Über Integrale auf konvexen Körpern I.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 8. Juni 1949.)

Einleitung.

Es sei B ein konvexer Körper im R_m $(m \geqq 2)$, der den Ursprung o im Innern enthält. Es sei $f(x)$ seine Distanzfunktion und B sei ihr Eichkörper. (Wir bezeichnen die Punkte $(x_1, \ldots, x_m)$ mit x und fassen sie als Spaltenvektoren auf). Dann führen Probleme aus der Geometrie der Zahlen auf die Integrale $G_1(l) = \int\limits_B (m + i\,l\,x)\, e^{ilx}\, d\,x$, $G(l) = \int\limits_B e^{ilx}\, d\,x$, allgemeiner auf $\int\limits_B \Phi(f(x))\, e^{ilx}\, d\,x$ ($d\,x$ Volumselement, $l\,x = \Sigma\, l_j\, x_j$). Ist B die Kugel vom Radius 1, so lassen sich G_1 und G durch Besselfunktionen ausdrücken:

$$G_1 = (2\pi)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(|\,l\,|)/|\,l\,|^{\frac{m}{2}-1}, \quad G = (2\pi)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(|\,l\,|)\,/\,|\,l\,|^{\frac{m}{2}}.$$

Es interessiert vor allem das Verhalten dieser Integrale für großes $|\,l\,|$. Hier ist, soviel ich weiß, außer für $m = 2$ nichts bekannt, wenn B nicht gerade ein Parallelepiped oder ein Ellipsoid ist.* Unter Voraussetzung weiterer Eigenschaften von B gelingt es nun asymptotische Ausdrücke für G_1 und G anzugeben (§ 3, § 5). Der Rand $S(B)$ von B muß sich durch gleichsinnig-parallele Stützebenen umkehrbar eindeutig und $6\,m$-mal stetig auf die Oberfläche der Einheitskugel abbilden lassen. Weiter muß, und dies ist die wesentliche Einschränkung, $\inf K > 0$ auf $S(B)$ sein, wo K das Produkt der Hauptkrümmungsradien ist.

Zur Herleitung der asymptotischen Entwicklungen benützen wir die Methode der stationären Phase, wie sie van der Corput[1] in strenger und umfassender Weise begründet hat. Das von uns Benötigte wird in § 2, Hilfssatz 1 hergeleitet.

---

* Vgl. aber *F. John*, Math. Anm. 109, S. 488.

[1] Compositio Mathematica I, III. Proceedings Amsterdam 51, S. 650.

Die Integrale $\int\limits_B \Phi(f)\, e^{ilx}\, d\,x$ lassen sich auf die einfachen Integrale $\int\limits_0^1 \Phi(u)\, u^{m-1}\, G_1(u\,l)$ zurückführen (§ 1). Dies ist für die Kugel bekannt (vgl. Bochner[2]), aber im allgemeinen Fall scheint sie neu zu sein. Diese Formel ermöglicht es, auch für diese Integrale asymptotische Ausdrücke anzugeben. Dies wird insbesondere für $\int\limits_B (1-f^2)^\delta\, e^{ilx}\, d\,x$ ($\delta \geqq 0$) durchgeführt (§ 4, § 5). Für die Kugel ist der Wert bekanntlich $(2\pi)^{\frac{m}{2}}\, 2^\delta\, \Gamma(\delta+1)\; J_{\frac{m}{2}+\delta}(|l|) \,/\, |l|^{\frac{m}{2}+\delta}$.

Die weiteren Paragraphen bringen Anwendungen auf die Theorie der Gitterpunkte. Es wird z. B. in § 8 gezeigt, daß der „Gitterrest" $\Phi(0, u) - \mathfrak{J} u^{\frac{m}{2}}$, wo Φ die Anzahl der Gitterpunkte in $f \leqq \sqrt{u}$ und $\mathfrak{J}$, das Volumen von B ist, $O\left(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}\right)$ und $\Omega\left(u^{\frac{m-1}{4}}\right)$ ist, Abschätzungen, wie sie bei der Kugel bekannt sind und die sich noch verschärfen ließen. In § 9 und § 10 verallgemeinern und verschärfen wir die interessanten Untersuchungen von Kendall[3]. § 11 beschäftigt sich mit einem Problem aus der Geometrie der Zahlen: Es ist durch Blichfeldt, van der Corput[4] u. a. bekannt, daß für die Anzahl $2\,S$ der Gitterpunkte $\neq 0$ in einen konvexen Körper $B_t : f(x) \leqq t$, $\mathfrak{J}\, t^m \leqq 2^m (S+1)$ gilt. Es gelingt uns, wenn $m \not\equiv 1\ (4)$, diese Abschätzung für großes t zu verschärfen, wenn B die obigen Voraussetzungen erfüllt. § 12 bringt die Abschätzung der Zahl $2\,S$ in Zusammenhang mit dem analogen Problem für den polaren Körper von B. In einen Spezialfall (B Parallelepiped, $S=0$) wurde die Methode dieses Paragraphens bereits von *Gelfond*[5] angewandt. Weitere Anwendungen und Verschärfungen der asymptotischen Entwicklungen werden in der Fortsetzung dieser Arbeit gegeben werden.

