Buchbesprechungen.

Opere. Von *L. Bianchi.* Vol. III: Sistemi tripli ortogonali. 852 S. Roma: Edizioni Cremonese, 1955, Lire 7.500.

Dieser Band enthält 29 Abhandlungen von *L. Bianchi* über dreifach orthogonale Systeme. Das Buch beginnt mit einem Vorwort von *B. Gambier*, das einen historischen Bericht darstellt und die Bedeutung der Arbeiten von *L. Bianchi* auf diesem Gebiet der Differentialgeometrie ins rechte Licht stellt. Das Buch ist in 5 Kapitel gegliedert, an deren Beginn *B. Gambier* über alle darin enthaltenen Arbeiten referiert.

N. Hofreiter, Wien

The Collected Works of George Abram Miller. Band IV. XI, 458 S. Urbana: University of Illinois Press. 1955 $ 7.50.

Nach einer längeren Pause, in der der Autor starb, erschien nur der vierte Band der gesammelten Werke. Er enthält fast 100 Arbeiten, die größtenteils der Gruppentheorie angehören und die der Autor in den Jahren 1916—1927 veröffentlichte.

N. Hofreiter, Wien

Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung. Von *H. Hasse.* (Schriftenreihe zur Mathematik; Heft 1.) VIII, 103 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle-Verlag, 1955. DM 6.80.

Bedauerlicherweise haben viele, auch hochintelligente Menschen, eine falsche Vorstellung von der Mathematik. Dieses Heft wirkt aufklärend. Es behandelt Themen, deren Probleme leicht verständlich sind. Die Antworten sind teils leicht und werden ausführlich gegeben. Sind die Probleme schwierig zu lösen, so werden die Antworten nur angedeutet. Die Themen sind aus verschiedenen Gebieten der Mathematik entnommen. Probleme über Primzahlen, Aufgaben über Maxima und Minima, Quadratur des Kreises und das Vierfarbenproblem wechseln in bunter Reihenfolge ab. Die Schrift ist aus Vorlesungen des Verfassers über Mathematik im Studium generale entstanden und daher für einen großen Kreis von Lesern bestimmt. Auch Hörer und Lehrer der Mathematik werden aus dem Heft Nutzen ziehen. Bei all diesen Schriften kommt es aber weitgehend auf die Darstellung an. Hier zeigt sich wieder so recht, daß der Autor ein Meister der Darstellung ist. Er versteht es wie nur wenige, so zu schreiben, daß der Leser leicht mitkommt und von dem eigenartigen Reiz der Mathematik gefesselt wird.

N. Hofreiter, Wien

Maß und Zahl im Kunstwerk. Von *Ellen Weber.* (Beihefte für den mathematischen Unterricht: Heft 3.) Mit 58 Textabb., 4 Kunstdrucktafeln, 55 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 2.90.

Viele Schöpfungen und Vorgänge in der Natur sind mit mathematischen Gesetzen erfaßbar. Es gibt aber auch solche, die sich der mathematischen Erfassung entziehen. Das Gleiche gilt auch für die Werke der Kunst. Bei jedem

Kunstwerk ist das harmonische Gefühl des Schaffenden das Primäre. Der schaffende Künstler ist ein begnadeter Mensch, der die Harmonien der Schöpfung in sich trägt. Forscher und Gelehrte haben Kunstwerke auf Maß und Zahl untersucht und dabei so manche Gesetzmäßigkeit aufgefunden. Es steckt eben in jedem Kunstwerk irgendwie die Zahl; das ist leicht erkennbar, wenn eine Symmetrie vorherrscht. Das Büchlein befaßt sich mit solchen Kunstwerken, denen ein mathematisches Gesetz entnommen werden kann. So werden Proportionen und Proportionsreihen an geometrischen Grundformen untersucht, zahlreiche Beispiele für harmonische Maßverhältnisse angeführt und Ergebnisse nachträglicher Messungen an Bauwerken der Antike und des Mittelalters angegeben. Ein eigenes Kapitel befaßt sich mit Ornamenten. Das letzte Kapitel handelt von mathematisch konstruierten Teilformen und von Maßwerken, in denen „Nasen", „Vielpässe" und „Fischblasen" als wesentliche Bestandteile auftreten können.

So versucht dieses Büchlein über die Zahl eine Brücke von der Kunst zur Mathematik zu schlagen und so das Interesse für die Mathematik zu wecken.

J. Laub, Wien

Aus der Welt der Zahlen. Von *R. Schmidt* und *R. Stender*. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts: Heft 7.) 48 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle-Verlag. 1954. DM 3.60.

Das Heft beginnt mit einer historischen Übersicht über die Zahlentheorie im Unterricht. Dann wird gezeigt, was man bringen soll und was gemacht werden kann. Es ist klar, daß man im Unterricht nur wenig Zahlentheorie betreiben kann. Aber auf allen Altersstufen bietet sich Gelegenheit, zahlentheoretische Fragen zu behandeln. Dadurch wird eine vorzügliche Schulung im logischen Denken erreicht. Nach Meinung der Verfasser sollte im Unterricht der Begriff der endlichen abelschen Gruppe gebracht werden; in Arbeitsgruppen könnten Kettenbrüche, Euklidischer Algorithmus, Kongruenzbegriff, Restklassen, periodische Dezimalbrüche und der kleine Fermatsche Satz behandelt werden. Das Heft enthält viele wertvolle Anregungen für den Unterricht. Die Sätze 1 und 3 auf Seite 9 sind fehlerhaft zitiert.

N. Hofreiter, Wien

Transfinite Zahlen. Von *H. Bachmann*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 1.) VII, 204 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 29.80.

Das vorliegende sehr klar geschriebene Buch gibt nicht nur Ergebnisse und den derzeitigen Stand der modernen Theorie der transfiniten Zahlen wieder, sondern trägt gleichzeitig beinahe den Charakter eines Lehrbuches, da fast alle Sätze mit ausführlichen Beweisen versehen sind. Das ist ohne Zweifel sehr erfreulich, da auf diesem Gebiet bisher ein empfindlicher Mangel an modernen Darstellungen bestand. Der Darstellung liegt das Axiomensystem von *Zermelo-Fraenkel* zu Grunde, das nach Bedarf erweitert wird, jedoch wird alles vom Standpunkt der naiven Mengenlehre aus formuliert. Dieser in der einen oder anderen Weise modifizierte Vorgang hat sich auch bei anderen verwandten Darstellungen bewährt. (*Fraenkel*, Abstract Set Theory, *Sierpinski*, Algèbre des ensembles). Von den neueren Ergebnissen aus der Theorie der Ordnungszahlen wollen wir besonders die über Normalfunktionen hervorheben, die vielfach auf den Verf. zurückgehen. Stets ist in der Darstellung das Eingreifen des

Auswahlaxioms hervorgehoben. Ein eigener Abschnitt ist der Arithmetik der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen ohne Auswahlaxiom gewidmet. Dadurch wird besonders deutlich, ein wie mächtiges Instrument dieses Axiom im Rahmen der Mächtigkeitstheorie ist. Die letzten drei Abschnitte über die Konsequenzen des Auswahlaxioms und der Alephhypothese, die Probleme des Kontinuums und die unerreichbaren Zahlen müssen jeden Mathematiker fesseln. Stoßen sie doch an die Grenze des mathematischen Denkens, ja an die Grenze des menschlichen Denkens überhaupt vor. Wir erwähnen noch das ziemlich vollständige Verzeichnis der neueren Literatur.

L. Schmetterer, Wien

Kombinatorik. Von *K. Wellnitz.* Mit 1 Textabb., 50 S. Braunschweig: Verlag F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 3.20.

Das Büchlein, das als Beiheft für den mathematischen Unterricht bezeichnet wird, führt in klarer und leicht verständlicher Weise die grundlegenden Begriffe der Kombinatorik ein. Jedes der fünf Kapitel (Permutationen verschiedener Elemente, Permutationen von zum Teil gleichen Elementen, Kombinationen ohne Wiederholung, Kombinationen mit Wiederholung, Variationen) beginnt mit Vorübungen, aus denen sich die allgemeinen Sätze vermuten lassen. Daran schließt sich die Durchführung, die den Beweis für die Vermutung bringt. Das Ergebnis wird als Lehrsatz besonders herausgestellt. Gut ausgewählte und ausführlich erläuterte Beispiele und eine Sammlung von Übungsaufgaben beschließen jedes Kapitel.

