $s(R)1 = 1$, sodaß gilt*

$$T + \varepsilon Q = \frac{1}{s(R)} T s(R).$$

Beweis: Ist $a(R) = \sum \frac{a_k}{[k!]} R^k$ ein R-invarianter Operator, so definieren wir seine q-Ableitung $\frac{\partial}{\partial R} a(R) = a'(R)$ durch $a'(R) = = \sum \frac{a_{k+1}}{[k]!} R^k$. Aus $R^n T - T R^n = \varepsilon [n] R^{n-1}$ folgt also

$$a(R) T - T a(R) = \varepsilon a'(R). \tag{21}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{s(R)} T s(R) = T - \varepsilon \frac{s'(R)}{s(qR)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich stellt man fest, daß es zu jedem Operator $a(R) = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$ genau einen Operator $s(R)$ mit $s(R)1 = 1$ gibt, welcher $s'(R) = a(R) s(qR)$ erfüllt.

Für das praktische Rechnen mit R-Shefferfolgen erweist sich eine kleine Modifikation dieser Darstellung als sehr nützlich, die von P. Kirschenhofer [10] stammt.

Satz 8: *Sei $s_n(x) = \frac{1}{s(R)} p_n(x)$ eine R-Shefferfolge. Dann gilt*

$$s_n(x) = (T - q^{n-1} b(R))(T - q^{n-2} b(R)) \dots (T - b(R))1, \tag{22}$$

wobei $b(R)$ durch $\frac{s'(R)}{s(R)} = b(qR)$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Setzt man $\frac{s'(R)}{s(R)} = b(qR)$, dann gilt

$$\frac{1}{s(R)} T s(R) = T - \frac{b(R)}{s(R)} \varepsilon s(R)$$

und somit

$$s_n(x) = \left(T - \frac{b(R)}{s(R)}\varepsilon s(R)\right)^n 1 = \left(T - b(R)\frac{1}{s(R)}\varepsilon s(R)\right)s_{n-1}(x) =$$

$$= T s_{n-1} - b(R) q^{n-1} s_{n-1} = (T - q^{n-1} b(R)) s_{n-1},$$

woraus die Behauptung folgt.

Die R-Shefferfolgen sind deshalb interessant, weil sie bei gegebener Hauptfolge $p = \{p_n\}$ alle Folgen s_n mit $R s_n = [n] s_{n-1}$ liefern. Von speziellem Interesse sind die Shefferfolgen zur Hauptfolge $\{x^n\}$, die in der Literatur oft untersucht worden sind und auch als q-Appell-Folgen bekannt sind.

Wir wollen hier nur zur Illustration alle q-Appell-Folgen bestimmen, die bezüglich eines linearen Funktionals F auf P orthogonal sind, d. h. $F(s_k s_l) = \lambda_k \delta_{kl}$ erfüllen mit $\lambda_k \neq 0$.

Da s_n ein Polynom vom Grad n ist, ist das lineare Funktional F durch die Werte $F(s_n) = F(s_n s_0) = \delta_{n0}$ bereits eindeutig festgelegt. Wir suchen also jene q-Appellfolgen s_n, welche sogar $F(s_k s_l) = \lambda_k \delta_{kl}$ erfüllen. Da $s_1(x) = ax + b$ ist, muß speziell $F(x s_n) = 0$ sein für alle $n > 1$. Nun gilt nach Satz 8 $s_{n+1} = (x - q^n b(D)) s_n$.

$$\Rightarrow 0 = F(x s_n) = F\left((x - q^n b(D)) s_n + q^n b(D) s_n\right) =$$

$$= F(s_{n+1}) + q^n F(b(D) s_n) = q^n F(b(D) s_n).$$

Ist nun $b(D) = \sum \frac{b_k}{[k]!} D^k$, so ist $b(D) s_n = \sum b_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s_{n-k}$ und $F(b(D) s_n) = b_n$. Es ist also $b_n = 0$ für $n > 1$. Somit ergibt sich $b(D) = b_0 + b_1 D$. Die einzigen q-Appell-Folgen, welche bezüglich eines linearen Funktionals F orthogonal sein können, sind also gegeben durch $s_0(x) = 1$, $s_{n+1}(x) = (x - q^n b) s_n(x) - a[n] q^n s_{n-1}(x)$ mit gewissen reellen Zahlen $a \neq 0$ und b. Von diesen sieht man aber sofort, daß sie wirklich orthogonal sind.