§ 1.

Es sei $f(x)$ stetig, dann gilt folgender

Satz 1: Es sei $\Phi(u)$ stetig auf dem Intervall $[0, T]$, $T > 0$, dann ist

$$\int\limits_{f \leqq T} e^{ilx}\, \Phi(f)\, dx = \int\limits_0^T \Phi(u)\, u^{m-1}\, du \int\limits_{f(x) \leqq 1} e^{iulx}\, (m + i\,u\,l\,x)\, dx \qquad (1)$$

[2] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, S. 186, Satz 56.
[3] Quarterly Journal 19 (1948).
[4] Acta Arithmetica 2.
[5] C. R. URSS 1937, XVII, S. 447.

Beweis: $O . B . d . A .$ kann vorausgesetzt werden, daß $\Phi(u)$ ein Polynom ist. Dann ist

$$\int\limits_{f \leqq T} e^{ilx} \Phi(f) dx = \Phi(T) \int\limits_{f \leqq T} e^{ilx} dx - \int\limits_{f \leqq T} e^{ilx} (\Phi(T) - \Phi(f))\, dx = I_1 - I_2.$$

Es ist $I_1 = \Phi(T)\, T^m \int\limits_{f \leqq 1} e^{ilx}\, dx$ und

$$I_2 = \int\limits_{f \leqq T} e^{ilx}\, dx \int\limits_{f(x)}^{T} \Phi'(u)\, du = \int\limits_{0}^{T} \Phi'(u)\, du \int\limits_{f \leqq u} e^{ilx}\, dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} \Phi'(u)\, u^m\, du \int\limits_{f \leqq 1} e^{iulx}\, dx = \Phi(T)\, T^m \int\limits_{f \leqq 1} e^{ilx}\, dx -$$

$$- \int\limits_{0}^{T} \Phi(u)\, du \int\limits_{f \leqq 1} \frac{d}{du} (e^{iulx} u^m)\, dx \tag{2}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Folgerung. Ist $\Phi(T) = 0$, $\Phi'(u)$ vorhanden und existiert $\int\limits_{0}^{T} \Phi'(u)\, u^m\, du \int\limits_{f \leqq 1} e^{iulx}\, dx$, so ist

$$\int\limits_{f \leqq T} e^{ilx} \Phi(f)\, dx = -\int\limits_{0}^{T} \Phi'(u)\, u^m\, du \int\limits_{f \leqq 1} e^{iulx}\, dx \tag{3}$$

Dies gilt auch dann noch, wenn das Integral rechts in (3) ein uneigentliches ist.

§ 2.

Für die weiteren Entwicklungen benötigen wir einen Hilfssatz über die Methode der stionären Phase. Wir benützen Methoden, die *van der Corput*[1] entwickelt hat.

Hilfssatz 1: Auf einem Intervall $[a, b]$ seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert. Sie seien $3(k+1)$-mal stetig differenzierbar (k natürliche Zahl beliebig). Es sei weiter

$$f'(a) = f'(b) = 0,\ f''(a) < 0,\ f''(b) > 0,\ f'(x) \neq 0 \text{ in } (a, b) \tag{1}$$

Dann ist für $\omega \geqq 1$

$$\int\limits_{a}^{b} g(x)\, e^{i\omega f(x)}\, dx = \Sigma_k(a) + \Sigma_k(b) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{k}{2}+1}}\right) \tag{2}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma_k(a) &= \tfrac{1}{2}\, e^{i\omega f(a)} \sum_{j=0}^{k} A_j\, e^{-\frac{i(j+1)\pi}{4}}\, \omega^{-\frac{j+1}{2}} \\ \Sigma_k(b) &= \tfrac{1}{2}\, e^{i\omega f(b)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j}\, B_j\, e^{i\frac{(j+1)\pi}{4}}\, \omega^{-\frac{j+1}{2}} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

dabei ist

$$\left\{\begin{aligned} & A_j = \sum_{t=0}^{j} \frac{1}{j!}\, \Gamma\left(\frac{j+1}{2} + t\right) \left(\tfrac{1}{2}\,|f''(a)|\right)^{-\frac{j+1}{2} - t} l_{t,\, j+2t}(a) \\ & l_{t\, s}(a) = \sum_{n=3t}^{s} \binom{s}{n}\, g^{(s-n)}(a)\, K_{t\, n}(a) \\ & K_{00} = 1,\ K_{0\, n} = 0\ (u \geqq 1),\ K_{t+1,\, n+1} = \sum_{r=3t}^{n-2} \binom{n}{r}\, f^{(n-r+1)}(a)\, K_{t\, r} \end{aligned}\right. \tag{A}$$

Um die B_j zu erhalten ist in (A) a durch b zu ersetzen.

