

Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktionen an ebenen Kurven mittels Deutung eines Kurven- parameters.

Von

Franz Wrtilek, Wien.

Mit 5 Abbildungen.

(Eingelangt am 2. Januar 1951.)

I. Einleitung.

Durch eine Parameterdarstellung einer ebenen Kurve c , $x = x(u)$, $y = y(u)$, werden den Punkten von c ein-eindeutig die u -Werte eines u -Intervalls zugeordnet. c wird dadurch eine „bezziferte“ oder „kotierte“ Kurve $c(u)$. Faßt man die Kurvenebene als Grundrißebene Π auf, so ist jeder Kurvenpunkt $P(u)$ der Grundriß eines Raumpunktes $P^r(u)$ mit der Höhenkote u , und $c(u)$ ist der kotierte Grundriß einer Raumkurve $c^r(u)$. Konstruiert man c in Π punktweise, indem man entsprechende Kurvenpaare zweier Systeme von Konstruktionslinien zum Schnitt bringt, so kann die Kotierung von c auf diese Konstruktionslinien übertragen werden. Dient etwa zur Konstruktion von c ein stetiges System \mathfrak{S} von Geraden g , die ein-eindeutig den Punkten $P(u)$ von c zugeordnet sind, so wird dadurch \mathfrak{S} zu einem System von bezifferten Geraden $g(u)$, das sich als kotierter Grundriß der zu Π parallelen Erzeugenden $g^r(u)$ einer Strahlfläche \mathfrak{S}^r auffassen läßt. Analog entsteht aus einem stetigen System \mathfrak{K} von Kreisen k , die ein-eindeutig den Punkten $P(u)$ von c zugeordnet sind, ein System von bezifferten Kreisen $k(u)$, das als kotierter Grundriß der zu π parallelen Schichtenkreise $k^r(u)$ einer zyklischen Fläche \mathfrak{K}^r gedeutet werden kann. Allgemein erhält man durch Kotierung der beiden Scharen von Konstruktionslinien für die Kurve c in Π zwei nach den Werten von u bezifferte Kurvenscharen, die als Grundrisse der Schichtenlinien zweier Flächen Φ , Ψ aufgefaßt werden können. Die Schnittkurve von Φ und Ψ ist die der ebenen Kurve $c(u)$ zugeordnete Raumkurve $c^r(u)$.

Ermittelt man die Tangente in einem Punkt $P^r(u)$ von $c^r(u)$ als Schnittlinie der Tangentialebenen an Φ und Ψ in $P^r(u)$, so läßt sich durch entsprechende Deutung der Konstruktionslinien im Grundriß eine planimetrische Tangentenkonstruktion für $c(u)$ in $P(u)$ gewinnen. Aus der Konstruktionsvorschrift für c kann also auf dem Wege über die zugehörige Raumkurve c^r eine Tangentenkonstruktion für die ebene Kurve c abgeleitet werden¹. Die Kurve $c^r(u)$ läßt sich auch zur Ermittlung der Krümmungskreise von $c(u)$ verwenden, indem man das System der nach u bezifferten Normalen $n(u)$ von $c(u)$ als kotierten Grundriß des Strahlensystems aller zu Π parallelen Normalen von $c^r(u)$ deutet. Die Strahlfläche Θ dieser Geraden $n^r(u)$ ist die *Planierungsfläche*² der Raumkurve $c^r(u)$. Der scheinbare Umriß von Θ auf Π , für die zu Π normale Sehstrahlenrichtung, ist die Hüllkurve aller Normalen von $c(u)$, also die Evolute von $c(u)$. Als Anwendungsbeispiel soll im folgenden (Abschnitt II) die Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktion einer Parabel gezeigt werden.

Eine andere nützliche Deutung des Parameters u besteht darin, ihn als Zeit aufzufassen. $P(u)$ bedeutet dann, daß ein die Kurve $c(u)$ beschreibender Punkt P sich im Zeitpunkt u in $P(u)$ befindet. Durch die aufeinanderfolgenden Differentiationen nach u können der Kurve $c(u)$ neue Kurven, ihre *Ableitungskurven*, zugeordnet werden. Trägt man von den Punkten $P(u)$ aus auf den Tangenten von $c(u)$ die zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren ab, dann erfüllen ihre Endpunkte eine Kurve $\dot{c}(u)$, die als *erste abgeleitete Kurve von $c(u)$* bezeichnet werden möge. In der technischen Kinematik wird die so definierte Kurve $\dot{c}(u)$ der *lokale Hodograph* von $c(u)$ genannt³. Analog möge der lokale Hodograph von $\dot{c}(u)$ als *zweite abgeleitete Kurve von $c(u)$* eingeführt werden usw. Der Kurve $c(u)$ und ihren abgeleiteten Kurven lassen sich durch die erste Deutung von u als Höhenkote wieder Raumkurven zuordnen. In den Abschnitten III bis V der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß die so gewonnenen Raumfiguren ebenfalls eine lohnende Verwertung zur Ermittlung der Krümmungskreise von

¹ Die Grundidee, die Tangentenkonstruktion einer ebenen Kurve aus ihren Konstruktionslinien abzuleiten, geht auf *G. Persone*, gen. *Roberval* (1602—1675) zurück. Vgl. *Duhamel*, Sur la méthode des tangentes de Roberval, Mém. des sav. étrangers 5, 1834. — *R. Beyer*, Techn. Kinematik, Leipzig 1931, S. 171.

² Vgl. *E. Müller-E. Kruppa*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 5. Aufl., Wien 1948, S. 90.

³ *R. Beyer*, a. a. O., S. 61 und S. 184.

$c(u)$ gestatten. Die erste Methode zur Ermittlung der Krümmungskreise einer kotierten Kurve $c(u)$ beruht also auf der Umrißbestimmung der Planierungsfläche ihrer zugeordneten Raumkurve $c'(u)$. Ein zweites Verfahren läßt sich mittels der räumlich gedeuteten Ableitungskurven entwickeln.

Da bei beiden Methoden öfters die Aufgabe auftreten wird, die Berührebene in einem Punkt einer Strahlfläche zu konstruieren, deren Erzeugende zur Zeichenebene parallel sind, möge ihre Konstruktion in Abb. 1 ein für allemal besprochen werden.

Es wird angenommen, daß die Berührebenen α und β der Punkte A und B der Erzeugenden $e(\parallel II)$ bekannt sind; a und $b(\parallel e)$ seien ihre Spuren in II oder in einer zu II parallelen Ebene. Nach einem allgemeinen Satz aus der Theorie der Strahlfläche ist die Punktreihe (A, B, C, D, \dots) von e projektiv zum Ebenenbüschel $e(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$ der zugehörigen Tangentialebenen (Satz von der Chasles'schen Berührungskorrelation)⁴. Sind c und d die C, D entsprechenden Tangentialspuren, dann gilt im Grundriß die Doppelverhältnisgleichheit

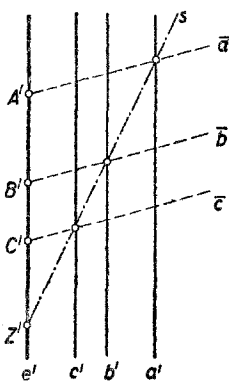


Abb. 1.

$$(A' B' C' D') = (a' b' c' d'). \tag{1}$$

Bei der vorliegenden konoidalen Fläche mit der Richtebene II entspricht dem Fernpunkt D_∞ von e die Ferngerade d_∞ von II als Spur der zugehörigen Tangentialebene (asymptotische Ebene). Daher reduziert sich (1) auf die Teilverhältnisgleichheit

$$(A' B' C') = (a' b' c'). \tag{2}$$

Legt man also durch A', B', \dots ein beliebiges Parallelstrahlbüschel \bar{a}, \bar{b}, \dots , dann schneiden entsprechende Strahlen der beiden Büschel einander auf einer Perspektivitätsachse s , mit deren Hilfe die Berührungskorrelation längs e vervollständigt werden kann. Insbesondere entspricht der zu II normalen Ebene durch e (Zentralebene) mit der Spur e' der Berührungspunkt Z (Zentralpunkt), dessen Grundriß der Schnittpunkt $Z' = [e' s]$ ist.

⁴ *M. Chasles*, *Corr. math.* XI (Quetelet) 1839, no 4. Im wesentlichen war dieser Satz bereits *J. N. P. Hachette* bekannt. *Traité de géométrie descr.*, 2. Aufl., 1828, p. 95.

II. Krümmungskreise der Parabel.

Abb. 2 zeigt die Konstruktion einer Parabel $c(u)$ aus der Leitlinie l und dem Brennpunkt F . Hierzu wurden die Parallelen zu l im Abstand u ($u = 0, 1, 2, \dots$) mit den Kreisen um F vom Radius u geschnitten.

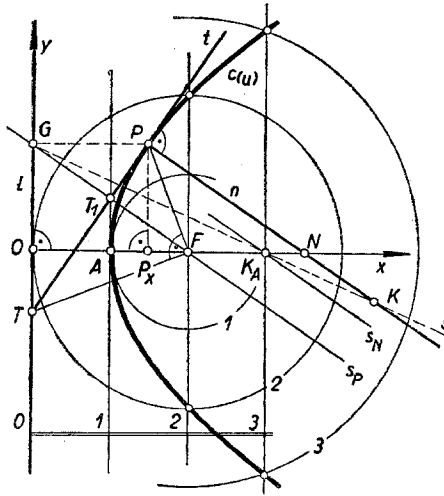


Abb. 2.

Als Einheit wurde der halbe Parameter $p/2$ gewählt. Deutet man u gemäß I als Höhenkote, so stellen diese Konstruktionslinien die Schichtenlinien einer Ebene Φ mit der Spur $l(0)$ und der Böschung $1:1$, sowie eines Drehkegels Ψ gleicher Böschung mit der Spitze $F(0)$ dar. Die c entsprechende Raumkurve c^r ist also ebenfalls eine Parabel. Um die Tangente t^r in einem Punkt P^r zu erhalten, hat man die Tangentialebene von Ψ längs der Erzeugenden $[FP^r]$ mit der Ebene Φ zu schneiden. Die Normale in F zu $[FP]$ ist die Spur dieser Tangentialebene und trifft l im Spurpunkt T der Tangente t^r . Somit ist $t = [TP]$ die Tangente von c in P .

Zur Untersuchung der Planierungsfläche Θ von c^r möge ein rechtwinkliges Achsenkreuz $O(x, y, z)$ mit der Parabelachse als x -Achse und der Leitlinie l als y -Achse zugrundegelegt werden. Ist P_x die Projektion von P auf x , so durchlaufen die Raumpunkte P_x^r in der Ebene Φ die Fallinie $f^r(x = u, y = 0, z = u)$. Da die Subnormale $P_x N$ einer Parabel gleich dem Parameter p ist, beschreiben die Raumpunkte N^r die Gerade $f_1^r(x = u + p, y = 0, z = u)$. Diese Gerade f_1^r in der Θ

die xz -Ebene schneidet, ist also die Parallele durch F zur Falllinie f' . Die Erzeugenden von Θ verbinden die Punkte der Parabel c' mit den gleichhohen Punkten von f'_1 , und zwar gehen für $u > 1$ durch jeden Punkt von f'_1 zwei Erzeugende. Sie fallen für $u = 1$, d. h. für den Scheitel A' der Parabel c' zusammen, so daß der mit A' in gleicher Höhe liegende Punkt K'_A auf f'_1 Kuspidalpunkt von Θ ist. Sein Grundriß K_A ist daher die Krümmungsmitte des Scheitels A der Parabel c , und es ist $AF = FK_A$.

Der scheinbare Umriß von Θ auf Π ist nach I die Evolute von c . Bestimmt man also für die lotrechte Ebene durch n' den zugehörigen Berührungspunkt K' (Zentralpunkt), dann ist sein Grundriß K der P entsprechende Krümmungsmittelpunkt von c . K läßt sich demnach (Abb. 2) nach dem in I, Abb. 1 erläuterten Verfahren leicht ermitteln, wobei jetzt die Zeichenebene in die Schichtenebene Π_1 (1) verlegt werden möge. Ist T_1 der Schnittpunkt der Parabeltangente t mit der Scheiteltangente, so ist $[T_1 F] = s_P$ die Spur der Berührebene der Planierungsfläche Θ in P' . Ihre Berührebene in N' wird von der Erzeugenden n' und von f'_1 aufgespannt. Die Spur s_N dieser Berührebene geht daher durch K_A und ist zu n parallel. Wählt man nun als die Richtung der in Abb. 1 mit \bar{a} , \bar{b} bezeichneten Parallelen die Richtung der x -Achse, so ergibt sich als Perspektivitätsachse die Gerade $s = [GK_A]$, wenn G den zu t gehörigen Gegenpunkt auf der Leitlinie bedeutet. Der Schnittpunkt $K = [sn]$ ist dann die gesuchte Krümmungsmitte. Somit gilt der bisher scheinbar nicht bekannte

Satz 1: Die einem Parabelpunkt P entsprechende Krümmungsmitte K liegt auf der Verbindungsgeraden des Gegenpunktes G von P mit der Krümmungsmitte des Parabelscheitels.

III. Die abgeleiteten Kurven.

In Abb. 3 sei $c(u)$ eine in der Zeichenebene Π liegende und jetzt nach den Werten der Zeit u bezifferte ebene Kurve. Trägt man über jedem Punkt $P(u)$ von $c(u)$ den Wert von u als Höhe über Π auf, dann erhält man die zugeordnete Raumkurve $c'(u)$.⁵ Wir nehmen nun vorüber-

⁵ Ist bereits $c(u)$ eine Raumkurve, dann entspricht ihr eine Kurve $c'(u)$ des vierdimensionalen Raumes, die nach *H. Minkowski* eine *Weltlinie* genannt wird (Ges. Abh., Bd. II, XXXII, Raum und Zeit, S. 432). Die obige Kurve $c'(u)$ ist ein Sonderfall einer solchen Weltlinie, bei dem $c(u)$ eben ist. Auf die Verwertbarkeit dieser speziellen Weltlinie, insbesondere zur Lösung von Bewegungsaufgaben, hat *W. Wunderlich* hingewiesen. (Über fünf Aufgaben der Seetaktik, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht LXXII, Heft 4, S. 97–102).

gehend an, ein die Kurve $c(u)$ beschreibender Punkt P möge sich von der Stelle $P = P(u)$ an in Richtung der Tangente $t(u)$ geradlinig mit

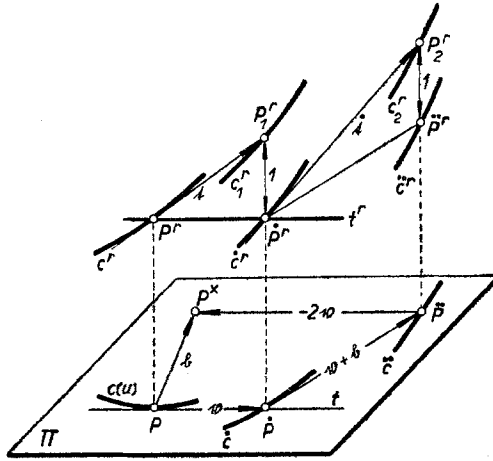


Abb. 3.

der in $P(u)$ erreichten Momentangeschwindigkeit $v(u)$ weiterbewegen. Nach Ablauf einer Zeiteinheit wäre $P(u)$ dann im Endpunkt $\dot{P}(u)$ des von $P(u)$ ausgehenden Geschwindigkeitsvektors $v(u)$ angekommen. Trägt man über allen Punkten der Strecke $P\dot{P}$ wieder die u -Werte als Höhen auf, dann entspricht der orientierten Strecke $v(u) = \overrightarrow{P\dot{P}}$ in Π ein orientiertes Tangentenstück $t = \overrightarrow{P^r P_1^r}$ der Raumkurve $c^r(u)$, dessen Endpunkt P_1^r um eine Höheneinheit oberhalb P^r liegt. t soll der *Tangentenpfeil* von c^r in P^r genannt werden. Dann gilt der

Satz 2: Der Grundriß des Tangentenpfeiles $t(u)$ der Raumkurve $c^r(u)$ in $P^r(u)$ ist der Geschwindigkeitsvektor $v(u)$ von $c(u)$ in $P(u)$. Umgekehrt kann jeder Geschwindigkeitsvektor von $c(u)$ als Grundriß eines Tangentenpfeiles von $c^r(u)$ gedeutet werden.

Da die Aufsuchung des Geschwindigkeitsvektors auf analytischem Wege eine einmalige Differentiation nach u erfordert, soll der Endpunkt $\dot{P}(u)$ des von $P(u)$ ausgehenden Vektors $v(u)$ der *erste abgeleitete Punkt* von $P(u)$ genannt werden. Dementsprechend soll die Ortskurve aller $\dot{P}(u)$ bei variablem u , also der lokale Hodograph von $c(u)$ (vgl. I), die *erste abgeleitete Kurve* $\dot{c}(u)$ von $c(u)$ heißen. Bezeichnet man die Kurve, auf der die Endpunkte $P_1^r(u)$ aller Tangentenpfeile von $c^r(u)$ liegen, mit $c_1^r(u)$, dann ist $\dot{c}(u)$ nach Satz 2 der Grundriß von $c_1^r(u)$.

Auch $\dot{c}(u)$ ist eine nach u bezifferte Kurve. Ihre zugeordnete Raumkurve $\dot{c}^r(u)$ ergibt sich aus $c_1^r(u)$ durch eine Abwärtsschiebung um eine Höheneinheit in Richtung der zu Π normalen Sehstrahlen.

Der Satz 2 beinhaltet die Möglichkeit, den Ableitungsprozeß auf synthetischem Wege durchzuführen. Dies geschieht durch folgende *Ableitungskonstruktion*. Für die ebene Kurve $c(u)$ sei die Bezifferung nach u bekannt; ferner seien zwei Scharen von Konstruktionslinien gegeben, die die punktweise Konstruktion von $c(u)$ gestatten. Überträgt man die Bezifferung auf die Konstruktionslinien, dann können sie als die Grundrisse der Schichtenlinien zweier Flächen Φ, Ψ gedeutet werden, deren Schnittkurve die Raumkurve $c^r(u)$ ist (vgl. I). Um den Endpunkt P_1^r des von P^r ausgehenden Tangentenpfeiles t (Abb. 3) zu erhalten, bringt man die Spuren f_1^r, g_1^r der beiden Tangentialebenen in P^r an Φ und Ψ auf der um eins oberhalb P^r liegenden Schichtenebene zum Schnitt. Ihre Grundrisse $f(u), g(u)$ schneiden einander im ersten abgeleiteten Punkt $\dot{P}(u)$ von $P(u)$. Trägt man wieder u als Höhe über π auf, dann erhält man die zugeordneten Raumgeraden $f^r(u), g^r(u)$ von $f(u), g(u)$. Sie liegen um eine Höheneinheit unterhalb $f_1^r(u), g_1^r(u)$. Bei variablem u beschreiben $f^r(u)$ und $g^r(u)$ zwei Strahlflächen $\dot{\Phi}$ und $\dot{\Psi}$, deren Schnittkurve die der ersten abgeleiteten Kurve $\dot{c}(u)$ zugeordnete Raumkurve ist. *Aus den Konstruktionslinien für die ebene Kurve $c(u)$ lassen sich auf dem Wege über die Flächen Φ, Ψ und $\dot{\Phi}, \dot{\Psi}$ demnach die Konstruktionslinien $f(u), g(u)$ für die abgeleitete Kurve $\dot{c}(u)$ gewinnen.* Das hier entwickelte Verfahren gehört also zu jenen Konstruktionen, die als „geometrische Differentiation“ oder „Ableitungskonstruktion“ bezeichnet werden⁶.

Es ist leicht einzusehen, wie die höheren abgeleiteten Kurven gewonnen werden können. Die Endpunkte $P_2^r(u)$ der Tangentenpfeile $\dot{t}(u)$ der $\dot{c}(u)$ zugeordneten Raumkurve $\dot{c}^r(u)$ erfüllen eine Kurve $c_2^r(u)$, deren Grundriß die *zweite abgeleitete Kurve* $\ddot{c}(u)$ von $c(u)$ heißen

⁶ Das Wesentliche darüber enthält eine Abhandlung von R. v. Mises: Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 52/1905, S. 44–85. Weitere hierher gehörige Arbeiten sind: G. Peano, Applicazioni del calcolo infinitesimale, Torino 1887. — J. Petersen (Hjeilmslev), Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelse paa Laeren om variable Figurer. Inauguraldiss. Kjöb 1897. (Deutsche Besprechung im Jahrb. über d. Fortschritte d. Math., Bd. 42/1897, S. 505f.). — A. Kanda, Beiträge zur reinen Differentialgeometrie, Monatsh. f. Math. u. Phys., XXIV/1913, S. 33–64.

möge. \ddot{c} ist der lokale Hodograph von \dot{c} . Die \ddot{c} zugeordnete Raumkurve \dot{c}^r entsteht aus c^r durch Abwärtsschiebung um eine Höheneinheit. Die Bedeutung von $\ddot{c}(u)$, bzw. des zweiten abgeleiteten Punktes $\ddot{P}(u)$ von $c(u)$, d. h. des Grundrisses von $P_2^r(u)$, soll nun analytisch untersucht werden. Hiezu sei die Parameterdarstellung von $c(u)$ als bekannt vorausgesetzt:

$$c(u): \quad x = x(u), \quad y = y(u). \quad (3)$$

Die Kurven c^r , \dot{c} und \dot{c}^r haben dann folgende Parameterdarstellungen:

$$c^r(u): \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = u, \quad (4)$$

$$\dot{c}(u): \quad x = x(u) + \dot{x}(u), \quad y = y(u) + \dot{y}(u), \quad (5)$$

$$\dot{c}^r(u): \quad x = x(u) + \dot{x}(u), \quad y = y(u) + \dot{y}(u), \quad z = u. \quad (6)$$

Die Koordinaten des Tangentenpfeiles $\dot{t} = \overrightarrow{P^r P_2^r}$ der Kurve \dot{c}^r erhält man durch Differentiation von (6) nach u :

$$\dot{t} = (\dot{x}(u) + \ddot{x}(u), \dot{y}(u) + \ddot{y}(u), 1). \quad (7)$$

Aus (5), (6), (7) folgt dann leicht der

Satz 3: Der Grundriß $\overrightarrow{P P}$ des Tangentenpfeiles \dot{t} der Raumkurve \dot{c}^r ist gleich der vektoriellen Summe aus dem Geschwindigkeitsvektor v und dem Beschleunigungsvektor b von $c(u)$ in $P(u)$.

Macht man also (Abb. 3) im Grundriß $\overrightarrow{P P^*} = -2v$, so ist $\overrightarrow{P P^*}$ der Beschleunigungsvektor b in $P(u)$.

IV. Die Krümmungskreise einer kotierten Kurve.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie aus dem Kurvenpunkt P und seinen beiden abgeleiteten Punkten \dot{P} , \ddot{P} (Abb. 4) der Krümmungskreis für die ebene Kurve c in P konstruiert werden kann. Hiezu sei zunächst die Krümmungskreisconstruction von *Nikolaides*⁷ als bekannt vorausgesetzt. Sie lautet: „Trägt man auf sämtlichen Tangenten t einer ebenen Kurve c von den Berührungspunkten P aus eine konstante Strecke l ab, so bilden die Endpunkte Q dieser Strecken eine Äquitangetialkurve q von c ; entsprechende Normalen n und n_q von c in P und q in Q schneiden einander in der Krümmungsmittle K von P .“

⁷ Nouv. Ann. Math. (2) 5 (1866), S. 383. Vgl. auch *E. Müller-E. Kruppa*, Lehrb. der darst. Geom., Wien 1948, 5. Aufl., S. 32.

Diese Konstruktion wird meist als Näherungskonstruktion angewendet, indem man die Tangente t_q in Q durch Anlegen ermittelt. Durch räumliche Deutung von q soll hier t_q und damit n_q exakt konstruiert werden.

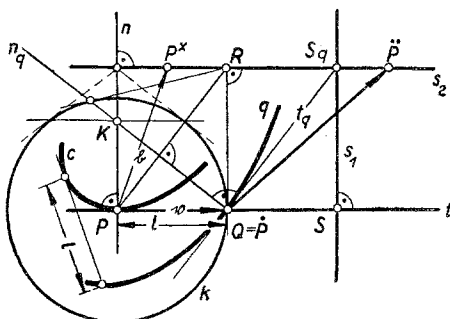


Abb. 4.

In Abb. 4 wurde l so gewählt, daß die Äquitangentialkurve q durch den ersten abgeleiteten Punkt \dot{P} desjenigen Punktes P geht, für den die Krümmungsmitte K konstruiert werden soll. An dieser einen Stelle ist also $Q = \dot{P}$. Nun mögen die Tangenten $t(u)$ von $c(u)$ und die Kreise $k(u) = (P; l)$ wieder räumlich gedeutet werden. Die Geraden $t(u)$ sind dann die Grundrisse der horizontalen Erzeugenden $t^r(u) = [P^r \dot{P}^r]$ (vgl. Abb. 3) einer Strahlfläche F . Diese ist durch die Leitkurven c^r, \dot{c}^r und die Richtebene Π bestimmt. Den Kreisen $k(u)$ entspricht eine zyklische Schiebfläche Σ mit zu Π parallelen Schichtenkreisen $k^r(u)$ von konstantem Radius l . Die Mitten dieser Kreise liegen auf der Mittenkurve c^r . Der Äquitangentialkurve q ist im Raum die Schnittkurve $q^r = [F \Sigma]$ zugeordnet. Die Tangente an diese Kurve soll nun als Schnittgerade der Tangentialebenen in Q^r an F und Σ ermittelt werden. Da Σ aus $k^r(u)$ durch die krumme Schiebung längs c^r entsteht, erhält Σ die Kurve s^r , die aus c^r durch die Parallelverschiebung mit der Schieb-
strecke \overrightarrow{PQ} entsteht. Durch diese geht der Tangentenpfeil $\overrightarrow{P^r P_1^r}$ in den Tangentenpfeil $\overrightarrow{Q^r S_1^r}$ von s^r in Q^r über. Sein Grundriß ist somit $QS = PQ$ auf t . F geht durch \dot{c}^r mit dem Tangentenpfeil t , dessen Grundriß $\overrightarrow{\dot{P}\dot{P}}$ ist. Legt man nun in Π die Normale s_1 zu t durch S und die Parallele s_2 zu t durch \dot{P} , so sind s_1, s_2 die Grundrisse der Spuren s_1^r, s_2^r der Berührebenen im Punkt Q^r der Flächen Σ , bzw. F in der zu Π parallelen

Ebene, die um eine Höheneinheit oberhalb P^r liegt. Die beiden Berührebenen schneiden sich in der gesuchten Tangente der der Äquitangentalkurve q zugeordneten Raumkurve q^r . Der Tangentenpfeil von q^r in Q^r verbindet Q^r mit dem Schnittpunkt $[s_1^r s_2^r]$; sein Grundriß ist $Q S_q$, wenn $S_q = [s_1 s_2]$ ist. Macht man auf s_2 die Strecke $\overrightarrow{S_q R} = \overrightarrow{S_q Q}$, so ist $[P R] // [Q S_q]$ und daher normal zu n_q . Also ist n_q die Polare von R in bezug auf k und somit der Krümmungsmittelpunkt $K = [nm_q]$ der Pol von s_2 bezüglich k . Es gilt daher der

*Satz 4: Ist $P(u)$ ein beliebiger Punkt der kotierten Kurve $c(u)$, und sind $\dot{P}(u)$, $\ddot{P}(u)$ die zugehörigen abgeleiteten Punkte, so ist die Krümmungsmitte K von c in P der Pol der Parallelen s_2 durch \ddot{P} zur Tangente $t = [P \dot{P}]$ bezüglich des Kreises k mit der Mitte P und dem Radius PP^s .*⁸

Im folgenden wird eine Anwendung für III und IV gegeben.

V. Die Krümmungskreise der Rastpolbahn einer Schubkurbelbewegung.

Die konstante Strecke AB (Abb. 5) möge sich so bewegen, daß A den Kreis $a = (O; r)$ mit konstanter Geschwindigkeit $v = A \dot{A}$ durchläuft, während B auf der Geraden b gleitet. Eine derartige Bewegung wird als Schubkurbelbewegung bezeichnet. Aus der ebenen Kinematik ist bekannt:

„In jedem Zeitpunkt gehen die Normalen sämtlicher Bahnkurven einer ebenen Bewegung durch einen festen Punkt P , den zu diesem Zeitpunkt gehörigen Momentanpol. Eine Bewegung der Ebene in sich kann in jedem Zeitpunkt durch eine Momentandrehung um den Momentanpol P ersetzt werden, wobei die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte ihren Entfernungen von P proportional sind.“ Demnach erhält man den zu einer bestimmten Lage von AB gehörigen Momentanpol P als Schnittpunkt von $e = [OA]$ mit der Normalen f in B zu b . Ferner ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{B \dot{B}}$ aus $\overrightarrow{A \dot{A}}$, indem man $\triangle P B \dot{B} \sim \triangle P A \dot{A}$ macht. Daraus folgt, daß man \dot{B} auch wie folgt erhalten kann: \dot{A} wird um A durch -90° nach V auf e gedreht; die

⁸ Zu ähnlichen Konstruktionen gelangten bereits *R. v. Mises* (a. a. O., S. 68, Fig. 13) und *A. Kanda* (a. a. O., S. 44, Fig. 8). Ein Dreieck wie $P\dot{P}P^\times$ in den obigen Figuren 3 und 4 nennt *A. Kanda* ein Krümmungsdreieck. Die in Satz 4 festgelegte Konstruktion wurde erstmalig von *R. Bereis* auf rechnerischem Wege gefunden. (Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen; erscheint demnächst im Österr. Ing. Archiv.)

Parallele zu $[A B]$ durch V wird mit f in W geschnitten; hierauf dreht man W um B durch $+90^\circ$ nach \dot{B} .⁹

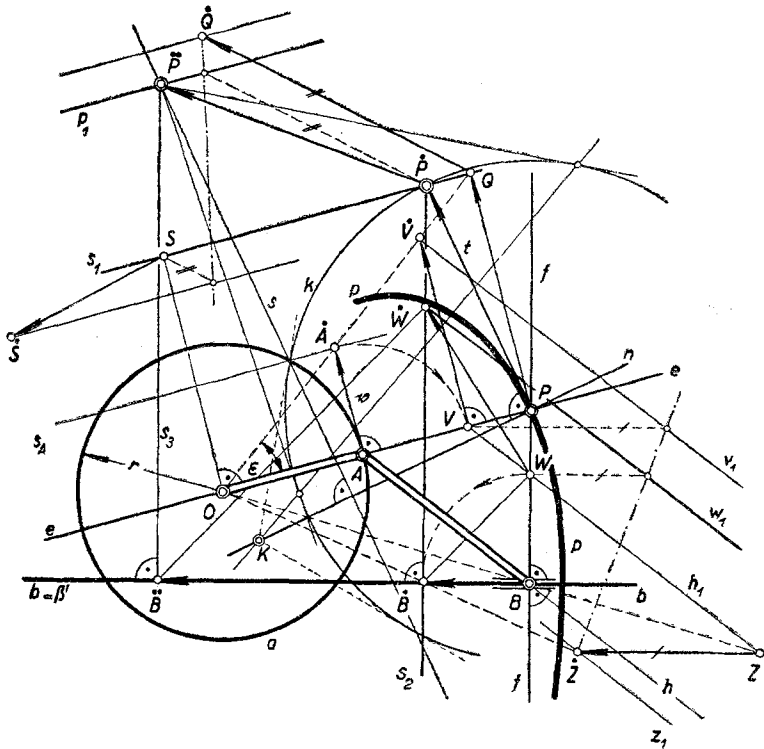


Abb. 5.

Für die Ortskurve p aller Momentanpole P , die sogenannte Rastpolbahn der Bewegung, soll nun die Tangente in P und der Krümmungsmittelpunkt K konstruiert werden. Hierzu betrachten wir wieder die den kotierten Bahnkurven $a(u)$ und $b(u)$ zugeordneten Raumkurven $a^r(u)$, $b^r(u)$. Die Raumkurve $a^r(u)$ ist nach der obigen Annahme von $v = \overrightarrow{AA} = \text{const.}$ eine Schraublinie. $b^r(u)$ ist die Schnittkurve der projizierenden Ebene β durch b mit der zyklischen Schiebfläche Σ , deren zu H parallele Schichtenkreise den konstanten Radius AB haben und deren Mittelpunkte A^r die Kurve $a^r(u)$ durchlaufen. Den radial verlaufenden Geraden $e(u)$ entsprechen im Raum die Erzeugenden

⁹ Vgl. etwa *R. Beyer*, a. a. O., S. 188.

$e^r(u)$ einer Wendelfläche Φ durch a^r , deren Achse die Normale o zu II in O ist. Endlich entsprechen den zu $b(u)$ normalen Geraden $f(u)=[BP]$ im Raum die Erzeugenden $f^r(u)$ eines Zylinders Ψ mit der Basiskurve $b^r(u)$. Die der Rastpolbahn $p(u)$ zugeordnete Raumkurve $p^r(u)$ ist dann die Schnittkurve der Wendelfläche Φ mit dem Zylinder Ψ . Der Tangentenpfeil von p^r in P^r soll nun ermittelt werden.

Hiezu sei daran erinnert, daß nach III, Satz 2, die Geschwindigkeitsvektoren $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ als Grundrisse der Tangentenpfeile von a^r, b^r in A^r, B^r angesehen werden können. Wählt man also die Bildebene II derart, daß die Punkte A^r, B^r die Höhenkote $u = -1$ besitzen, dann fallen die Endpunkte A_1^r, B_1^r der Tangentenpfeile in die Ebene II hinein und mit den abgeleiteten Punkten \dot{A}, \dot{B} zusammen. Die Berührungskorrelation der Wendelfläche Φ längs der Erzeugenden e^r ist durch O^r als Zentralpunkt und den Tangentenpfeil $\overrightarrow{A^r\dot{A}}$ bestimmt. Die Parallele s_A durch \dot{A} zu e ist die Spur der Tangentialebene an Φ in A^r . Ermittelt man nun Q derart, daß die Dreiecke OPQ und $OA\dot{A}$ ähnlich sind, so ist die Parallele s_1 durch Q zu e die P^r entsprechende Tangentialspur, da durch diese Konstruktion die nach I, Fig. 1, erforderliche Teilverhältnisgleichheit $(OA\dot{A}) = (e s_A s_1)$ erfüllt ist. Die Spur s_2 der Tangentialebene des Zylinders Ψ längs der Erzeugenden $f^r = [B^r P^r]$ ist die Parallele zu f durch \dot{B} . $\dot{P} = [s_1 s_2]$ ist dann der Endpunkt des von P^r ausgehenden Tangentenpfeiles von p^r und zugleich der erste abgeleitete Punkt von P . Somit ist $t = [P\dot{P}]$ die Tangente von p in P .

Nun soll die zu P gehörige Krümmungsmitte K von p ermittelt werden. Hiezu hat man nach III den zweiten abgeleiteten Punkt \ddot{P} zu konstruieren, um dann IV, Satz 4, anwenden zu können. Zur Ermittlung von \ddot{P} gehen wir von den Punkten $\dot{A}, \dot{B}, \dot{P}$ zu den Punkten $\dot{A}^r, \dot{B}^r, \dot{P}^r$ über, die die Höhe $u = -1$ besitzen und mit A^r, B^r, P^r in gleicher Höhe liegen. Den Spuren s_1, s_2 , als Konstruktionslinien für \dot{P} aufgefaßt, entsprechen die um eine Höheneinheit tiefer liegenden Raumgeraden s_1^r, s_2^r , deren Schnittpunkt \dot{P}^r ist. Die Gesamtheit aller Geraden $s_1^r(u)$ bildet bei variablem u eine Strahlfläche $\dot{\Phi}$; sämtliche $s_2^r(u)$ erfüllen einen Zylinder $\dot{\Psi}$. Die Schnittkurve $[\dot{\Phi}\dot{\Psi}]$ ist die der ersten abgeleiteten Kurve $\dot{p}(u)$ zugeordnete Raumkurve $\dot{p}^r(u)$, die Ortskurve aller Punkte $\dot{P}^r(u)$. Der Endpunkt des Tangentenpfeiles von $\dot{p}^r(u)$ in \dot{P}^r ist bei

der getroffenen Wahl der Bildebene der gesuchte zweite abgeleitete Punkt \ddot{P} .