Das Büchlein, das 52 ausführlich behandelte Beispiele und 90 Übungsaufgaben enthält, kann zum Gebrauch an unseren Mittelschulen wärmstens empfohlen werden.

J. Laub, Wien

Algebra. Von *B. L. van der Waerden.* Unter Benützung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. I. Teil. Vierte Auflage der modernen Algebra. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band XXXIII.) VIII, 292 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 29.60.

Die vierte Auflage unterscheidet sich von der dritten, im Jahre 1950 erschienenen Auflage nur durch wenige geringfügige Änderungen und Zusätze. Ich darf daher auf die früheren ausführlichen Besprechungen in dieser Zeitschift hinweisen: Mh. Math. **39**, 11 (1932); **45**, 25 (1937) und **55**, 90 (1951).

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Verbandstheorie. Von *H. Hermes.* (Die Grundlehren der mathemathischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIII.) Mit 24 Textbabb., VIII, 164 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 22.80.

Obwohl die Theorie der Verbände gegenwärtig schon einen beträchtlichen Umfang erreicht hat und auch auf zahlreichen Teilgebieten der Mathematik Anwendung findet, gab es bisher noch kein Lehrbuch der Verbandstheorie in deutscher Sprache. Schon aus diesem Grunde ist das Erscheinen des vorliegenden Werkes sehr zu begrüßen, noch viel mehr aber deshalb, weil es sich dabei um eine wirklich ausgezeichnete Einführung in dieses Gebiet handelt. Die relativ ausführliche und sehr klare Darstellung macht das Buch wohl jedem mathematisch einigermaßen vorgebildeten Leser zugänglich, zumal da die verwendeten Grundbegriffe der Mengenlehre und Algebra auch noch in einem eigenen Anhang zusammengestellt werden; dies geschieht auch mit den im Text gelegentlich verwendeten aussagenlogischen Verknüpfungssymbolen, deren Einsatz manche Beweise kürzer und übersichtlicher macht. An lehrreichen Beispielen wird gezeigt, wie der Verbandsbegriff in verschiedenen Zweigen der Mathematik auftritt; überhaupt kommen die Anwendungen der Theorie durchaus nicht zu kurz. Nicht zuletzt sind die zahlreichen Übungsaufgaben am Ende der Paragraphen zu erwähnen, die dem Leser Gelegenheit geben, sich ohne besondere Mühe deren Lehrstoff noch besser einzuprägen.

Um auf den Inhalt des Buches kurz einzugehen: Zunächst wird der Verband als Algebra eingeführt (der Ausdruck „Algebra" wird in ganz allgemeinem Sinn für eine Menge mit Operationen verwendet), dann werden die einfachsten Eigenschaften der Halbordnungen entwickelt und die beiden Begriffe Verband und Halbordnung in Beziehung gesetzt. Es folgt die Untersuchung der Isomorphismen, Homomorphismen und der Teilbildung in Verbänden und Halbordnungen. Als wichtige Anwendung der anschließend eingeführten Begriffe vollständiger Verband und vollständiger Teilbund wird der Teilbund der abgeschlossenen Teilmengen einer Algebra oder eines Relativs betrachtet. Hierauf werden spezielle Verbandsklassen — distributive, modulare, komplementäre, Boole'sche, atomare Verbände — definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet, der Idealbegriff der Verbandstheorie entwickelt und Fragen der Einbettbarkeit in vollständige Verbände untersucht. (Zu dem Beispiel auf S. 44 sei an dieser Stelle vielleicht bemerkt, daß der Normalteilerverband der alternierenden Gruppe A_4 nicht aus 7, sondern nur aus 3 Elementen besteht.) Interessante Anwendungen finden die modularen Verbände in der projektiven Geometrie — hier wird gezeigt, wie man die projektiven Geometrien rein verbandstheoretisch kennzeichnen kann — sowie in der Theorie der Algebren — hier führt die Untersuchung von Verbänden aus Äquivalenzrelationen schließlich zu einem für beliebige Algebren gültigen Verfeinerungssatz. Die anschließenden Ausführungen über distributive Verbände enthalten den Beweis des Satzes, daß jeder solche Verband einem Mengenverband isomorph ist, und den Satz von der Zerlegung in irreduzible Elemente. Die Boole'schen Verbände werden den Boole'schen Ringen und den Boole'schen Räumen zugeordnet und dadurch sowohl algebraisch, als auch topologisch charakterisiert. Das Schlußkapitel beschäftigt sich unter anderem mit dem Zorn'schen Lemma, das ja eine Aussage über Halbordnungen ist, und den Beziehungen zwischen zweiwertiger klassischer Logik und Boole'schen Verbänden.

Das Buch stellt eine sehr wertvolle Bereicherung der „Grundlehren" dar und sein Studium kann mit gutem Gewissen jedem Mathematiker empfohlen werden.

W. Nöbauer, Wien

La Géométrie des Groupes classiques. Von *J. Dieudonné.* (Ergebnisse der Mathemathik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 5.) VII, 115 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 19.60.

Als „klassische" Gruppen bezeichnet man bekanntlich gewisse Gruppen von linearen Transformationen. Schon vor mehr als 50 Jahren begann man mit dem Studium solcher Gruppen. Über die bis zum Jahre 1935 auf diesem Gebiet erzielten Resultate wurde im ersten Teil des Ergebnisberichtes von *van der Waerden* referiert; wie das Literaturverzeichnis am Ende des vorliegenden Heftes zeigt, sind auch seither wieder zahlreiche diesbezügliche Arbeiten geschrieben worden; vor allem sind hier die Untersuchungen des Verfassers zu erwähnen. Eine zusammenfassende Darstellung des gegenwärtigen Standes der Forschung über diese Gruppen, wie sie in dem Heft vorgenommen wird, muß daher dem Mathematiker sehr willkommen sein. Natürlich können dabei die Beweise nicht vollständig wiedergegeben werden, es werden aber zumindest ihre Grundgedanken in den meisten Fällen dargestellt.

Zunächst werden die benötigten Begriffe und Sätze der linearen Algebra entwickelt, wobei die Terminologie teilweise aus der Geometrie stammt; gleichzeitig werden die betrachteten Gruppen der Reihe nach definiert. Es handelt sich dabei um die Gruppe aller eineindeutigen halblinearen Transformationen eines Vektorraumes endlicher Dimension über einem Körper (auch Schiefkörper sind zugelassen) sowie bestimmte Faktorgruppen und Untergruppen derselben. Anschließend wird die Struktur dieser Gruppen betrachtet und eine große Zahl von Ergebnissen, vor allem über ihre Zentren, Kommutatorgruppen, Faktorgruppen, erzeugenden Elemente gebracht. In Körpern der Charakteristik 2 tritt dabei manchmal ein von den übrigen Körpern abweichendes Verhalten ein, ebenso erhält man bei kleinen Dimensionen und endlichen Körpern mit wenigen Elementen gelegentlich Ausnahmsfälle. Im nächsten Kapitel werden Sätze behandelt, welche einige dieser Gruppen durch geometrisch formulierte Eigenschaften charakterisieren. Schließlich folgt ein Abschnitt über die Automorphismen der klassischen Gruppen und über die Isomorphismen, welche zwischen diesen Gruppen bestehen; hier gibt es noch manche offene Fragen.

Das Heft vermittelt einen sehr guten Überblick über dieses interessante und reichhaltige Teilgebiet der Algebra. *W. Nöbauer*, Wien

Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Von *H. Boerner*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIV.) Mit 15 Textabb., XI, 287 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 33.—, geb. DM 36.60.

Dieses Buch — das erste in deutscher Sprache, welches ausschließlich die Darstellungstheorie behandelt — will durchaus nicht den gesamten heutigen Stand des bereits sehr umfangreichen Gebietes vermitteln, sondern es stellt sich die Aufgabe, auch einen mit der Algebra nur wenig vertrauten Leser vor allem in die Methoden und Ergebnisse der Theorie einzuführen, welche in der Physik Anwendung finden; bei der Bedeutung der Gruppendarstellungen für die Quantenmechanik ist dies natürlich ein sehr berechtigtes Anliegen. Das Buch kommt aber keinesfalls etwa nur dem Physiker zugute, sondern ist auch für den Mathematiker, vor allem für den, der den behandelten Stoff wirklich gründlich kennen lernen will, von großem Wert, zumal da es vollständig auf dem Boden der Mathematik verbleibt und die physikalischen Anwendungen selbst nicht gebracht werden.

Die Auswahl und Anordnung des Stoffes ist durch den Zweck des Buches bestimmt: Es werden grundsätzlich nur Darstellungen in algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik Null betrachtet. Von der allgemeinen Theorie für diese Körper wird so viel entwickelt, als man braucht, um die Darstellungen und Charaktere einiger wichtiger Gruppen zu bestimmen. Zur Vermeidung übermäßigen Aufwandes wird manchmal auf größtmögliche Allgemeinheit verzichtet. Auch in didaktischer Hinsicht entspricht das Werk durchaus dem angestrebten Ziel: Es werden vom Leser nur wenig Vorkenntnisse verlangt; alle benötigten Sätze und Begriffe der linearen Algebra und Gruppentheorie werden in den beiden ersten Kapiteln sehr übersichtlich zusammengestellt, wobei weniger bekannte Tatsachen auch bewiesen werden. Der Text ist klar geschrieben, die Beweise sind ausführlich, so daß das Buch gut lesbar ist.

Im einzelnen wird nach den bereits erwähnten Vorbereitungskapiteln zunächst die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen mit Hilfe des Gruppenringes behandelt; unabhängig davon wird die Theorie der Gruppencharaktere nach *Schur* entwickelt. Anschließend werden Darstellungen und Charaktere kontinuierlicher Gruppen unter geeignet gewählten einschränkenden Voraussetzungen besprochen. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen einer Gruppe und denen einer Untergruppe vom Index 2 wird ausführlich dargelegt und später dazu benützt, um von der symmetrischen auf die alternierende Gruppe zu schließen und umgekehrt von der Drehgruppe auf die volle orthogonale Gruppe. Gewissermaßen als Beispiel für die allgemeine Methode werden die Darstellungen der symmetrischen Gruppe genau behandelt. Bei der vollen linearen Gruppe werden zunächst die ganzrationalen Darstellungen gewonnen, wobei von Tensorräumen Gebrauch gemacht wird. Daraus ergeben sich dann alsbald die ganzrationalen Darstellungen der reellen linearen, unimodularen und unitären Gruppe und schließlich auch die stetigen Darstellungen aller dieser Gruppen. Die anschließend berechneten Charaktere der vollen linearen Gruppe werden dazu verwendet, die Charaktere der symmetrischen Gruppe zu ermitteln. Bei der Drehgruppe werden nach einer Methode von *Stiefel* zunächst die einfachen Charaktere und die eindeutigen Darstellungen festgestellt; dann werden die Spindarstellungen unter Verwendung der Clifford'schen Zahlen auf zwei verschiedenen Wegen erhalten. Nach einigen speziellen Sätzen über Drehgruppen der Dimensionen 3, 4 und 5 wird abschließend noch kurz die Lorentz-Gruppe behandelt. Auch das umfangreiche Literaturverzeichnis zeugt von der Sorgfalt, mit der das Buch geschrieben ist.

Es dürfte wohl kaum einen Mathematiker oder Physiker geben, der von dem Studium dieses schönen Werkes nicht reichen Gewinn davontragen wird.

W. Nöbauer, Wien

Einführung in die Zahlentheorie. Von *A. Scholz* †. Überarbeitet von *B. Schoeneberg*. Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Band 1131.) 128 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 2.40.

Wie bei einer Einführung in die Zahlentheorie zu erwarten ist, beschränkt sich das Buch auf die rationale Zahlentheorie. Es bringt Teilbarkeitsregeln der natürlichen Zahlen, Elementares über Primzahlverteilung, zahlentheoretische Funktionen, Kongruenzen, den kleinen Fermatschen Satz, Primitivwurzeln, Darstellung durch Quadratsummen, quadratische Reste, das quadratische Reziprozitätsgesetz, Darstellbarkeit von Zahlen durch binäre quadratische Formen, die Reduktion der definiten und indefiniten binären quadratischen Formen und automorphe Substitutionen. Ich habe die erste Auflage, die 1939 erschienen ist, ausführlich und kritisch in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **49**, 4) besprochen. Ich habe hervorgehoben, daß das Buch außerordentlich inhaltsreich ist, die Darstellung aber für einen Göschen-Band zu knapp ist. Die zweite Auflage, die von *Schoeneberg* herausgegeben wurde, ist leichter verständlich. Die mengentheoretische Einleitung wurde stark gekürzt und das letzte Kapitel über das algorithmische Rechnen wurde ganz weggelassen. Auch sonst wurden kleinere Kürzungen vorgenommen. Die Sätze werden ausführlich formuliert, jeder Telegrammstil wurde vermieden. Die Darstellung ist klar, fordert aber noch immer vom Leser anstrengende Mitarbeit. *N. Hofreiter*, Wien

Arytmetika Teoreticzna. Von *W. Sierpiński*. Unter Mitarbeit von *J. Losia*. (Biblioteka Matematyczna: Tom 7.) 258 S. Warszawa. 1955.

Das Werk besteht aus drei Teilen, von denen der erste von *J. Losia* und die beiden anderen von *W. Sierpinski* verfaßt wurden. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Axiomatik der nichtnegativen ganzen Zahlen und bringt neben dem Üblichen auch tiefere Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, sowie einige interessante historische Hinweise über die Zahlensysteme bei den alten Völkern. Der zweite Teil soll eine Einführung in die elementare Zahlentheorie geben und ist hiezu hervorragend geeignet. Hier findet sich z. B. ein Beweis des Bertrand'schen Postulates, einige Diophantische Gleichungen, Darstellung von Zahlen durch vier Quadrate sowie ganz ausgezeichnete und originelle Übungen zu den einzelnen Abschnitten. Verschiedene Dinge, die über den Rahmen des Buches hinausgehen, werden in Anmerkungen erklärt und mit Literaturhinweisen versehen. Hierzu darf vielleicht bemerkt werden, daß nicht nur bewiesen ist, daß jede genügend große natürliche Zahl als Summe von 17 vierten Potenzen ganzer Zahlen darstellbar ist (vgl. S. 152), sondern daß dazu schon 16 solche Potenzen ausreichen, wie *Davenport* beweisen konnte. Der dritte Teil des Buches gibt zunächst eine Einführung in die Theorie der reellen Zahlen und bringt sodann einiges über Kettenbrüche, z. B. auch die Gesetze über die beste Annäherung einer Irrationalzahl durch ihre Näherungsbrüche. Den Schluß bildet eine kurze Auseinandersetzung des Rechnens mit komplexen Zahlen und Quaternionen, wobei auch auf die allgemeinen hyperkomplexen Systeme und den Satz von *Frobenius* hingewiesen wird.

Das Schöne an dem Buch ist, daß es sich ganz anspruchslos gibt und trotzdem eine sehr gründliche Einführung in das recht umfangreiche Gebiet der theoretischen Arithmetik vermittelt. *K. Prachar*, Wien

Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben. Von *I. P. Natanson.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik.) Mit 29 S., 12 Textabb., Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 2.30.

In diesem Büchlein werden in sehr ausführlicher Weise und leicht verständlich 18 der bekannten Extremaufgaben ohne Verwendung der Differentialrechnung gelöst. Es werden dabei die einfachsten Eigenschaften des quadratischen Trinoms und eine sich auf das arithmetische und geometrische Mittel beziehende Ungleichung verwendet. Dieses Bändchen ist unseren Mittelschülern in der 7. und 8. Klasse sehr zu empfehlen. Sie sollen zum Auffinden eines Lösungsweges angeregt werden, der für jede Extremaufgabe eigens gefunden werden muß; sie sollen daraus auch erkennen, welchen Vorteil die einheitliche Methode der Differentialrechnung bietet.

Bei einer Neuauflage wären die Figuren 6, 7, 10 und 11 zu verbessern und der Text der Aufgabe 3 in der Einführung zu ergänzen. *J. Laub,* Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *R. Courant.* I. Band: Funktionen einer Veränderlichen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Textabb., XI, 450 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 33.—.

In diesem Lehrbuch werden Differentiation und Integration von vornherein gemeinsam eingeführt. Im Zusammenhange der Integral- und Differentialrechnung ergibt sich ein höchst einfacher und natürlicher Zugang zu der Exponentialfunktion und dem Logarithmus. Bei der hier gegebenen Darstellung entstehen bei den Stetigkeitsfragen keinerlei Schwierigkeiten, da der Logarithmus von vornherein als Integral und somit als stetige und differenzierbare Funktion seines Argumentes gekennzeichnet ist und die Stetigkeit der Umkehrfunktion, also der Exponentialfunktion, sich von selbst versteht. Ein weiteres Kennzeichen des Buches ist die Betonung des engen Zusammenhanges der mathematischen Analysis mit der physikalischen Realität. Zahlreich sind die Anwendungen auf Physik und Geometrie. Ganz ausgezeichnet ist die Darstellung. Die Begriffe werden anschaulich motiviert, und die Probleme werden sehr gut erklärt.

Die ersten beiden Auflagen in deutscher Sprache erschienen 1927 und 1930 (siehe Monatsh. f. Math. **35**, 58—60 (1928). Äußere Gründe waren es, daß nun Übersetzungen in mehrere Sprachen erfolgten, und daß die dritte Auflage in deutscher Sprache erst jetzt erschien. An zahlreichen Stellen finden sich Änderungen gegenüber der zweiten Auflage; im ersten Kapitel bemerkt man eine etwas schärfere Formulierung und eine noch ausführlichere Begründung. In den späteren Kapiteln erfolgten kleine Verbesserungen und mehrere kleine Ergänzungen wie z. B. der 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung, der Weierstraßsche Konvergenzsatz für die Approximation von stetigen Funktionen, das Iterationsprinzip, die Bernoullischen Polynome und die Eulersche Summenformel.

Das Buch ist nach wie vor ein ideales Lehrbuch für Studierende der Mathematik und der Physik.

N. Hofreiter, Wien

Differential- und Integralrechnung. Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse. Von *O. Haupt*, unter Mitarbeit von *G. Aumann*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Unter Mitwirkung von *Ch. Y. Pauc*. III. Band: Integralrechnung. (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Band 26.) XI, 319 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 28.—.

Mit dem Erscheinen des 3. Bandes hat die unter Mitwirkung von *C. Y. Pauc* zustande gekommene Neubearbeitung des verdienstvollen Werkes ihren Abschluß gefunden. Die Verfasser haben damit ihr Ziel, die Grundlagen der Infinitesimalrechnung von möglichst allgemeinen, der heutigen algebraisierenden Tendenz entsprechenden Gesichtspunkten aus zu entwickeln, erreicht.

Ein Eingehen auf Einzelheiten ist bei der Fülle des verarbeiteten Stoffes kaum möglich, daher soll nur eine kurze Übersicht über den Inhalt gegeben werden.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Theorie der Boole'schen Verbände und schließt hieran die Theorie von Inhalt und Maß. Hierauf folgt die Lehre von den meßbaren Funktionen und die Definition des Lebesgue-Integrals (bezüglich beliebiger Maße) als Unterteilungsintegral bei Zerlegung des Integrationsbereiches in abzählbar viele Teile. Hieran schließt sich die Theorie der total-additiven Mengenfunktionen und der stetigen linearen Funktionale, wobei gezeigt wird, wie der Integralbegriff auch von dieser Seite her gewonnen werden kann. An dieser Stelle findet auch der Begriff des *Hilbert*-Raumes seinen Platz. Ein Abschnitt über Maße und Integrale in Produkträumen führt zum Satz von *Fubini* und gibt auch Anlaß zur Betrachtung von abzählbar-vielfachen Integralen. Es folgt dann eine sehr allgemein gefaßte Theorie des *Riemann-Stjeltjes*-Integrals, die sich auf die *Burkill*'sche Definition des Integrals einer Mengenfunktion stützt. Ein kurzer Bericht über lineare Funktionale in topologischen Räumen zeigt, wie man von dieser Seite her zu demselben Integralbegriff gelangt. Dann wenden sich die Verfasser dem Problem der Stammfunktionen zu, wobei der Integralbegriff von *Denjoy* seinen natürlichen Platz findet. Als Abschluß wird die Theorie des Maßes dehnungsbeschränkter m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_n entwickelt und bis zur Herleitung der Integralsätze von *Gauß-Green-Stokes* geführt.

Innerhalb des hier kurz skizzierten Rahmens haben die Verfasser in bewundernswerter Weise eine Fülle von Material unter einheitlichen Gesichtspunkten und zum großen Teil mit eigenständigen Methoden zu einem organischen Ganzen gestaltet. So ist ein Werk entstanden, das nach Meinung des Referenten kaum für den Anfänger geeignet ist — ihm wird mit einer Darstellung, die unter Verzicht auf größtmögliche Allgemeinheit die wesentlichen Methoden in einem engeren Bezirk zur Kenntnis bringt, eher gedient sein — aber dem Fortgeschrittenen eben durch die Vielfalt und Vollständigkeit der dargestellten Theorien von größtem Wert sein wird.

Für eine eventuelle Neuauflage würde sich der Referent im Interesse der Übersichtlichkeit eine weniger raumsparende satztechnische Ausstattung wünschen. Ebenso würde er gerne den sprachlich sehr anfechtbaren Ausdruck „aufsteigender Limessatz" vermieden sehen — Kürze des Ausdrucks ist gewiß anzustreben, aber doch nur im Rahmen des sprachlich Möglichen.

J. Radon, Wien

Vorlesungen über Orthogonalreihen. Von *F. G. Tricomi.* Übersetzt und zum Druck bearbeitet von *F. Kasch.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXVI.) Mit 13 Textabb. VIII, 264 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955, DM 34.—, geb. DM 37.60.

Das Ziel dieses Buches ist es, den Leser „möglichst rasch" in die Theorie der trigonometrischen Reihen und orthogonalen Polynome einzuführen. Im ersten Kapitel werden allgemein die orthogonalen Funktionensysteme behandelt. Hier finden sich Dinge wie der Satz von Fischer-Riesz, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit eines Funktionensystems, welche erst in jüngster Zeit von Dalzell gegeben wurde, Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen und der ganzzahligen Potenzen. Das zweite Kapitel bringt die allgemeine Theorie der trigonometrischen Reihen; totalstetige Funktionen und Funktionen beschränkter Schwankung, Konvergenzbedingungen von Dirichlet, Dini und Lipschitz, Riemann'scher Satz über das lokale Verhalten der Fourierreihe, ein Satz über das Vorzeichen der Annäherung einer Funktion durch die Partialsummen ihrer Fourierreihe. Mit der feineren Theorie der Konvergenz trigonometrischer Reihen beschäftigt sich das dritte Kapitel: Satz von Lusin-Denjoy über die absolute Konvergenz, Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz, Differentiation und Integration, Satz von Fejér über die C_1-Summierbarkeit der Fourierreihe, A-Summierbarkeit einer Fourierreihe, Riemann'sche Summationsmethode, Satz von Cantor-Lebesgue, einfachste Eigenschaften der Fouriertransformierten. In den drei folgenden Kapiteln, die den zweiten Teil des Buches ausmachen, werden die orthogonalen Polynome behandelt, und zwar zunächst die Eigenschaften, welche für möglichst allgemeine Belegungsfunktionen gelten, wie: Rekursionsformel, Summationsformel von Christoffel-Darboux, Formel vom Rodrigues'schen Typus, allgemeines über die Lage der Nullstellen. Dann werden die speziellen orthogonalen Polynome betrachtet, indem zunächst aus der hypergeometrischen Reihe die Jacobi'schen Polynome abgeleitet werden, aus denen sich dann die übrigen meist als Spezialfälle ergeben. Für alle diese Polynome werden Entwicklungssätze, Lage der Nullstellen, asymptotisches Verhalten usw. untersucht. Genauer werden auch die Eigenschaften der Kugelfunktionen entwickelt. Das Schlußkapitel behandelt diesen Fragenkreis für die Laguerre'schen und Hermite'schen Polynome.

Das Werk ist in didaktischer Hinsicht ausgezeichnet verfaßt, trotzdem oft schwierige Dinge behandelt werden, stets leicht lesbar und ohne große Vorkenntnisse verständlich. Eine sehr zu empfehlende, fast mühelose, Einführung in das interessante Gebiet. *K. Prachar*, Wien

Konstruktive Funktionentheorie. Von *I. P. Natanson*. XIV, 515 S. Berlin: Akademieverlag, 1955. DM 36.—.

Die konstruktive Funktionentheorie, von *S. N. Bernstein* so bezeichnet, befaßt sich mit der approximativen Darstellung beliebiger Funktionen durch einfache analytische Funktionen; dieses Gebiet ist, beginnend mit *Tschebyscheff*, vielfach gerade von russischen Mathematikern wie *Bernstein*, *Natanson*, *Stekloff*, u. a. bearbeitet worden. Der vorliegende stattliche Band enthält in einer zumindest anfangs breiten, immer aber klaren Darstellung die wichtigsten Problemkreise, wobei es dem Verf. in erster Linie um die Heraushebung der Ideen und nicht sosehr auf die Vollständigkeit ankommt. Der erste Teil gilt der Approximation durch algebraische und trigonometrische Polynome, wobei als Maß der Approximation das Maximum der absoluten Differenz von Funktion und Polynom genommen wird; ausgehend von den Weierstraß'schen Sätzen werden dann die Tschebyscheff'schen Polynome behandelt, der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Funktion und dem Grad ihrer besten Approximation durch Polynome (*Bernstein, Zygmund*), Fourierreihen (die Summen von *Fejer* und von *de la Vallee-Poussin*) und schließlich die beste Approximation an analytische Funktionen (ohne komplexe Funktionentheorie). — Im zweiten Teil wird die Approximation im Mittel untersucht: demgemäß werden zunächst allgemein Orthogonalsysteme gebracht, die Sätze von *Müntz*, die Legendre'schen und die Jacobi'schen Polynome, das Momentenproblem für endliche Intervalle und schließlich für unendlich-große Intervalle (die Polynome von *Laguerre* und *Hermite*). — Der dritte Teil bringt Interpolation und Näherungsquadraturen: nach Aufstellung der Interpolationsformeln werden die bekannten Beispiele von *Bernstein* und von *Marcinkiewicz* für die Divergenz eines Interpolationsprozesses gegeben; Konvergenz von solchen Verfahren — das Verfahren von *Bernstein*. Bei den Näherungsquadraturen werden analoge Konvergenzfragen untersucht (Sätze von *Stekloff* und *Kusmin*). Das Problem von *Tschebyscheff* und ein Satz von *Bernstein*.

Es ist dem Übersetzer und dem Verlag zu danken, daß dieses schöne Werk nun auch in deutscher Sprache vorliegt. *H. Hornich*, Graz

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Von *L. Heffter*. Mit 13 Abb. im Text, VIII, 63 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 12.60.

Der Verfasser hat, schon beginnend mit einer 1901 erschienenen Arbeit über den Beweis des Cauchy'schen Satzes, in einer Reihe von Arbeiten eine möglichst elementare Begründung der Funktionentheorie unternommen: elementar, d. h. hier ohne allgemeine Kurvenbegriffe, nur mit Hilfe von achsenparallelen Rechteckseiten und ohne Maßtheorie. In dieser kleinen Schrift hat der rüstige Autor eine Zusammenstellung der verschiedenen Gesichtspunkte und Eingänge zur Funktionentheorie und eine kritische Übersicht über die bisher gegangenen Wege gegeben, die wohl auch dem Studierenden die Grundzüge dieser Wissenschaft vermitteln kann. *H. Hornich*, Graz

Analytische Fortsetzung. Von *L. Bieberbach*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 3.) IV, 168 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 24.80.

Aus den zahlreichen Problemkreisen um die Fortsetzbarkeit von Potenzreihen werden hier u. a. gebracht: Eine ausführliche Diskussion über den Hadamard'schen Multiplikationssatz, ein Test für singuläre Stellen eines Funktionselementes; verschiedene Lückensätze (*Fabry, Ostrowski, Pólya*; die Überkonvergenz wird nicht behandelt). Häufigkeit der nicht fortsetzbaren Reihen; Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, ganzen rationalen Koeffizienten, ganze ganzwertige Funktionen, Koeffizienten als Funktionen ihrer Nummer. — Man fühlt sich dem Verfasser zu Dank verpflichtet, daß er das so sehr verstreute Material gesammelt und mit seiner großen Darstellungskunst wiedergegeben hat.

H. Hornich, Graz

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Von *L. Collatz*. Mit 118 Textabb. und einem Porträt, XV, 526 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LX.) Zweite, neubearbeitete Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 56.—, geb. DM 59.60.

Vor vier Jahren erschien die erste Auflage (Besprechung im Monatsh. Math. **55**, 356—357/1951). Sie brachte die wichtigsten numerischen Verfahren zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Es wurden die allgemeinen Methoden dargelegt und an zahlreichen aus der Praxis entnommenen Beispielen illustriert. Der Verfasser schrieb damals: „Die Aufstellung einfacher und zugleich genügend genauer Fehlerabschätzungen wird eine der dringendsten Aufgaben der praktischen Analysis in der Folgezeit sein. In besonderem Maße gilt dies für die Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen." Seither sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen Fehlerabschätzungen gemacht wurden. Diese und die übrigen seither erschienenen einschlägigen Arbeiten wurden in der zweiten Auflage eingearbeitet. Im neuen Kapitel I werden eine Reihe von Hilfsmitteln und allgemeinen Prinzipien zusammengestellt. Insbesondere seien die Fehlerabgleichsprinzipien und die Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis angeführt. Die funktionalanalytische Darstellung ist zwar etwas abstrakt, hat sich aber als sehr fruchtbar erwiesen. Die im ersten Kapitel angestellten allgemeinen Überlegungen haben für den Autor den Vorteil, daß er sich später viel erspart, für den nicht gut vorgebildeten Leser allerdings den Nachteil, daß er das Buch von Anfang an schwer versteht. Es ist Lesern erst dann anzuraten, wenn sie bereits einige Vorkenntnisse aus der Theorie der Differentialgleichungen haben. Der bedeutendste Wert des Buches liegt darin, einen Überblick über die ungeheuer große Zahl von Einzelarbeiten zu geben und die allgemeinen Methoden an vollständig durchgerechneten Beispielen zu erproben. Selbstverständlich ist es auch heute noch dringend erwünscht, die vorhandenen Näherungsverfahren in größerem Umfang als bisher praktisch zu erproben und theoretisch zu erforschen. Das Buch liefert weiterhin die Grundlagen hiezu.

N. Hofreiter, Wien

Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Von *C. Miranda*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 2.) VIII, 222 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 28.80.

Das Buch gibt eine zusammenfassende, moderne Darstellung der elliptischen Differentialgleichungen von n Variablen. Nachdem in den ersten beiden Kapiteln die grundlegenden Begriffe, Integralformeln sowie die Integraldarstellung von Funktionen behandelt wurden, folgen die Randwertprobleme durch Rückführung auf Integralgleichungen, wie sie in diesem allgemeinen Fall zuerst von *Levi*, *Giraud* u. a. gegeben wurden. Sodann werden auch die verallgemeinerten Lösungen betrachtet, wie sie von *Wiener*, *Perron* u. a. eingeführt wurden, und weiter mit Verwendung des Satzes von *Hahn-Banach-Ascoli* durch Arbeiten von *Cimmino*, *Caccioppoli* u. a. und ferner die Methode von *Picone-Fichera*. Verhalten der Lösungsfunktionen und Koeffizienten (Hölderbedingungen). — Es folgen die Analytizitätsfragen der Lösungen (*Bernstein*) auch für nichtlineare Differentialgleichungen. Nur kurz werden am Schluß vermischte Differentialgleichungen, Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen behandelt. *H. Hornich*, Graz

Second Colloque sur les Equations aux Dérivées Partielles. 128 S. Liège: G. Thone, Paris: Masson & Cie. 1955. ffr. 1500.—.

Von dem belgischen Centre de Recherches Mathèmatiques wurden bereits zahlreiche Kolloquien über Spezialgebiete der Mathematik abgehalten, welche ausführlicher, als dies bei großen Kongressen zu geschehen pflegt, prominente Vertreter dieser Spezialgebiete zu Worte kommen lassen. Der vorliegende Band enthält die Vorträge, die bei einem solchen Kolloquium über partielle Differentialgleichungen gehalten wurden, welches vom 24. bis 26. Mai in Brüssel stattgefunden hat. Die Titel der interessanten Vorträge waren die folgenden: *M. Picone*, Über ein neues Problem für die lineare partielle Differentialgleichung der klassischen mathematischen Elastizitätstheorie; *L. Schwartz*, Randwertprobleme bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen; *J. L. Lions*, Gemischte Randwertprobleme; *J. Leray*, Abelsche Integrale und Grundlösungen der hyperbolischen Gleichungen; *M. Brelot* und *M. G. Choquet*, Harmonische und polyharmonische Polynome; *G. de Rham*, Über gewisse Gleichungen aus der Theorie der harmonischen Differentialformen; *H. G. Garnir*, Green'sche „Funktionen" für die Randwertprobleme der Wellengleichung; *L. Fantappiè*, Neue Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen.

Wie auch bei vorhergehenden Kolloquien über algebraische Geometrie, gefaserte Räume, Differentialgeometrie, Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen, so wird auch die Veröffentlichung dieser Vorträge dazu beitragen, daß der allgemein interessierte Mathematiker besser darüber informiert ist, was in seiner Wissenschaft alles geschieht. *K. Prachar*, Wien

Fourierreihen. Von *G. P. Tolstow.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 14.) XI, 300 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955.

Das vorliegende Werk will nicht in die subtile Theorie der Fourierreihen im Rahmen der Theorie der reellen Funktion einführen, sondern mit den Hauptergebnissen der Theorie und den Anwendungen in der Physik vertraut machen. Es werden nicht nur Fourierreihen im engeren Sinne betrachtet, sondern auch allgemeinere Orthogonalsysteme als das trigonometrische. Einige Dinge, die man sonst in den einschlägigen Lehrbüchern seltener findet, wie die Verbesserung der Konvergenz von Fourierreihen, die angenäherte Berechnung der Fourierkoeffizienten und insbesondere die Theorie der trigonometrischen Doppelreihen, sind hier dargestellt. Ein Kapitel ist den Besselfunktionen, ein weiteres den Fourier-Besselreihen gewidmet. Recht ausführlich sind Randwert- und Eigenwertaufgaben der mathematischen Physik behandelt. Insbesondere den Problemen der Wärmeleitung ist viel Raum gewidmet. Die Herausgeber haben das karge Literaturverzeichnis des Verfassers durch die wichtigsten einschlägigen Lehrbücher bereichert. Es ist kein Zweifel, daß das Buch dem Studierenden gute Dienste leisten wird. *L. Schmetterer*, Wien

Continuous Transformations in Analysis. With an introduction to algebraic topology. Von *T. Rado* und *P. V. Reichelderfer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXV.) Mit 53 Textabb., VII, 442 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 59.60.

Das Ziel des Buches ist das Studium allgemeiner, d. h. nicht notwendig eineindeutiger stetiger Abbildungen im R_n. Diese Untersuchungen, die vielfach auf die Verf., *Federer* u. a. zurückgehen, benötigen manches aus der algebraischen Topologie, insbesondere die Kohomologietheorie. Es wird vom Leser nicht verlangt, daß er mit diesen Dingen vertraut ist: Der erste Teil des Buches ist einer Einführung in die algebraische Topologie gewidmet. Der zweite Teil „Topologische Studie stetiger Transformationen im R_n" führt die wichtigen Begriffe des topologischen Index und der Vielfachheitsfunktion ein, wobei sich die Verf. nach *Federer* der *Čech*'schen $(n + 1)$-dimensionalen Kohomologiegruppe bedienen. Auf die Verf. gehen auch die Begriffe der positiven und negativen Vielfachheitsfunktion zurück. Darauf bauen nun Definitionen der beschränkten Variation, der absoluten Stetigkeit und der verallgemeinerten Funktionaldeterminante auf. Ein weiterer Teil des Buches ist den differenzierbaren Transformationen gewidmet und schließlich werden die Untersuchungen der vorhergehenden Kapitel auf den zweidimensionalen Fall spezialisiert, wobei jedoch Bedacht darauf genommen wird, die Besonderheiten dieser Spezialisierung gegenüber dem allgemeinen Fall herauszuarbeiten. Gerade die Untersuchungen für $n = 2$ haben ja zu vielen n-dimensionalen Verallgemeinerungen den Weg gewiesen. Abgesehen von einer Reihe von Lehrbüchern der Topologie und der reellen Funktionen sind nur wenige spezielle Literaturhinweise, meist auf Arbeiten der Verf. gegeben. Die Lektüre des Buches setzt außer der Fähigkeit abstrakt denken zu können, Kenntnisse aus der Theorie der reellen Funktionen und der Gruppentheorie voraus. Man wird das Werk nur dem fortgeschrittenen Studenten empfehlen können. Der auf diesem Gebiet Forschende wird viel Neues finden und das flüssig geschriebene Buch mit Vergnügen lesen.

L. Schmetterer, Wien

Selected Papers in Statistics and Probability. Von *A. Wald*. Herausgegeben vom Institut für Mathematische Statistik. IX, 701 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1955. sh 60.—.

Dieser Band enthält fast alle Arbeiten soweit sie das Schaffen *Walds* auf statistischem und wahrscheinlichkeitstheoretischem Gebiet betreffen. Ausgenommen sind nur einige Abhandlungen, welche als Grundlage für die beiden Bücher *Wald*s über die Theorie der Entscheidungsfunktionen und der Sequentialanalyse dienten und daher leicht zugänglich sind. Dem Abdruck der Arbeiten geht eine Aufzählung sämtlicher Publikationen *Wald*s voraus sowie eine Würdigung und Besprechung seiner Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Es ist sehr erfreulich, daß nun dieser Teil der Arbeiten *Wald*s leicht zugänglich ist und zu einem eindrucksvollen Bild seines Schaffens zusammengefaßt ist. Anderseits bedauert man es, daß die Herausgabe nur auf ein, — wenn auch bedeutendes — Teilgebiet der Publikationen *Wald*s beschränkt ist. Die Aufnahme wenigstens der bedeutendsten geometrischen Arbeiten, die in seinen Wiener Jahren bei *K. Menger* entstanden sind, wäre eine willkommene Ergänzung gewesen.

L. Schmetterer, Wien

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Von *G. Bangen* und *R. Stender*. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts: Heft 3.) Mit 29 Textabb., 56 S. Frankfurt am Main-Pinneberg: O. Salle Verlag. 1954. DM 4.40.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik haben sich im 20. Jahrhundert rasch entwickelt. Neben dem theoretischen Aufbau erfolgte gleichzeitig eine große Ausweitung ihrer Anwendungsmöglichkeiten auf verschiedene Gebiete der Naturwissenschaften und Technik. Die Verfasser sind der Meinung, daß man Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik auch im Unterricht bringen kann und soll. Ein großer Teil der Schüler hat später im Laufe des Lebens in irgend einer Weise mit Statistik zu tun und hat daher durch eine Einführung in die mathematische Statistik auf der Schule auch einen Nutzen fürs Leben. Die Verfasser haben kein Lehrbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik geschrieben, sondern zeigen dem Lehrer, was man im Unterricht bringen kann und wie dies geschehen soll. Zunächst wird über die heutige Stellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik in der Mathematik und in den Naturwissenschaften referiert. Dann folgt ein Lehrgang. Darin kommen vor: relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Summenregel und Produktregel für Wahrscheinlichkeiten, das Gesetz der großen Zahl, Binomialverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte, Wahrscheinlichkeitsintegral, Theorie der Beobachtungsfehler, Geschwindigkeitsverteilungsgesetz von *Maxwell*. Am Schluß stehen Aufgaben, Lösungen und ein Literaturverzeichnis. Das Heft paßt sehr gut in die Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts und ist ein wertvoller Behelf für den Lehrer an höheren Schulen. *N. Hofreiter*, Wien

Elements of Statistics. Von *E. B. Mode*. Zweite Auflage. XI, 377 S. New York: Prentice Hall. 1951.

Es handelt sich um ein im didaktischen Aufbau recht geschicktes elementares Lehrbuch, welches bis zur einfachsten Varianzanalyse und dem Gebrauch der Spannweite für die Anlage von Kontrollkarten reicht. Hervorgehoben müssen die zahlreichen Beispiele werden sowie ein auf alle Gebiete der Statistik sich erstreckendes Verzeichnis von Lehrbüchern. *L. Schmetterer*, Wien

Versicherungsmathematik. Erster Teil. Von *W. Saxer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXIX.) IX, 249 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 36.—, geb. DM 39.60.