Beweis: Wegen (1) gibt es ein $c_1 > 0$, so daß in $[a, a + c_1]$, $|f'(x)|$ monoton wachsend und in $[b - c_1, b]$ monoton abnehmend ist. In $[a + c_1, b - c_1]$ ist Min $|f'(x)| = C_1 > 0$. Es sei weiter Max $|f'''(x)| = C_2$

$$C = \frac{1}{2(C_2 + 1)} \operatorname{Min}\left(|f''(a)|, |f''(b)|, C_1 (C_2 + 1)\right) \text{ und } \varepsilon = C\,\omega^{-\frac{1}{3}}.$$

Unter $w(x)$ verstehen wir die Funktion

$$\left\{\begin{array}{ll} \int\limits_x^1 e^{-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}}\, dt \Big/ \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}}\, dt & \text{wenn } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{array}\right.$$

Es besitzt $w(x)$ alle Ableitungen, es ist $w(0) = 1$, $w(1) = 0$ und $w^{(j)}(0) = w^{(j)}(1) = 0$ für $j \geqq 1$.

Es sei $N_a(x) = w\left(\frac{x - a}{\varepsilon}\right)$, $N_b(x) = w\left(\frac{b - x}{\varepsilon}\right)$. Dann ist also

$$N_a(a) = 1,\ N_a^{(j)}(a) = N_a^{(j)}(a + \varepsilon) = 0,\ (j \geqq 1),\ N_a^{(j)}(x) = 0\left(\frac{1}{\varepsilon^j}\right)\ (j \geqq 0) \tag{4}$$

und $N_a(x) = 0$ für $x > a - \varepsilon$. Das analoge gilt für $N_b(x)$.

Es ist nun weiter

$$|f'(x)| \geqq \tfrac{1}{2}\,|f''(a)|\,(x - a) \text{ für } a \leqq x \leqq a + \varepsilon, \tag{5}$$

denn es ist ja $f'(x) = (x - a)\,[f''(a) + (x - a)\, f'''(a + \vartheta(x - a))]$, also $|f'(x)| \geqq (x - a)\,[\,|f''(a)| - \varepsilon C_2]$ w. z. b. w. Ebenso gilt

$$|f'(x)| \geqq \tfrac{1}{2}\,|f''(x)|\,(b-x) \text{ für } b-\varepsilon \leqq x \leqq b. \qquad (5')$$

Weiters ist in $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $|f'(x)| \geqq \operatorname{Min}(\tfrac{1}{2}\,|f''(a)|\,\varepsilon, \tfrac{1}{2}\,|f''(b)|\,\varepsilon, C_1)$ also $\geqq C_3\,\varepsilon$. Es ist nun

$$\int_a^b g\, e^{i\omega f}\, dx = \int_a^b N_a\, g\, e^{i\omega f}\, dx + \int_a^b N_b\, g\, e^{i\omega f}\, dx + \int_a^b g\, H\, e^{i\omega f}\, dx, \qquad (6)$$

wo $H = g\,(1 - N_a - N_b)$.

Es ist für $0 \leqq j \leqq 3\,(k+1)$, $H^{(j)}(a) = H^{(j)}(b) = 0$, $H^{(j)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-j})$. Wir definieren $\dfrac{H^{(j)}(a)}{(f')^{2i-j}(a)} = 0$, wenn $i \geqq j$, analog an der Stelle b.

Es sei weiters

$H_0 = H$, $H_{i+1}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{H_i}{f'}\right)$. Es ist, wie man mittels vollständiger Induktion zeigt

$$H_i(x) = \sum_{j=0}^{i} H^{(j)}(x)\,(f')^{j-2i}\, C_j\,(f', \ldots, f^{(i+1)}),$$

wo C_j ein Polynom in seinen Argumenten ist. Es ist $H_i(a) = H_i(b) = 0$, $H_i(x)$ ist stetig, differenzierbar und $H_i(x) = 0\,(\varepsilon^{-2i})$. Es ist nämlich $H^{(j)}(x) = \dfrac{(x-a)^{2i-j}}{(2i-j)!}\, H^{(2i)}(a + \vartheta\,(x-a))$. Nun ist für x in $[a, a+\varepsilon]$, $|f'(x)| \geqq C_4\,(x-a)$, $H^{(2i)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-2i})$ und die C_j sind beschränkt. Daraus folgt diese Behauptung für $[a, a+\varepsilon]$. Ebenso wird dies für $[b-\varepsilon, b]$ gezeigt. