Mh. Math. 91, 1—9 (1981)

Monatshefte für Mathematik


# Über Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen mehrerer Variablen

Von

**Ernst Heppner**, Frankfurt a. M.

*(Eingegangen am 13. Mai 1980)*

**Abstract. On Mean-Values of Multiplicative Number-Theoretic Functions of Several Variables.** In [8] the author extended the concept of "neighbouring functions" (cp. [9]) to the case of several variables. Using these results it is shown that under some weak conditions a multiplicative function $f$ in two variables has a mean-value different from zero if and only if the two multiplicative functions $f_1(n) = f(n, 1)$ and $f_2(n) = f(1, n)$ have mean-values different from zero. Applications to theorems of Delange [3], Elliott [6] and Daboussi [1] are given.

**1. Bezeichnungen.** Es sei $A_q := \{f\colon \mathbb{N}^q \to \mathbb{C}\}$ die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf der Menge aller $q$-tupel natürlicher Zahlen. Eine Funktion $f$ aus $A_q$ heißt *multiplikativ*, wenn für alle natürlichen Zahlen $n_1, \ldots, n_q, n'_1, \ldots, n'_q$ mit $(n_1 \ldots n_q, n'_1 \ldots n'_q) = 1$ gilt

$$f(n_1 n'_1, \ldots, n_q n'_q) = f(n_1, \ldots, n_q) f(n'_1, \ldots, n'_q).$$

Es bezeichne $M_q$ die Menge der multiplikativen Funktionen aus $A_q$. Jeder Funktion $f$ aus $A_q$ können wir durch

$$f_i(n) := f(n_1, \ldots, n_q) \text{ mit } n_j = 1 \text{ für } j \neq i,\ n_i = n$$

$q$ Funktionen $f_i\,(1 \leqslant i \leqslant q)$ zuordnen. Umgekehrt definiert

$$(f \times g)(n_1, \ldots, n_{q_1+q_2}) := f(n_1, \ldots, n_{q_1})\, g(n_{q_1+1}, \ldots, n_{q_1+q_2})$$

für $f$ aus $A_{q_1}$, $g$ aus $A_{q_2}$ eine Funktion $f \times g$ aus $A_{q_1+q_2}$.

Eine wichtige Rolle werden die folgenden Teilmengen von $A_q$ spielen:

$$G_q := \Bigg\{ f \in M_q, \sum_p \frac{|f_i(p)|^2}{p^2} < \infty \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant q,$$

$$\sum_p \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_q \geqslant 0 \\ k_1 + \ldots + k_q \geqslant 2}} \frac{|f(p^{k_1}, \ldots, p^{k_q})|}{p^{k_1 + \ldots + k_q}} < \infty \Bigg\},$$



0026—9255/81/0091/0001/$01.80

$$G_q^* := \{f \in G_q, \varphi_f(p, s_1, \ldots, s_q) \neq 0 \text{ für } \operatorname{Re} s_i \geqslant 1,$$
$$1 \leqslant i \leqslant q, \text{ und alle } p\},$$

wobei für $s_i \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant q$,

$$\varphi_f(p, s_1, \ldots, s_q) := \sum_{k_1, \ldots, k_q \geqslant 0} \frac{f(p^{k_1}, \ldots, p^{k_q})}{p^{k_1 s_1 + \ldots k_q s_q}}$$

gesetzt wurde und $p$ die Folge aller Primzahlen durchläuft. Schließlich sei noch

$$B_q := \left\{ f \in A_q, \sum_{n_1 \ldots n_q} \frac{|f(n_1, \ldots, n_q)|}{n_1 \ldots n_q} < \infty \right\},$$

$$D_q := B_q \cap G_q \qquad \text{und} \qquad D_q^* := B_q \cap G_q^*.$$

Wie im Falle einer Variablen definiert man die Faltung „$*$“ für Funktionen $f, g \in A_q$ durch

$$(f * g)(n_1, \ldots, n_q) := \sum_{d_1 | n_1} \cdots \sum_{d_q | n_q} f(d_1, \ldots, d_q)\, g\left(\frac{n_1}{d_1}, \ldots, \frac{n_q}{d_q}\right).$$

Die Funktion $e(n_1, \ldots, n_q) = 1$ für $n_1 = \ldots = n_q = 1$ und 0 sonst ist Einselement bzgl. $*$. Ist $f(1, \ldots, 1) \neq 0$, so existiert genau eine Funktion $\bar{f} \in A_q$ mit $f * \bar{f} = e$ (vgl. [4]).

Zwei Funktionen $f, g \in G_q$ heißen *benachbart*, wenn für $1 \leqslant i \leqslant q$ gilt

$$\sum_p \frac{|f_i(p) - g_i(p)|}{p} < \infty,$$

d. h. wenn die Funktionen $f_i$ und $g_i$ ($\in G_1$) für alle $i$ benachbart sind.

**2. Einleitung und Formulierung der Ergebnisse.** In der vorliegenden Arbeit sollen die in [8] gezeigten Ergebnisse über benachbarte multiplikative Funktionen mehrerer Variabler zum Beweis von Sätzen über die Existenz von Mittelwerten multiplikativer Funktionen mehrerer Variabler benutzt werden. Wir werden uns hier auf den Fall von zwei Variablen beschränken. Die Übertragung der Ergebnisse auf mehr Variable bereitet keine Schwierigkeiten.

*Definition 1.* Die Funktion $f \in A_2$ hat einen Mittelwert $M(f)$, wenn

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n, m) \sim M(f)\, x y,$$

wenn $x$ und $y$ unabhängig voneinander gegen Unendlich gehen. Im Falle einer Variablen wurde in [9] gezeigt: Sind $f \in G_1^*$ und $g \in G_1$ benachbart und existiert $M(f)$, so existiert auch $M(g)$. Für mehrere Variable ist dies falsch, wie wir in Abschnitt 3 sehen werden. Dieser Satz wird erst richtig, wenn wir den Begriff des Mittelwertes etwas enger fassen:

*Definition 2.* Die Funktion $f \in A_2$ hat einen (starken) Mittelwert $M^*(f)$, wenn sie einen Mittelwert $M(f)$ $(= M^*(f))$ hat und außerdem gilt:

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n,m) = O(xy) \text{ für alle } x \geqslant 1,\ y \geqslant 1\,.$$

(Für den Fall einer Variablen fallen Definition 1 und Definition 2 offenbar zusammen.) Wir können dann zeigen:

**Satz 1.** *Sind $f \in G_2^*$ und $g \in G_2$ benachbart und existiert $M^*(f)$, so existiert auch $M^*(g)$.*

Dies ist für den Fall mehrerer Variabler noch interessanter als im Falle einer Variablen, da man für eine Funktion $f \in M_2$ immer die benachbarte Funktion $f_1 \times f_2$ betrachten kann. Funktionen dieses Typs werden in Abschnitt 4 untersucht. Wir zeigen:

**Satz 2.** i) *Es existiert $M(f_1 \times f_2)$ dann und nur dann, wenn $M^*(f_1 \times f_2)$ existiert.*

ii) *Es existiert $M(f_1 \times f_2) \neq 0$ dann und nur dann, wenn die beiden Mittelwerte $M(f_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ existieren.*

Mit den Sätzen 1 und 2 lassen sich Ergebnisse über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Mittelwerten von Funktionen einer Variablen direkt auf den Fall mehrerer Variabler übertragen. So folgt unmittelbar

**Satz 3.** i) *Sei $f \in G_2^*$. Existiert $M^*(f) \neq 0$, so existieren $M(f_1)$ und $M(f_2)$.*

ii) *Sei $f \in G_2$. Ist $\varphi_{f_i}(p,s) \neq 0$ für* $\operatorname{Re} s \geqslant 1$, $i = 1, 2$, *und existieren $M(f_1)$ und $M(f_2)$, so existiert auch auch $M^*(f)$.*

Dies läßt sich z. B. auf die bekannten Sätze von H. Delange [3], P. D. T. A. Elliott [6] und H. Daboussi [1] anwenden. In diesen Fällen gilt $|f(n,m)| \leqslant 1$ oder

$$\sum_{n\leqslant x}\sum_{m\leqslant y}|f(n,m)|^\lambda \ll xy$$

für ein $\lambda > 1$, so daß die Mittelwerte $M$ und $M^*$ zusammenfallen. Weiter werden wir in Abschnitt 8 sehen, daß in diesem Fall stets $f\in G_2$ gilt. Wir erhalten damit

**Satz 4.** i) *Sei* $f\in M_2$, $|f(n,m)|\leqslant 1$ *für alle* $n,m$ *und es gelte* $\varphi_f(p,s,s')\neq 0$ *für* $\mathrm{Re}\,s\geqslant 1$, $\mathrm{Re}\,s'\geqslant 1$ *und alle* $p$. *Existiert dann* $M(f)\neq 0$, *so konvergieren für* $i=1,2$ *die Summen*

$$\sum_p \frac{f_i(p)-1}{p}.$$

ii) *Sei* $f\in M_2$, $|f(n,m)|\leqslant 1$ *und für* $i=1,2$ *konvergiere*

$$\sum_p \frac{f_i(p)-1}{p}.$$

*Dann existiert* $M(f)$. *Ist* $\varphi_f(p,1,1)\neq 0$ *für alle* $p$, *so ist* $M(f)\neq 0$. (Einen anderen Beweis für Satz 4 findet man in [5].)

**Satz 5.** i) *Sei* $f\in M_2$ *und* $\sum_{n\leqslant x}\sum_{m\leqslant y}|f(n,m)|^\lambda \ll xy$ *für ein* $\lambda>1$.

*Existiert* $M(f)\neq 0$ *und ist* $\varphi_f(p,s,s')\neq 0$ *für* $\mathrm{Re}\,s\geqslant 1$, $\mathrm{Re}\,s'\geqslant 1$ *und alle* $p$, $\varphi_{f_i}(p,1)\neq 0$ *für alle* $p$, *so konvergieren*

$$\sum_p \frac{f_i(p)-1}{p}\ (i=1,2),$$

$$\sum_p \frac{|f_i(p)|^\lambda-1}{p}\ (i=1,2)\quad \textit{und}\quad \sum_p\sum_{k\geqslant 2}\frac{|f_i(p^k)|^\lambda}{p^k}\ (i=1,2).$$

ii) *Ist* $f\in M_2$ *und konvergieren die Reihen*

$$\sum_p \frac{f_i(p)-1}{p}\ (i=1,2),$$

$$\sum_p \frac{|f_i(p)|^\lambda-1}{p}\ (i=1,2)\quad \textit{und}\quad \sum_p\sum_{k+l\geqslant 2}\frac{f(p^k,p^l)|^\lambda}{p^{k+l}},$$

*so existieren* $M(f)$ *und* $M(|f|^\lambda)$. *Ist* $\varphi_f(p,1,1)\neq 0$ *für alle* $p$, *so ist* $M(f)\neq 0$.

**3. Ein Gegenbeispiel.** Sei $f \in M_2$, $0 < \varepsilon < 1/2$ und

$$f(p^k, p^j) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j = 0 \\ p^\varepsilon & \text{für } k = 1, j = 0 \\ -1 & \text{für } k = 0, j = 1, p = 5 \\ -5^\varepsilon & \text{für } k = j = 1, p = 5 \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann rechnet man leicht nach:

$$f(n, m) = \begin{cases} n^\varepsilon & \text{für } m = 1, n \text{ quadratfrei} \\ -n^\varepsilon & \text{für } m = 5, n \text{ quadratfrei} \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Damit gilt für $y \geqslant 5$

$$M(f) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n, m) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n, 1) + \sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n, 5) = 0,$$

Aber wegen $\sum_{n \leqslant x} f(n, 1) = \sum_{n \leqslant x} \mu^2(n)\, n^\varepsilon \neq O(x)$ existiert $M^*(f)$ nicht.

Die zu $f$ benachbarte multiplikative Funktion $g$ mit

$$g(p^k, p^j) = \begin{cases} 0 & \text{für } p = 5,\ k + j > 0 \\ f(p^k, p^j) & \text{sonst} \end{cases}$$

hat offenbar keinen Mittelwert. Wir werden nun noch $f \in G_2^*$ nachweisen, womit gezeigt ist, daß hier im Gegensatz zum Falle einer Variablen die Aussage „Sind $f \in G_2^*$ und $g \in G_2$ benachbart und existiert $M(f)$, so existiert auch $M(g)$“ falsch ist. Zunächst ist

$$\sum_p \frac{|f(p, 1)|^2}{p^2} = \sum_p p^{2\varepsilon - 2} < \infty,$$

$$\sum_p \frac{|f(1, p)|^2}{p^2} = 1/25 \quad \text{und} \quad \sum_p \sum_{j+k \geqslant 2} \frac{|f(p^k, p^j)|}{p^{k+j}} = 5^\varepsilon/25,$$

also ist $f \in G_2$. Für $p \neq 5$ ist wegen $|p^\varepsilon/p^s| < 1$ $\varphi_f(p, s, s') = 1 + p^\varepsilon/p^s \neq 0$ für $\operatorname{Re} s \geqslant 1$, während $\varphi_f(5, s, s') = 1 + 5^\varepsilon/5^s - 1/5^{s'} - 5^\varepsilon/5^{s+s'}$ und für $\operatorname{Re} s \geqslant 1$, $\operatorname{Re} s' \geqslant 1$ $|5^\varepsilon/5^s - 1/5^{s'} - 5^\varepsilon/5^{s+s'}| < 1$ gilt. Damit gilt $f \in G_2^*$.

**4.** $A_1 \times A_1$. In diesem Abschnitt sollen speziell Funktionen der Form $f_1 \times f_2$ mit $f_i \in A_1$ untersucht werden. Wir zeigen

**Satz 2'.** *Seien $f_1, f_2 \in A_1$. Dann gilt:*

i) *Es existiert $M(f_1 \times f_2)$ dann und nur dann, wenn $M^*(f_1 \times f_2)$ existiert.*

ii) *Existiert $M(f_1)$ und $M(f_2)$, so existiert auch $M(f_1 \times f_2)$.*

iii) *Existiert $M(f_1 \times f_2) \neq 0$, so existieren $M(f_1)$ und $M(f_2)$.*

*Beweis.* Die Aussagen i und ii folgen unmittelbar aus der Definition des Mittelwertes. Zum Beweis von iii zeigen wir ein Lemma.

**Lemma 1.** *Gilt $a_n b_m \to M \neq 0$ für $n, m \to \infty$, so existieren* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Der elementare *Beweis* sei dem Leser überlassen.

**5. $M^*(f)$ und $G_2^*$.** Für den starken Mittelwert $M^*$ können wir analog zum Falle einer Variablen zeigen:

**Lemma 2.** *Sei $f \in A_2$, $g \in B_2$ und es existiere $M^*(f)$. Dann existiere $M^*(f * g)$ und es gilt*

$$M^*(f*g) = M^*(f) \sum_{n,m} \frac{g(n,m)}{nm}.$$

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\sum\limits_{n,m} \dfrac{|g(n,m)|}{nm} < \infty$ existieren $n_0$, $m_0$ mit

$$\sum_{n > n_0} \sum_{m} \frac{|g(n,m)|}{nm} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{n} \sum_{m > m_0} \frac{|g(n,m)|}{nm} < \varepsilon.$$

Dann ist zunächst für $x > n_0$, $y > m_0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} (f*g)(n,m) &= \sum_{nd \leqslant x} \sum_{mt \leqslant y} g(n,m) f(d,t) \\
&= \sum_{n \leqslant n_0} \sum_{m \leqslant m_0} g(n,m) \sum_{d \leqslant x/n} \sum_{t \leqslant y/m} f(d,t) + \\
&\quad + \sum_{n \leqslant x} \sum_{m_0 < m \leqslant y} g(n,m) \sum_{d \leqslant x/n} \sum_{t \leqslant y/m} f(d,t) + \\
&\quad + \sum_{n_0 < n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} g(n,m) \sum_{d \leqslant x/n} \sum_{t \leqslant y/m} f(d,t) - \\
&\quad - \sum_{n_0 < n \leqslant x} \sum_{m_0 < m \leqslant y} g(n,m) \sum_{d \leqslant x/n} \sum_{t \leqslant y/m} f(d,t) =
\end{aligned}$$

$$= \sum\nolimits_1 + O\left(x y \sum\nolimits_2 \frac{|g(n,m)|}{n m}\right) = \sum\nolimits_1 + O(\varepsilon x y),$$

wobei in $\sum_2$ über alle $n$ und $m$ mit $n > n_0$ oder $m > m_0$ summiert wird. Da $M(f)$ existiert, gilt für $x > x_0$, $y > y_0$

$$\Big|\sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} f(n,m) - M(f)\, x y\Big| < \varepsilon x y,$$

also für $x > x_0 n_0$, $y > y_0 m_0$

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n \leqslant n_0} \sum_{m \leqslant m_0} \frac{g(n,m)}{n m} M(f)\, x y + O\left(\sum_{n \leqslant n_0} \sum_{m \leqslant m_0} \frac{|g(n,m)|}{n m} \varepsilon x y\right)$$

$$= M(f) \sum_{n,m} \frac{g(n,m)}{n m} + O(\varepsilon x y).$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Satz 1 folgt nun unmittelbar aus Lemma 2 und Satz 3 aus [8].

**6. Beweis von Satz 3.** Wir beginnen mit Aussage i): Aus der Definition der Menge $G_2$ folgt die Existenz einer Zahl $p_0$, so daß für die Funktion $g$ aus $M_2$ mit

$$g(p^k, p^j) = \begin{cases} f(p^k, p^j) & \text{für } p > p_0 \\ 0 & \text{für } p \leqslant p_0, k + j > 0 \end{cases}$$

gilt: $g \in G_2^*$, $g_i \in G_1^*$ für $i = 1, 2$. Weiter ist $g$ benachbart $f$. Nach Satz 1 existiert also $M^*(g) \neq 0$ (vgl. Lemma 2) und nach Satz 2 damit auch $M(g_i)$ für $i = 1, 2$. Da $f_i (\in G_1)$ benachbart $g_i (\in G_1^*)$, existiert nach [9] auch $M(f_i)$ $(i = 1, 2)$.

Zu Aussage ii): Es sind $f_1$ und $f_2$ in $G_1^*$. Dann ist (vgl. [8]) $f_1 \times f_2$ in $G_2^*$ und nach Satz 2 existiert $M^*(f_1 \times f_2)$. Nach Satz 1 existiert also $M^*(f)$.

**7. Beweis von Satz 4.** Aus den Voraussetzungen folgt sofort $f \in G_2^*$. Wir definieren die Funktion $g$ wie in Abschnitt 6 und erhalten die Existenz von $M(g_i) \neq 0$. Da $g_i(p) = f_i(p)$ für alle $p$ ist, folgt die Behauptung aus dem bekannten Ergebnis für eine Variable ([3]). Aussage ii folgt ebenfalls aus [3] und Satz 3 ii.

**8. Beweis von Satz 5.** Hierzu zeigen wir zunächst

**Lemma 3.** *Sei* $f \in M_2$, $\lambda > 1$ *und* $\sum_{n \leqslant x} \sum_{m \leqslant y} |f(n,m)|^\lambda = O(x y)$.

*Dann gilt für* $\beta > \frac{1}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}$

$$\sum_p \frac{|f_i(p)|^2}{p^{2\beta}} < \infty \ (i = 1, 2) \quad \textit{und} \quad \sum_p \sum_{\substack{k,j \geqslant 0 \\ k+j \geqslant 2}} \frac{|f(p^k, p^j)|}{p^{(k+j)\beta}} < \infty\,.$$

*Insbesondere ist also* $f \in G_2$.

*Beweis.* Zunächst ist $\sum_{n \leqslant x} |f_i(n)|^\lambda = O(x)$ und damit folgt aus [6] die Konvergenz der entsprechenden Summen für $f_i$ $(i = 1, 2)$. Weiter haben wir

$$\sum_p \sum_{j,k \geqslant 1} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{(j+k)\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_p \sum_{j,k \geqslant 1} \frac{|f(p^k, p^j)|^\lambda}{p^{(j+k)(1+\varepsilon)}} \right\}^{1/\lambda} \left\{ \sum_p \sum_{j,k \geqslant 1} p^{-(j+k)(\beta - 1 + \varepsilon/\lambda)\theta} \right\}^{1/\theta}$$

mit $\theta = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\sum_p \sum_{j,k \geqslant 1} \frac{|f(p^j, p^k)|^\lambda}{p^{(j+k)(1+\varepsilon)}} &\leqslant \sum_n \sum_m \frac{|f(n,m)|^\lambda}{(nm)^{1+\varepsilon)}} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} \sum_{2^s \leqslant m < 2^{s+1}} \frac{|f(n,m)|^\lambda}{(nm)^{(1+\varepsilon)}} \\
&\leqslant \sum_r \sum_s 2^{-(r+s)(1+\varepsilon)} \sum_{n \leqslant 2^r} \sum_{m \leqslant 2^s} |f(n,m)|^\lambda < \infty\,.
\end{aligned}$$

Sei nun $(\beta - (1 + \varepsilon)/\lambda)\,\theta = \delta$. Wegen $\beta > \frac{1}{2} + 1/2\lambda$ ist $\delta > 1/2$, falls $\varepsilon$ klein genug gewählt wurde. Hieraus folgt

$$\sum_p \sum_{j,k \geqslant 1} p^{-(k+j)\delta} \leqslant \sum_p p^{-2\delta} < \infty.$$

*Beweis von Satz 5 i.* Wieder definieren wir eine Funktion $g \in M_2$ durch

$$g(p^k, p^j) = \begin{cases} f(p^k, p^j) & \text{für } p > p_0 \\ 0 & \text{für } p \leqslant p_0, k + j > 0\,, \end{cases}$$

wobei $p_0$ so gewählt wurde, daß $g \in G_2^*$ und $g_i \in G_1^*(i = 1, 2)$ gilt. Dann existiert $M^*(g)$ und damit $M(g_i)$ für $i = 1, 2$. Weiter ist $M(g_i) \neq 0$. Nach [9] existiert dann auch $M(f_i) \neq 0$. Außerdem ist

$$\sum_{n \leqslant x} |f_i(n)|^\lambda = O(x)$$

und die Behauptung folgt aus [6] bzw. [1] (zur Formulierung vgl. auch [7]).

*Beweis von Satz 5 ii.* Wir definieren die Funktion $g$ wie oben. Aus den Voraussetzungen folgt mit [6] bzw. [1] die Existenz von $M(g_i)$ und $M(|g_i|^\lambda)$. Nach Satz 2 existieren $M^*(g_1 \times g_2)$ und $M^*(|g_1|^\lambda \times |g_2|^\lambda)$. Wegen $g_1 \times g_2 \in G_2^*$ benachbart $f \in G_2$ existiert $M^*(f)$ und wegen $|g_1|^\lambda \times |g_2|^\lambda \in G_2^*$ benachbart zu $|f|^\lambda \in G_2$

$\Big($wie in [7] gezeigt wurde folgt aus den Voraussetzungen die Konvergenz von $\sum\limits_{\substack{p \\ |f(p)| > 3/2}} \frac{|f_i(p)|^\lambda}{p}$, also $\sum\limits_p \frac{|f_i(p)|^{2\lambda}}{p^2} < \infty\Big)$,

somit existiert auch $M^*(|f|^\lambda)$.

### Literatur


[1] DABOUSSI, H.: Sur les fonctions multiplicatives ayant une valeur moyenne non nulle. Preprint, Paris-Orsay.

[2] DABOUSSI, H.: Caractérisation des fonctions multiplicatives $p\,p\,B^\lambda$ à spectre non vide. Preprint, Paris-Orsay.

[3] DELANGE, H.: Sur les fonctions arithmétique multiplicatives. Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. (3) **78**, 273—304 (1961).

[4] DELANGE, H.: On some sets of pairs of positive integers. J. of Number Theory **1**, 261—279 (1969).

[5] DELANGE, H.: Sur les fonctions multiplicatives de plusieurs entiers. L'Enseignement Math. **16**, 219—246 (1970).

[6] ELLIOTT, P. D. T. A.: A mean-value theorem for multiplicative functions. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **31**, 418—438 (1975).

[7] HEPPNER, E.: Über Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. Ann. Univ. Sci. Budapest. (To appear.)

[8] HEPPNER, E.: Über benachbarte multiplikative zahlentheoretische Funktionen mehrerer Variabler. Archiv Math. (To appear.)

[9] HEPPNER, E., und W. SCHWARZ: Über benachbarte multiplikative zahlentheoretische Funktionen. Erscheint im Gedenkband der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für Herrn Prof. Dr. P. Turán.

[10] INDLEKOFER, K.-H.: Multiplikative Funktionen mehrerer Variabler. J. reine angew. Math. **256**, 180—184 (1972).



Dr. E. HEPPNER
Fachbereich Mathematik der Universität
Robert-Mayer-Straße 10
D-6000 Frankfurt a. M., Bundesrepublik Deutschland