Das Buch ist als „Ersatzband" für das längst vergriffene bekannte Lehrbuch von *Loewy* gedacht. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei jedoch gleich hier darauf hingewiesen, daß es sich um eine durchaus selbständige moderne Darstellung handelt. Allerdings liegt bisher nur der erste „elementare" Band vor. Die nötigen Vorkenntnisse für das Verständnis des Bandes sind auf ein Minimum reduziert, da im Wesentlichen nur die diskontinuierliche Methode zur Darstellung kommt. Aus der Behandlung des üblichen Stoffgebietes soll besonders die für die Praxis heute so wichtige Pensionsversicherung hervorgehoben werden. Besonders erfreulich ist es, daß dem Verf. der Einbau neuerer Ergebnisse gelungen ist, welche den Formelapparat der Versicherungsmathematik in gedanklicher Weise bereichern, so daß auch der Anfänger bereits sieht, in welcher Richtung die moderne mathematische Forschung auf diesem Gebiet liegt. Wir erwähnen die Untersuchungen von *Schärf* über die allgemeinen Variationsprobleme in der

Versicherungsmathematik, das Kapitel über die Erneuerungstheorie und den Anhang über die wahrscheinlichkeitstheoretischen (stochastischen) Modelle. Dem Konzept des Buches entsprechend verzichtet der Autor auch hier auf volle Allgemeinheit, wofür einige Literaturhinweise entschädigen. Auf Grund dieses ersten gelungenen Bandes wird man dem zweiten Band, der sich offenbar schwierigerer Hilfsmittel der Analysis bedient und wohl auch die Risikotheorie bringen wird, mit Interesse entgegensehen. *L. Schmetterer*, Wien

Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. Von *A. P. Speiser*. Zweite, unveränderte Auflage. (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der E. T. H. Zürich. Herausgegeben von E. Stiefel: Nr. I.) Mit einem Anhang, 67 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1954. sfr. 6.75.

Die vorliegende Schrift erschien in erster Auflage 1950. Das Rechengerät, welches der Verfasser vorschlägt und sich jetzt im Bau befindet, zeichnet sich durch einen verhältnismäßig einfachen Aufbau aus, gehört aber trotzdem zu den schnellen Maschinen. Es besteht aus 1000 Elektronenröhren, 300 elektromagnetischen Relais und besitzt einen magnetischen Speicher, mit einem Fassungsvermögen von 1200 Worten, wobei ein Wort gleich einer 12stelligen Zahl sein kann. Trotzdem beträgt die Multiplikationszeit nur 30 ms. Ausführlich wird die Gestaltung des Rechenwerkes beschrieben, die eine Anzahl interessanter Gedanken verwendet. Besonders hervorzuheben ist die sehr klare und instruktive Darstellung. Daß nach so kurzer Zeit eine zweite Auflage erforderlich war zeigt, daß die vorliegende Schrift ihren angestrebten Zweck vollauf erfüllt. Die Lektüre dieser Broschüre kann nur empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Controller, das ideale Rechengerät. München 15: E. v. Stojkovits. Salzburg-Lehen: Th. Ullmann. DM 13.80, S 95.—.

Der Controller ist im Prinzip ein logarithmischer Rechenschieber, aber die Anordnung ist kreisförmig. Der Durchmesser beträgt nur 75 mm. Daher kann der Controller in jede Tasche eingesteckt werden. Er besteht aus zwei Metallscheiben, von denen die innere beweglich ist. Er enthält wie die besseren Rechenstäbe drei Skalen, neben der quadratischen noch eine kubische Skala. Die Anzahl der Markierungspunkte ist die gleiche wie beim Rechenstab von 25 cm Länge, nur sind die Abstände etwas kleiner. Daher ist die Genauigkeit etwas geringer als beim Rechenstab von 25 cm Länge. Ein großer Vorteil der kreisförmigen Anordnung ist der, daß jedes Ergebnis abgelesen werden kann, während beim Rechenstab nur die Zahlen der Zunge brauchbar sind, die über der festen Skala stehen. Während die Skalen eines Rechenstabes beim Gebrauch nicht berührt werden, ist dies beim Controller unvermeidlich. Doch garantiert die Güte der Herstellung für lange Haltbarkeit. Mit dem Controller kann man dieselben Rechnungen durchführen wie mit einem Rechenschieber, er eignet sich also besonders für technische und kaufmännische Rechnungen, hat aber den Vorteil der kreisförmigen Anordnung. *N. Hofreiter*, Wien

Les Fondements de la Géométrie. Von *B. Kerékjártó*. Band I: La Construction élémentaire de la Géométrie euclidienne. 340 S. Budapest: Akadémiai Kiado. 1955. $ 5.—.

Der 1946 verstorbene Autor hat sein Werk über die Grundlagen der Geometrie in ungarischer Sprache veröffentlicht; der erste Band erschien 1937, der zweite kurz vor seinem Tod. *F. Riesz* erfüllt nun eine Freundespflicht, indem er eine französische Ausgabe dieses Werkes veranlaßt und es damit einem größeren Leserkreis zugänglich macht. Vorläufig liegt der erste Band vor, der die Grundlagen der euklidischen Geometrie enthält. Der zweite Band soll Flächeninhalt und Volumen, die Grundlagen der projektiven und der nichteuklidischen Geometrie sowie tiefergehende Untersuchungen zur Axiomatik enthalten.

Der Verfasser baut seine Entwicklungen auf einem Axiomensystem auf, das in seiner Gruppierung mit dem von *Hilbert* identisch ist. Innerhalb der einzelnen Gruppen weicht er allerdings von *Hilbert* ab, vor allem in der Auswahl der Axiome der Kongruenz und der Stetigkeit. Bei den ersteren wird von der Streckengleichheit ausgegangen, hierauf werden die kongruenten Transformationen und mit ihrer Hilfe die Winkelgleichheit definiert. Die Stetigkeit wird zunächst mengentheoretisch eingeführt, indem von den Punkten der Geraden gefordert wird, daß sie eine zusammenhängende separable Menge bilden. Die verschiedenen anderen Möglichkeiten, die Stetigkeit axiomatisch zu fassen, werden sorgfältig diskutiert.

Das Buch enthält viele interessante Entwicklungen, die weit über die bloße Grundlegung hinausgehen und Gegenstände, die man selten behandelt findet, in origineller Weise zur Darstellung bringen. So wird anschließend an die Anordnungsaxiome die Theorie der Polygone und Polyeder bis zum Beweis der Zweiteilung des Raumes durch ein einfaches Polyeder geführt, anschließend an die Kongruenzaxiome werden zahlreiche geometrische Sätze ohne Parallelenaxiom bewiesen u. a. m. Auch die gruppentheoretischen Gesichtspunkte erfahren die gebührende Berücksichtigung.

Da das Buch in einem hervorragenden, flüssigen Stil geschrieben ist, bietet es eine ganz ausgezeichnete Einführung in die Grundlagen der Geometrie, der der Referent nichts Gleichwertiges an die Seite zu stellen wüßte. Es kann Studierenden und Lehrern aller Kategorien nicht warm genug empfohlen werden.

J. Radon, Wien

Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébraique. Von *P. Samuel.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 4.) IX, 133 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 23. 60.

In der algebraischen Geometrie wurden in letzter Zeit große Fortschritte erzielt, insbesondere gelang es erst jetzt, grundlegende Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie mit Hilfe der modernen Algebra exakt zu formulieren und zu beweisen. Wir verdanken diese bedeutenden Resultate einer Reihe von Forschern, unter denen sich so hervorragende Männer wie z. B. *van der Waerden*, *Chevalley*, *Zariski* und *A. Weil* befinden. Der Verfasser des vorliegenden Buches, der zur algebraischen Geometrie bedeutsame Beiträge geliefert hat, gibt nun in ganz hervorragender Weise eine Darstellung des Werkes dieser Autoren, versehen mit vielen originellen Ideen von ihm selbst. Wie schwierig die Aufgabe ist, welche hier so meisterhaft gelöst ist, kann nur der ermessen, der versucht hat, die Literatur zu studieren. Dazu kommt ja noch, daß die algebraische Geometrie zu den schwierigsten Gebieten der Mathematik gehört.

