

Konvexe Flächen mit langsam abnehmender Krümmung

Von

ROLF SCHNEIDER

1. Auf einer (hinreichend glatten) konvexen Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 , deren Gaußsche Krümmung durch eine positive Konstante c nach unten beschränkt ist, kann nach einem von O. Bonnet im Jahre 1855 bewiesenen Satz der geodätische Abstand zweier konjugierter Punkte einer geodätischen Linie nicht größer als $\pi c^{-1/2}$ sein. Die Weiterverfolgung und Vertiefung dieses Gedankens hat bekanntlich zu einer weitausgebauten Theorie geführt, die sich mit Rückschlüssen von verschiedenen Krümmungsbeschränkungen für Riemannsche Mannigfaltigkeiten auf deren globale geometrische Natur befaßt. Von einer einfachen Aussage verwandten Typs handelt die vorliegende Note, die an eine Bemerkung von Cohn-Vossen [2] anknüpft.

Es sei F eine glatte konvexe Fläche im Raum E_3 , T eine Tangentialebene an F in einem Punkt p und T_a die zu T parallele Ebene im Abstand a , die auf derselben Seite von T wie die Fläche F liegt. Für kleine a schneidet T_a die Fläche F in einer Eilinie, und der Teil von F zwischen T und T_a ist regulär und einfach zusammenhängend. Die Menge aller Ebenen T_a mit dieser Eigenschaft bezeichnet Cohn-Vossen [2] als die (durch p bestimmte) reguläre Schicht der Fläche F . Unter der Voraussetzung, daß für die Gaußsche Krümmung K von F überall $K \geq c > 0$ gilt, leitet Cohn-Vossen eine obere Schranke für die Dicke der regulären Schicht her, und zwar einmal durch elementare Betrachtungen über die sphärische Abbildung, zum anderen durch naheliegende Anwendung des angeführten Satzes von Bonnet. Anschließend bemerkt er (S. 386): „Übrigens kann man (mittels der ersten Methode) die Beschränktheit der regulären Schicht auch schon beweisen, wenn man weniger voraussetzt als $K \geq c > 0$. Offenbar genügt es, wenn K auf der Fläche mit wachsender geodätischer Entfernung von p nicht zu schnell gegen Null abnimmt... In dieser Möglichkeit der Verallgemeinerung liegt ein Vorzug des Verfahrens gegenüber dem Bonnets, das offenbar durchaus an $K \geq c > 0$ gebunden ist.“ Gegenstand dieser Note ist die etwas verspätete Bemerkung, daß im Gegenteil auch das Verfahren Bonnets — in geeigneter Weise abgewandelt — für die vorgeschlagene Verallgemeinerung verwendbar ist. Dies geht aus den folgenden Überlegungen hervor, die sich in etwas allgemeinerem Rahmen bewegen und nicht mehr auf diese elementare Interpretation und Anwendungsmöglichkeit eingehen. Der unten nachzuweisende Satz 1 ist nicht neu; er folgt auch aus einem Resultat von Calabi [1]. Indessen ist der hier angegebene Beweis einfacher; er ergibt sich durch geeignete Abänderung des Beweises, durch den Myers [4] den Bonnetschen verallgemeinert hat.

2. Es sei M eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 2$) der Differenzierbarkeitsklasse C^4 mit metrischem Tensor G_{ij} und Ricci-Tensor R_{ij} (wir benutzen die klassische Tensorschreibweise). Der kleinste Eigenwert des Ricci-Tensors bezüglich des metrischen Tensors in einem Punkt $x \in M$ sei mit $\varrho(x)$ bezeichnet; es ist also

$$\varrho(x) = \inf \frac{R_{ij}(x) \mu^i \mu^j}{G_{ij}(x) \mu^i \mu^j},$$

wo μ^i alle Vektoren $\neq 0$ in x durchläuft. Für die geometrische Interpretation von $R_{ij} \mu^i \mu^j / G_{ij} \mu^i \mu^j$ sehe man etwa Eisenhart [3] (S. 113); für $n = 2$ hängt dieser Ausdruck nicht von μ^i ab und ist gerade gleich der Gaußschen Krümmung.

Der Riemannsche Raum M sei vollständig. Wie Myers [4] gezeigt hat, muß M kompakt sein, wenn für alle $x \in M$ die Ungleichung $\varrho(x) \geq c > 0$ mit einer Konstanten c besteht. Andererseits braucht M nicht kompakt zu sein, wenn lediglich $\varrho(x) > 0$ für $x \in M$ gefordert wird. Wir wollen zeigen, daß sich jedoch bereits die Kompaktheit folgern läßt, falls $\varrho(x)$ positiv ist und nur mit wachsendem geodätischen Abstand des Punktes x von einem festen Punkt nicht zu schnell abnimmt.

Für $p, x \in M$ bezeichne $d(p, x)$ den Abstand zwischen p und x , also das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Bogen auf M , die p mit x verbinden. Da M als vollständig vorausgesetzt ist, gibt es ein kürzestes geodätisches Segment mit Endpunkten p und x ; es hat die Länge $d(p, x)$.

Satz 1. *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M sei vollständig. Für einen Punkt $p \in M$ gebe es Konstanten $c > \frac{1}{4}(n - 1)$ und $R > 0$ mit*

$$(1) \quad \varrho(x) \geq c d(p, x)^{-2} \quad \text{für alle } x \in M \quad \text{mit } d(p, x) > R.$$

Dann ist M kompakt.

Offenbar ist die Existenz oder Nichtexistenz solcher Konstanten c, R , mit denen (1) gilt, eine Eigenschaft der Riemannschen Mannigfaltigkeit allein, also nicht abhängig von dem Punkt p . In der Tat, wenn (1) gilt und wenn $\bar{p} \in M$ ein anderer Punkt ist, so ergibt sich aus der Dreiecksungleichung $d(p, x) \leq d(\bar{p}, x) + d(p, \bar{p})$ sofort die Existenz von Konstanten $\bar{c} > \frac{1}{4}(n - 1)$ und $\bar{R} > 0$ mit $\varrho(x) \geq \bar{c} d(\bar{p}, x)^{-2}$ für alle $x \in M$ mit $d(\bar{p}, x) > \bar{R}$.

Beweis von Satz 1. Wir nehmen an, die Voraussetzungen von Satz 1 seien erfüllt, aber M sei nicht kompakt. Wähle $\alpha > 0$ mit

$$(2) \quad \alpha^2 < c(n - 1)^{-1} - \frac{1}{4}.$$

M ist vollständig, aber nicht kompakt, also nicht beschränkt, daher existiert ein Punkt $r \in M$ mit $d(p, r) > R e^{\alpha}$. Es sei γ ein kürzestes geodätisches Segment mit Endpunkten p und r . Für jeden Punkt x auf γ ist die Länge des Teilstücks mit Endpunkten p und x gleich $d(p, x)$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt q auf γ mit $d(p, q) = d(p, r) e^{-\alpha}$. Der Parameter s bezeichne die von p aus gemessene Bogenlänge auf γ . Setze $d(p, q) = s_1$ und $d(p, r) = s_2$. In einer Umgebung von γ seien Fermi-Koordinaten $x^1, \dots, x^{n-1}, x^n = s$ eingeführt. Sei $f: [s_1, s_2] \rightarrow \mathbf{R}$ eine

zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(s_1) = f(s_2) = 0$. Für $j = 1, \dots, n - 1$ sei $\eta_{(j)}^i$ das Vektorfeld, das in dem gewählten speziellen Koordinatensystem durch $\eta_{(j)}^i = f(s)d_j^i$ definiert ist. Jedes der Vektorfelder $\eta_{(j)}^i$ definiert dann eine zulässige Variation für das zum Integral

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(G_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right)^{1/2} ds$$

gehörige Variationsproblem. Die zugehörige zweite Variation $J(\eta_{(j)})$ längs γ kann in der Form

$$J(\eta_{(j)}) = - \int_{s_1}^{s_2} [f'' + fK(s, \eta_{(j)})] ds$$

(Myers [4], S. 403) geschrieben werden, wo $K(s, \eta_{(j)})$ die Krümmung von M im Punkt $x = x(s)$ (mit $d(p, x) = s$) auf γ bezüglich der durch den Tangentenvektor $\xi^i(s)$ an γ bei x und den Vektor $\eta_{(j)}^i(s)$ bestimmten Ebenenstellung bezeichnet.

Nun wählen wir speziell $f(s) = s^{1/2} \sin(\alpha \log s_1^{-1} s)$. Dann gilt $f(s_1) = f(s_2) = 0$ sowie $f''(s) + (\alpha^2 + \frac{1}{4})s^{-2}f(s) = 0$, also

$$J(\eta_{(j)}) = \int_{s_1}^{s_2} f^2 [(\alpha^2 + \frac{1}{4})s^{-2} - K(s, \eta_{(j)})] ds.$$

Da die Vektoren $\eta_{(1)}^i, \dots, \eta_{(n-1)}^i$ zusammen mit dem Tangenteneinheitsvektor ξ^i ein orthogonales n -Bein bilden, gilt

$$\sum_{j=1}^{n-1} K(s, \eta_{(j)}) = R_{ij}(x(s)) \xi^i \xi^j.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} J(\eta_{(j)}) &= \int_{s_1}^{s_2} f^2 [(n-1)(\alpha^2 + \frac{1}{4})s^{-2} - R_{ij}(x(s)) \xi^i \xi^j] ds < \\ &< \int_{s_1}^{s_2} f^2 [cs^{-2} - \rho(x(s))] ds \leq 0 \end{aligned}$$

wegen (2) und (1). Es ist also $J(\eta_{(j)}) < 0$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, n-1\}$; daher kann der Teilbogen von γ mit Endpunkten q und r kein kürzester Bogen zwischen q und r sein; also ist auch γ nicht der kürzeste Bogen, der p mit r verbindet. Das ist ein Widerspruch.

3. Satz 1 gewinnt dadurch an Interesse, daß er in einem gewissen Sinne ein bestmögliches Resultat enthält. Eine Voraussetzung der Form $\rho(x) \geq F(d(p, x))$ mit einer positiven Funktion F ist aus Homogenitätsgründen offenbar nur dann geometrisch vernünftig, wenn entweder F konstant oder $F(t) = ct^{-2}$ mit einer Konstanten c ist. Im hier interessierenden letzteren Fall bleibt dann nur noch die Frage nach der optimalen Wahl von c . Es zeigt sich, daß die in Satz 1 angegebene Schranke $\frac{1}{4}(n-1)$ durch keine kleinere ersetzt werden kann; es gilt nämlich:

Satz 2. *Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es eine vollständige, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Dimension n derart, daß zu jedem Punkt $p \in M$*

und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $R > 0$ existiert mit

$$\varrho(x) > (\frac{1}{4}(n - 1) - \varepsilon)d(p, x)^{-2}$$

für alle $x \in M$ mit $d(p, x) > R$.

Beweis. Es sei M der n -dimensionale reelle Raum \mathbb{R}^n zusammen mit der durch

$$G_{ij}(x) = \delta_{ij} + x_i x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

gegebenen Riemannschen Metrik. Dieser Raum ist vollständig, denn für sein Längenelement ds gilt $ds^2 = dx_i dx_i + (x_j dx_j)^2 \geq ds_E^2$, wenn ds_E das euklidische Längenelement bezeichnet (über doppelt auftretende Indizes ist hier und im folgenden zu summieren). Setze $D = 1 + x_i x_i$. Eine einfache Rechnung liefert die Christoffelsymbole Γ_{ijk} , den Krümmungstensor R_{ijkl} und schließlich den Ricci-Tensor R_{ij} (in den natürlichen Koordinaten x_1, \dots, x_n):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \delta_{ij} x_k, \\ R_{ijkl} &= D^{-1}(\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}), \\ R_{ij} &= D^{-2}[(1 + (n - 2)D)\delta_{ij} + x_i x_j]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [R_{ij} - (n - 1)D^{-2}G_{ij}]x_j &= 0, \\ [R_{ij} - (1 + (n - 2)D)D^{-2}G_{ij}]a_i &= 0 \end{aligned}$$

für beliebige a_1, \dots, a_n mit $a_i x_i = 0$; die relativen Eigenwerte von R_{ij} bezüglich G_{ij} sind also die Zahlen $(n - 1)D^{-2}$ (einfacher Eigenwert) und $(1 + (n - 2)D)D^{-2}$ ($(n - 1)$ -facher Eigenwert). Wegen $D \geq 1$ ist

$$(3) \quad \varrho(x) = (n - 1)D^{-2}$$

der kleinste Eigenwert. Nun sei

$$p_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad p_0 \neq x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Der Differentialgleichung der geodätischen Linien entnimmt man, daß die durch

$$t \mapsto tx_i =: y_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

beschriebene Strecke das einzige geodätische Segment von p_0 nach x ist. Der Abstand $d(p_0, x)$ wird also durch die Riemannsche Länge dieser Strecke gegeben. Die Rechnung ergibt

$$d(p_0, x) = \frac{1}{2}[D^{1/2}(D - 1)^{1/2} + \log(D^{1/2} + (D - 1)^{1/2})].$$

Zusammen mit (3) ergibt das

$$(4) \quad \lim_{D \rightarrow \infty} d(p_0, x)^2 \varrho(x) = \frac{1}{4}(n - 1).$$

Nun seien $p \in M$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, o.B.d.A. sei $\varepsilon < \frac{1}{4}(n - 1)$. Wähle ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Wegen (4) gibt es ein bezüglich der Riemannschen Metrik beschränktes Gebiet $A \subset M$, so daß $\varrho(x) > (\frac{1}{4}(n - 1) - \varepsilon')d(p_0, x)^{-2}$ für $x \in M - A$ gilt. Die Dreiecksungleichung $d(p_0, x) \leq d(p_0, p) + d(p, x)$ zeigt, daß für alle $x \in M$ mit

hinreichend großem $d(p, x)$ die Ungleichung

$$d(p_0, x) < \left(\frac{n-1-4\varepsilon'}{n-1-4\varepsilon} \right)^{1/2} d(p, x)$$

besteht. Für alle $x \in M$ außerhalb eines gewissen beschränkten Gebietes gilt also $\varrho(x) > (\frac{1}{4}(n-1) - \varepsilon) d(p, x)^{-2}$, und eine Konstante $R > 0$ kann so gewählt werden, daß dies für alle $x \in M$ mit $d(p, x) > R$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] E. CALABI, On Ricci curvature and geodesics. Duke Math. J. **34**, 667–676 (1967).
- [2] S. COHN-VOSSEN, Singularitäten konvexer Flächen. Math. Ann. **97**, 377–386 (1927).
- [3] L. P. EISENHART, Riemannian Geometry. Princeton, 5. Aufl. 1964.
- [4] S. B. MYERS, Riemannian manifolds with positive mean curvature. Duke Math. J. **8**, 401–404 (1941).

Eingegangen am 9. 3. 1972

Anschrift des Autors:

Rolf Schneider
 Fachbereich Mathematik
 Technische Universität Berlin
 1 Berlin 12
 Straße des 17. Juni 135