Um auf diesem Wege \ddot{P} zu konstruieren, stellen wir die folgenden Überlegungen an. Die Gerade s_1 ist durch den früher verwendeten Punkt Q und die vierte Ecke S des Rechtecks $OPQS$ festgelegt; die Raumpunkte Q^r, S^r liegen in gleicher Höhe mit A^r, B^r, P^r . Da mit $v = \overrightarrow{A\dot{A}}$ auch der Winkel $\varepsilon = \sphericalangle \dot{A}OA$ konstant bleibt, erhält man die Ortskurve q^r von Q^r aus p^r durch eine *achsiale Drehstreckung*¹⁰, um die Normale o in O zu II mit dem konstanten Drehwinkel ε und dem konstanten Streckungsverhältnis $O^r P^r : O^r Q^r = \cos \varepsilon$. Ebenso ist $O^r P^r : O^r S^r = \cot \varepsilon$ konstant, und die Ortskurve s^r aller S^r entsteht aus p^r ebenfalls durch eine achsiale Drehstreckung um o . Diese Drehstreckungen führen den Tangentenpfeil $\overrightarrow{P^r\dot{P}}$ von p^r in die Tangentenpfeile $\overrightarrow{Q^r\dot{Q}}$ und $\overrightarrow{S^r\dot{S}}$ von q^r und s^r über, weshalb man im Grundriß $\triangle OP\dot{P} \sim \triangle OQ\dot{Q}$ und $\triangle OP\dot{P} \sim \triangle OS\dot{S}$ zu machen hat. Durch $\overrightarrow{Q^r\dot{Q}}$ und $\overrightarrow{S^r\dot{S}}$ ist die Berührungskorrelation von $\dot{\Phi}$ längs s_1^r festgelegt. Nach I, Fig. 1, erhält man die Spur p_1 der Tangentialebene von $\dot{\Phi}$ in P^r und damit einen ersten geometrischen Ort für \ddot{P} .

Nun ist noch die Tangentialebene des Zylinders $\dot{\Psi}$ in P^r zu ermitteln. Hiezu seien v^r, w^r die Ortskurven der Raumpunkte V^r, W^r , die den früher zur Konstruktion von \dot{B} verwendeten Punkten V, W entsprechen. Die Strahlfläche A_1 der Geraden $h_1^r = [V^r W^r]$ entsteht aus der Strahlfläche A mit den Erzeugenden $h^r = [A^r B^r]$ durch achsiale Streckung aus o im konstanten Verhältnis $O^r A^r : O^r V^r = r : (r + v)$, wobei A^r in V^r und B^r in Z^r übergeht. Durch dieselbe Streckung erhält man aus $\overrightarrow{A^r\dot{A}}, \overrightarrow{B^r\dot{B}}$ die Tangentenpfeile $\overrightarrow{V^r\dot{V}}$ und $\overrightarrow{Z^r\dot{Z}}$. Letztere legen die Berührungskorrelation der Fläche A_1 längs h_1^r fest. Nach I, Fig. 1, erhält man die W^r entsprechende Tangentialspur w_1 . Der Punkt W^r liegt aber auch auf der durch B^r gehenden Erzeugenden f^r des Zylinders Ψ . Schneidet man daher die Spur s_2 der Tangentialebene von Ψ längs f^r mit w_1 , so ist $\dot{W} = [s_2 w_1]$ der Tangentenspurpunkt von w^r in W^r . Die Basiskurve \dot{b}^r des Zylinders $\dot{\Psi}$, mit den Erzeugenden s_2^r , entsteht

¹⁰ Diese windschiefen Affinitäten wurden von E. Müller achsiale Drehstreckungen genannt. (Die achsiale Inversion. Jahresber. der DMV, XXV/1916, S. 212.)

aus der Kurve w^r durch Projektion auf die Ebene β in Richtung der Drehsehnen $[W \dot{B}]$. Durch Projektion von \dot{W} auf β in dieser Richtung ergibt sich demnach der Tangentenspurpunkt \ddot{B} von \dot{b}^r in \dot{B}^r . Die zu $\beta^r = b$ normale Spur s_3 der Tangentialebene des Zylinders $\dot{\Psi}$ längs $\dot{f}^r = [\dot{B}^r \dot{P}^r]$ schneidet die früher gefundene Spur p_1 in dem Tangentenspurpunkt \ddot{P} der Kurve $\dot{p}^r = [\dot{\Phi} \dot{\Psi}]$.

Nun kann die gesuchte Krümmungsmitte K nach IV, Satz 4, als Pol der Parallelen s durch \ddot{P} zu $[P \dot{P}]$ bezüglich des Kreises $k = (P; P \dot{P})$ ermittelt werden¹¹.

¹¹ Aufgaben dieser Art löst man in der technischen Kinematik meist nach einem Verfahren von W. Hartmann (Die Maschinengetriebe, Stuttgart und Berlin 1913, 1. Bd., S. 79 ff.) Der Aufstellung des Geschwindigkeitsplanes des Krümmungsstrahles einer Kurve c nach W. Hartmann (a. a. O., S. 80, Fig. 71) entspricht in der vorliegenden Arbeit die Festlegung der Berührungskorrelation der Planierungsfläche der Raumkurve c^r .

Ein anderes Verfahren zur Konstruktion der Krümmungsmitten kinematisch erzeugter Kurven hat A. Reuschel angegeben: Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen, Österr. Ing.-Archiv, Bd. III, Heft 1.