Das Buch gliedert sich in zwei Kapitel. Das erste Kapitel, betitelt Elementare Theorie im Großen, beginnt mit der Definition der algebraischen Mannigfaltigkeiten, (A. M.) im affinen und projektiven Raum über einem beliebigen Körper k, der zugeordneten Ideale und der grundlegenden Begriffe, darunter der so wichtigen Begriffe des allgemeinen Punktes einer A. M. und der relationstreuen Spezialisierung (*van der Waerden*). Dann folgen die Sätze über Projektionen, Produkte und Durchschnitte von A. M. und die Theorie der normalen Modelle

(*Zariski*). Es werden die Änderungen untersucht, welche eintreten, wenn der Konstantenkörper durch einen Erweiterungskörper ersetzt wird (*Chevalley, Weil, Zariski*). Dann folgt die Theorie des „fast überall", dabei sagt man eine Eigenschaft $P(x)$ (wo x die Punkte einer A. M. durchläuft) gilt fast überall auf einer A. M., wenn die Menge der x, für die die Eigenschaft nicht gilt, in einer echten Teilmannigfaltigkeit von ihr liegen.

Den Hauptteil des Kapitels bildet die Theorie der Zyklen (*A. Weil*) oder virtuellen Mannigfaltigkeiten (*Severi*), der zugeordneten Formen von *Chow* und *van der Waerden* und der algebraischen Korrespondenzen, deren Bedeutung für die Grundlagen der algebraischen Geometrie von *van der Waerden* erkannt wurde.

Das zweite Kapitel bringt die algebraische Geometrie „im Kleinen". Es beginnt mit der Einführung des Quotientenringes in einem Punkte einer A. M., der Theorie der normalen und einfachen Punkte und des Tangentenraumes von *Zariski*. Den Höhepunkt dieses Kapitels und des ganzen Buches bildet die fundamentale Theorie der Multiplizität und des Durchschnittes von Zyklen. Diese Theorie wurde von *van der Waerden* inauguriert, aber die rein algebraische allgemeine Theorie verdanken wir *Chevalley* und *A. Weil* (hier ist auch der Verfasser zu nennen). Eine Zusammenstellung weniger geläufiger Begriffe und Sätze aus der Algebra, welche im Buch verwendet werden und einige historische Notizen beschließen das Buch.

Das Buch kann bereits von Studenten in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden.

E. Hlawka, Wien

Methods of Algebraic Geometry. Von *W. V. D. Hodge* und *D. Pedoe.* Band III. V, 336 S. London: Cambridge University Press. 1954.

Der dritte Band des groß angelegten Werkes soll diejenigen modernen Methoden der algebraischen Geometrie geben, welche in jüngster Zeit, vor allem durch die Arbeiten von *André Weil,* zur Erforschung der „Birationalen Geometrie" der algebraischen Mannigfaltigkeiten entwickelt wurden. Die Darstellung soll aber auch eine Brücke zwischen den klassischen und den modernen Methoden der algebraischen Geometrie schlagen und dies scheint uns das größte Verdienst dieses ausgezeichneten Werkes zu sein. Wie die Verf. selbst sagen, ist es auch für die Geometer geschrieben, welche in den klassischen Methoden ausgebildet sind und sehr gerne die neuen und mächtigen Hilfsmittel der modernen Algebra kennenlernen möchten und auch wissen möchten, was diese in der ihnen vertrauten Sprache bedeuten. Dieser letzteren, menschenfreundlichen Forderung wurde besondere Beachtung geschenkt. Die Kapitelüberschriften: Kap. 15 Idealtheorie der kommutativen Ringe; Kap. 16, Die arithmetische Theorie der Mannigfaltigkeiten; Kap. 17, Bewertungstheorie; Kap. 18, Birationale Transformationen. Besonders sei hier nur auf die schöne Einführung in die Idealtheorie hingewiesen, sowie auf die schwierigen Probleme über die Auflösung der Singularitäten durch birationale Transformationen, welche im letzten Kapitel behandelt werden und bisher teilweise nur in den Originalarbeiten von *Zariski* zugänglich waren. Erwähnt sei noch, daß grundsätzlich nur Grundkörper der Charakteristik Null betrachtet werden, teilweise um die Überlegungen „konkreter" zu gestalten und teilweise, weil für den Fall allgemeiner Charakteristik noch nicht so viele Resultate bewiesen sind.

Alles in allem ein wunderschönes Buch, welches abstrakte algebraische Geometrie in der voraussetzungslosen und unkomplizierten Art des englischen Stils dem erfreuten Leser vorsetzt.

K. Prachar, Wien

Altes und Neues über konvexe Körper. Von *H. Hadwiger*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus: Band III.) 116 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1955. sfr. 13.50.

Es sind fast 40 Jahre her, seit *W. Blaschke* sein Buch „Kreis und Kugel" schrieb, in dem er die grundlegenden Sätze von *Steiner*, *Brunn* und *Minkowski* über konvexe Körper in einem anregenden Lehrbuch darstellte. In dem vorliegenden Buch werden klassische und neuere Untersuchungen über konvexe Körper gebracht. Es werden mengengeometrische Methoden angewandt, also Überlegungen, die direkt an die Grundtatsachen der Punktmengenlehre, der Elementargeometrie und der Analysis der reellen Zahlen anschließen. Analytische Methoden, wie sie in der Differentialgeometrie üblich sind, werden fast nicht verwendet. Im Mittelpunkt des Buches stehen die 4 fundamentalen Maßzahlen, das sind Volumen, Oberfläche, Integral der mittleren Krümmung und die Gesamtkrümmung. Dann folgt der *Brunn-Minkowski*'sche Satz und die sich auf die 4 Maßzahlen beziehenden fundamentalen Ungleichungen. Wir erkennen, daß die Theorie noch nicht abgeschlossen ist. Es fehlen noch verschiedene Ungleichungen. Das letzte Kapitel bringt Formeln und Lehrsätze der Integralgeometrie, also jener Disziplin, die von beweglichen geometrischen Figuren und von invarianten Integralbildungen handelt. Es zeigt sich ein enger Zusammenhang zwischen Integralgeometrie und der Theorie der fundamentalen Maßzahlen der Eikörper. Die Funktionalsätze über Eikörper gestatten, die wichtigsten Formeln und Sätze der räumlichen Integralgeometrie auf einfache Weise abzuleiten. Ein reiches Literaturverzeichnis von Arbeiten über konvexe Körper und Integralgeometrie aus den letzten 15 Jahren bildet den Abschluß. Es zitiert 48 Arbeiten des Autors, der in besonderem Maße berufen war, ein Lehrbuch über konvexe Körper zu schreiben. Dabei hatte er die Möglichkeit, bereits bekannte Sätze und eigene Sätze mit seinen in vielen weit verstreuten Zeitschriften erschienenen Beweisen einem großen Leserkreis leicht zugänglich zu machen.

N. Hofreiter, Wien

Differentialgeometrie I. Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen: Band 1113/1113a.) 150 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 4.80.

Ziel der Sammlung Göschen ist es, das Wissen in kurzen, klaren und allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen nach den Lehrplänen der deutschen Hochschulen zu vermitteln. Dieses Ziel wird hier, auf dem Gebiete der Differentialgeometrie, in vorzüglicher Weise erreicht. Band I bringt die Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Band II wird jedenfalls die Flächentheorie behandeln und soll Anfang 1956 herauskommen. Gerade in der Differentialgeometrie sind exakte und gleichzeitig gut verständliche Darstellungen selten, und daher ist ein Buch wie dieses wärmstens zu empfehlen. Die Stoffauswahl hält sich im üblichen Rahmen, nur werden die komplexen Kurven sehr ausführlich behandelt. Die Berücksichtigung des Komplexen gibt viele neue und grundlegende Einsichten. Außerdem kann man es einem Autor nicht verargen, wenn er ein Teilgebiet besonders ausführlich darstellt, auf dem er eine Reihe von hervorragenden Arbeiten verfaßt hat, wie dies bei *K. Strubecker* auf dem Gebiete des isotropen Raumes der Fall ist. Manche Einzelheiten in der Darstellung sind eigenartig, so z. B. die Einführung der Bogenlänge (S. 16) und die der Krümmung (S. 22).

N. Hofreiter, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29