Für $b = 0$, $a = 1$ ergeben sich die q-Hermitepolynome

$$h_n(x) = (x - q^{n-1} D)(x - q^{n-2} D) \dots (x - D) 1,$$

die von P. KIRSCHENHOFER [10] genauer untersucht wurden.

3. Reziprozitätsgesetze für Operatoridentitäten

Wir wollen nun einige Methoden angeben, um Operatoridentitäten in R und T abzuleiten. Dazu führen wir zunächst bei gegebener

Hauptfolge p und festem q in P ein inneres Produkt ein durch

$$\langle p_k, p_l\rangle = [k]!\,\delta_{kl}. \tag{23}$$

Es gilt dann

$$\langle p_k, p_l\rangle = \langle p_l, p_k\rangle \text{ und } \langle R p_k, p_l\rangle = \langle p_k, T p_l\rangle. \tag{24}$$

Setzt man $\langle A p_k, p_l\rangle = \langle p_k, A^t p_l\rangle$, dann gilt also $(A B)^t = B^t A^t$ und

$$R^t = T, T^t = R, \varepsilon^t = \varepsilon. \tag{25}$$

Wir erhalten somit den

Satz 9 *(1. Reziprozitätsgesetz): Die Abbildung $A \to A^t$ führt jede Operatoridentität $f(R, T, \varepsilon) = 0$ in eine Operatoridentität*

$$f^t(R, T, \varepsilon) = 0$$

über. Dabei gilt $f^{tt} = f$.

Beispiel: Wendet man auf die Identität

$$R T^k - q^k T^k R = [k] T^{k-1}$$

das erste Reziprozitätsgesetz an, so folgt

$$R^k T - q^k T R^k = [k] R^{k-1}.$$

Geht man von $R T^k - T^k R = [k] T^{k-1} \varepsilon$ aus, so erhält man $R^k T - T R^k = [k] \varepsilon R^{k-1}$. Speziell gehen (3) und (5) sowie (4) und (6) auseinander hervor.

Noch interessanter ist eine Reziprozität, die sich durch Betrachtung der linearen Funktionale auf P ergibt. Bezeichnet man mit L das lineare Funktional, das durch $L p = p(0)$ definiert ist, so ist klar, daß jedes lineare Funktional F auf P von der Gestalt $F = \sum_0^\infty b_k L R^k$ ist. Führt man nun die linearen Funktionale

$$L_k = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}} L R^k \tag{26}$$

ein, so läßt sich also jedes lineare Funktional F auf P eindeutig in der Gestalt

$$F = \sum \frac{a_k}{[k]!} L_k$$

schreiben, d.h. $F(p) = (p, F) = \sum \frac{a_k}{[k]!} (p, L_k)$ mit

$$(p_n, L_k) = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}} [k]!\,\delta_{n,k}. \tag{27}$$

Wir übertragen nun die Operatoren R und T, die bisher nur auf P definiert wurden, auf den Vektorraum P' aller linearen Funktionale durch

$$T\,L_k = -\frac{[k]}{q^k}L_{k-1}\,,\, T\,L_0 = 0,\; R\,L_k = L_{k+1}\,. \tag{28}$$

Dann gilt wieder $R\,T - q\,T\,R = I$, weil

$$(R\,T - q\,T\,R)\,L_k = \frac{1}{q^k}([k+1]-[k])\,L_k = L_k$$

ist. Setzt man wieder $\varepsilon = R\,T - T\,R$, so ist

$$\varepsilon\,L_k = \frac{1}{q^{k+1}}L_k \tag{29}$$

wegen

$$(R\,T - T\,R)\,L_k = \frac{1}{q^{k+1}}([k+1]-q\,[k])\,L_k = \frac{1}{q^{k+1}}L_k\,.$$

Weiter ist

$$\varepsilon\,T = q\,T\,\varepsilon \text{ und } R\,\varepsilon = q\,\varepsilon\,R\,. \tag{30}$$

Setzt man $(A\,p, F) = (p, A^*\,F)$, so gilt

Satz 10: *Es gilt* $T^* = T$, $R^* = -R\,\varepsilon^{-1}$ *und* $\varepsilon^* = q^{-1}\,\varepsilon^{-1}$.

Beweis: Sei $\lambda_k = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}}[k]!$. Dann ist $\lambda_k = -\frac{[k]}{q^k}\lambda_{k-1}$.
Daher gilt

$$(T\,p_n\,, L_k) = (p_{n+1}\,, L_k) = \lambda_k\,\delta_{n+1,k} = -\frac{[k]}{q^k}\lambda_{k-1}\,\delta_{n,k-1} =$$
$$= \left(p_n\,, -\frac{[k]}{q^k}L_{k-1}\right) = (p_n\,, T\,L_k).$$

Analog ist

$$(R\,p_n\,, L_k) = [n]\,(p_{n-1}\,, L_k) = [k+1]\,(p_{n-1}\,, L_k) = [k+1]\,\lambda_k\,\delta_{n-1,k} =$$
$$= -q^{k+1}\,\lambda_{k+1}\,\delta_{n,k+1} = (p_n\,, -q^{k+1}\,L_{k+1}) = (p_n\,, -R\,\varepsilon^{-1}\,L_k).$$

Schließlich ist

$$(\varepsilon\,p_n\,, L_k) = q^n\,(p_n\,, L_k) = q^k\,\lambda_k\,\delta_{n,k} = (p_n\,, q^k\,L_k) = (p_n\,, q^{-1}\,\varepsilon^{-1}\,L_k)\,.$$

Satz 11 *(2. Reziprozitätsgesetz): Die Abbildung $A \to A^*$ führt jede Operatoridentität $f(R, T, \varepsilon) = 0$ in eine Operatoridentität*

$$f^*(R, T, \varepsilon) = 0$$

über. Dabei gilt $f^{**} = f$.

Beweis: $f^*(R, T, \varepsilon)$ ist definitionsgemäß eine Identität für Operatoren auf P'. Fassen wir sie jedoch als Identität für Operatoren auf P auf, so können wir f^{**} bilden.

Wegen

$$T^{**} = T^* = T, \; R^{**} = (-R\varepsilon^{-1})^* = -(\varepsilon^*)^{-1} R^* = -q\varepsilon(-R\varepsilon^{-1}) = R$$

und $$\varepsilon^{**} = (q^{-1}\varepsilon^{-1})^* = q^{-1}(\varepsilon^*)^{-1} = q^{-1} q \varepsilon = \varepsilon$$

gilt also $f^{**} = f$.

Beispiele: 1) Wenden wir das zweite Reziprozitätsgesetz auf $R T^k - q^k T^k R = [k] T^{k-1}$ an, so erhalten wir

$$(T^*)^k R^* - q^k R^* (T^*)^k = [k] (T^*)^{k-1},$$

d. h. $T^k(-R\varepsilon^{-1}) - q^k(-R\varepsilon^{-1}) T^k = [k] T^{k-1}$ oder

$$(R T^k - T^k R)\varepsilon^{-1} = [k] T^{k-1}, \text{ d. h. } R T^k - T^k R = [k] T^{k-1} \varepsilon.$$

Speziell sind also (3) und (4) dual zueinander. Ebenso (5) und (6).

2) Man zeigt sofort mit Induktion, daß

$$R^n T^n = \prod_{k=0}^{n-1} (q^k R T + [k]) \tag{31}$$

gilt. Dabei kommt es auf die Reihenfolge der rechten Faktoren nicht an, weil $(q^k R T + [k]) p_m$ für jedes m ein Vielfaches von p_m ist.

Nun ist

$$(R^n T^n)^* = T^n(-R\varepsilon^{-1})^n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} T^n R^n \varepsilon^{-n} \text{ und}$$

$$(q^k R T + [k])^* \varepsilon = (q^k T(-R\varepsilon^{-1}) + [k])\varepsilon = -q^k T R + [k]\varepsilon.$$

Da $\varepsilon R T = R T \varepsilon$ ist, erhalten wir

$$q^{\binom{n}{2}} T^n R^n = \prod_{k=0}^{n-1} (q^k T R - [k]\varepsilon).$$

Setzt man nun $\varepsilon = 1 + (q-1)TR$ ein, so ergibt sich als reziproke Formel

$$q^{\binom{n}{2}} T^n R^n = \prod_{k=0}^{n-1} (TR - [k]) . \tag{32}$$

Bemerkung: Beide Formeln folgen natürlich auch trivialerweise aus den Gleichungen

$$R^n T^n p_{m-1} = [m][m+1]\dots[m+n-1] p_{m-1}$$
$$(q^k RT + [k]) p_{m-1} = (q^k [m] + [k]) p_{m-1} = [m+k] p_{m-1}$$
$$T^n R^n p_m = [m][m-1]\dots[m-n+1] p_m \text{ und}$$
$$q^{-k}(TR - [k]) p_m = q^{-k}([m] - [k]) p_m = [m-k] p_m .$$

3) In [11] wurde für $q = 1$ die Formel

$$x^{2n} D^n = (x^2 D - (n-1)x)^n$$

bewiesen. Diese läßt sich sofort verallgemeinern zu

$$q^{n(n-1)} T^{2n} R^n = (T^2 R - [n-1] T)^n . \tag{33}$$

Denn wendet man beide Seiten auf p_m an, so ergibt sich

$$q^{n(n-1)} [m][m-1]\dots[m-n+1] =$$
$$= ([m] - [n-1]) \dots ([m+n-1] - [n-1]) .$$

Das ist aber wegen

$$q^{n-1} [m-i] = [m+n-i-1] - [n-1]$$

richtig. Das erste Reziprozitätsgesetz liefert nun sofort

$$q^{n(n-1)} T^n R^{2n} = (TR^2 - [n-1] R)^n . \tag{34}$$

Wendet man das zweite an, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$R^n T^{2n} = (q^{n-1} RT^2 + [n-1] T)^n .$$

Bemerkung: Erweitert man (23) auf ganze P', so haben dort Ausdrücke wie $\sum_0^\infty \frac{a_k}{[k]!} T^k$ einen Sinn. Man kann dann die zu den Sätzen aus § 2 reziproken Aussagen ableiten, wie das für $q = 1$ zum Teil in [8] gemacht wurde.

4. Allgemeine Entwicklungssätze

Die Identitäten $R^n T - T(qR)^n = [n] R^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sind äquivalent mit

$$e(Rz)\,T = T\,e(qRz) + z\,e(Rz).$$

Setzt man $\eta z^n = q^n z^n$, so folgt

$$e(Rz)\,T = (z + T\eta)\,e(Rz)$$

und schließlich

$$e(Rz)\,T^n = (z + T\eta)^n e(Rz) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k (T\eta)^{n-k} e(Rz).$$

Koeffizientenvergleich ergibt daraus

$$R^m T^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[m]!}{[m-k]!} q^{(n-k)(m-k)} T^{n-k} R^{m-k}. \tag{35}$$

Für $m = n$ ergibt sich speziell

$$R^n T^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2} T^k R^k. \tag{36}$$

Bemerkung: Da $(RTR)^n p_r = R^n T^n R^n p_r$ für alle r ist, erhalten wir

$$(RTR)^n = (R^n T^n) R^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2} T^k R^{k+n}.$$

Diese Formel hat in der Literatur einige Beachtung gefunden. Man vgl. etwa [1] und die dort zitierte Literatur. Geht man von $R^n T - T R^n = \varepsilon [n] R^{n-1}$ aus, so erhält man

$$e(Rz)\,T^n = (T + \varepsilon z)^n e(Rz) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} T^{n-k} \varepsilon^k z^k e(Rz).$$

Koeffizientenvergleich liefert hier

$$R^m T^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} T^{n-k} \varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k R^m = \sum_k \frac{1}{[k]!} \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^k T^n \varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k R^m,$$

oder allgemeiner

$$a(R) f(T) = \sum_k \frac{1}{[k]!} \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^k f(T)\,\varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k a(R). \tag{37}$$

Hier wurden mit $\frac{\partial}{\partial T}$ und $\frac{\partial}{\partial R}$ die q-Ableitungen nach T bzw. R bezeichnet.

In vielen Fällen läßt sich eine Identität $f(R, T) = 0$ am einfachsten dadurch beweisen, daß man $f(R, T)\, p_r = 0$ für alle $r = 0, 1, 2, \ldots$ nachweist. Da

$$\begin{aligned} T^n R^n p_r &= [r][r-1] \ldots [r-n+1]\, p_r = \\ &= q^{\binom{n}{2}} [r]([r]-[1]) \ldots ([r]-[n-1])\, p_r \end{aligned}$$

gilt, wird die Darstellung eines Polynoms p in der Gestalt

$$p(x) = \sum a_k (x)_k \text{ mit } (x)_k = (x - [1]) \ldots (x - [k-1])$$

eine große Rolle spielen. Für $q = 1$ sind das einfach die Polynome vom Binomialtyp zum Differenzenoperator

$$(\Delta p)(x) = p(x+1) - p(x).$$

Wir werden daher versuchen, eine Verallgemeinerung des Differenzenoperators auf $q \neq 1$ zu finden, welche $\Delta (x)_n = [n] (x)_{n-1}$ erfüllt. Eine naheliegende Definition ist

$$(\Delta p)([n]) = \frac{p([n+1]) - p([n])}{[n+1] - [n]}.$$

Dadurch ist Δ eindeutig festgelegt und erfüllt

$$(\Delta p)(x) = \frac{p(qx+1) - p(x)}{1 + (q-1)x}$$

oder kurz

$$\Delta = \frac{1}{(E - I)x}(E - I), \qquad \text{mit } (Ep)(x) = p(qx+1). \tag{38}$$

Man rechnet sofort nach, daß $\Delta\big(([r])_n\big) = [n]([r])_{n-1}$ für alle r und daher

$$\Delta (x)_n = [n] (x)_{n-1}$$

erfüllt ist.

Um den Operator T mit $T^n 1 = (x)_n$ zu finden, beachten wir, daß

$$T(1 + \Delta)(x)_n = (x)_{n+1} + [n](x)_n = (x - [n])(x)_n + [n](x)_n = x (x)_n$$

gilt. Daher ist $T(1 + \Delta) = x$ und somit

$$T = x \frac{1}{1 + \Delta}. \tag{39}$$

Ist p ein Polynom, dann gilt

$$p(x) = \sum_k \frac{(\Delta^k p)(0)}{[k]!} (x)_k,$$

weil $\{(x)_n\}$ eine Hauptfolge ist.

Beispiel: Sei $p(x) = (1 + (q-1)x)^n$. Dann ist $p([r]) = q^{rn}$ und $\Delta p([r]) = (q-1)[n]q^{r(n-1)}$ und daher

$$(\Delta p)(x) = (q-1)[n](1 + (q-1)x)^{n-1}.$$

Somit ist

$$(\Delta^k p)(0) = (q-1)^k [n][n-1] \ldots [n-k+1].$$

Daraus folgt

$$(1 + (q-1)x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q-1)^k (x)_k.$$

Daraus läßt sich sehr einfach eine explizite Formel für Δ^n ableiten:

$$q^{\binom{n}{2}} \Delta^n = \frac{1}{(1 + (q-1)x)^n} \prod_{k=0}^{n-1} (E - q^k). \tag{40}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für alle r gilt

$$q^{\binom{n}{2}} (1 + (q-1)x)^n \Delta^n (1 + (q-1)x)^r = \prod_{k=0}^{n-1} (E - q^k)(1 + (q-1)x)^r.$$

Das ist aber unmittelbar zu verifizieren.

Wir definieren nun die q-Stirlingzahlen erster Art $s(n, k)$ und zweiter Art $S(n, k)$ als Koeffizienten in den Identitäten

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k) x^k$$

und

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)(x)_k.$$

Diese wurden bereits von L. Carlitz [2] und Gould [7] studiert.

Aus der Definition ergeben sich sofort die Rekursionen

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - [n] s(n, k) \text{ und}$$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + [k] S(n, k),$$

sowie die Formel

$$S(n,k)=\frac{\Delta^k x^n}{[k]!}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{[k]!}\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{(1+(q-1)x)^k}\prod_{i=0}^{k-1}(E-q^i)x^n\bigg|_{x=0}=$$
$$=\left([k]!\,q^{\binom{k}{2}}\right)^{-1}\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}[k-i]^n$$

wegen (40), (8) und $(E^n p)(0)=p([n])$.

Für $q=1$ ist die umbral-inverse Folge zu $(x)_n$ die Folge der Exponentialpolynome $\varphi_n(x)=\sum S(n,k)x^k$ (vgl. [14], p. 747). Im allgemeinen Fall erweist es sich als zweckmäßiger, die Polynome

$$\varphi_n(x)=\sum S(n,k)\,q^{\binom{k}{2}}x^k$$

zu betrachten.

Aus der Rekursionsformel für die Stirlingzahlen ergibt sich dann sofort die Rekursionsformel

$$\varphi_{n+1}(x)=x(D+\varepsilon)\varphi_n(x)=x\varphi_n(qx)+x\varphi_n'(x).$$

Beachtet man, daß

$$x(D+\varepsilon)=\frac{1}{e(x)}(xD)\,e(x)$$

gilt, so ergibt sich schließlich

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{e(x)}(xD)^n e(x)=\frac{1}{e(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]^n x^k}{[k]!}.$$

Während der Operator T für die Folge $\{\varphi_n\}$ durch $T=x(\varepsilon+D)$ gegeben ist, konnte ich für den Operator R mit $R\varphi_n=[n]\varphi_{n-1}$ im Falle $q\neq 1$ bisher keine einfache Formel finden.

Aus diesen Ergebnissen folgen sofort die Operatoridentitäten

$$q^{\binom{n}{2}}T^n R^n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)(TR)^k \tag{41}$$

und

$$(TR)^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\,q^{\binom{k}{2}}T^k R^k. \tag{42}$$

Für $q=1$ findet man diese Ausdrücke z. B. in [12]. Auch die anderen dort angegebenen Formeln lassen sich auf den Fall $q\neq 1$ verallgemeinern. Da es mir hier aber hauptsächlich um Methoden zu tun ist, möchte ich nur ein weiteres Resultat erwähnen, von dessen Richtigkeit man sich durch Nachrechnen leicht überzeugen kann: Definiert man die q-Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}(D-\varepsilon)^n x^{n+\alpha} = x^{-\alpha}\frac{1}{e(-x)} D^n e(-x)\, x^{n+\alpha}$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} q^{k^2+\alpha k} \frac{[n]!}{[k]!} (-x)^k,$$

so sieht man, daß (36) eine Darstellung von $R^n T^n$ durch $L_n^{(0)}(x)$ gibt.

Das ist ein Spezialfall der etwas allgemeineren Formel

$$(R^l T^l)^{-1} R^{n+l} T^{n+l} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+l \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2+kl} T^k R^k,$$

in welcher die $L_n^{(l)}(x)$ auftreten. Für $q = 1$ stammt dieses Resultat von H. W. Gould und A. T. Hopper [8].

Literatur

[1] Al-Salam, W. A., und M. E. H. Ismail: Some operational formulas. J. Math. Anal. Appl. 51, 208—218 (1975).

[2] Carlitz, L.: q-Bernoulli numbers and polynomials. Duke Math. J. 15, 987—1000 (1948).

[3] Carlitz, L.: A q-identity. Mh. Math. 67, 305—310 (1963).

[4] Cigler, J.: Some remarks on Rota's umbral calculus. Indag. Math. 40, 27—42 (1978).

[5] Feinsilver, Ph. J.: Special Functions, Probability Semigroups, and Harmonic Flows. Lecture Notes Math. 696. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1978.

[6] Goldman, J., und G.-C. Rota: Finite vector spaces and Eulerian generating functions. Studies Appl. Math. 49, 239—258 (1970).

[7] Gould, H. W.: The q-Stirling numbers of first and second kinds. Duke Math. J. 28, 281—289 (1961).

[8] Gould, H. W., und A. T. Hopper: Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials. Duke Math. J. 29, 51—63 (1962).

[9] Hirschhorn, M. D.: Simple proofs of identities of MacMahon und Jacobi. Discrete Math. 16, 161—162 (1976).

[10] Kirschenhofer, P.: Beiträge zu Rota's Theorie der Sheffer- und Faktorfolgen. Dissertation. Wien. 1979.

[11] Klamkin, M. S., und D. J. Newman: On the reducibility of some linear differential operators. Amer. Math. Monthly 66, 293—295 (1959).

[12] Riordan, J.: Combinatorial Identities. New York—London: J. Wiley. 1968.

[13] Roman, S. M., und G.-C. Rota: The umbral calculus. Adv. Math. 27, 95—188 (1978).

[14] Rota, G.-C., D. Kahaner und A. Odlyzko: Finite operator calculus. J. Math. Anal. Appl. 42, 684—760 (1973).

Prof. Dr. J. Cigler
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien, Österreich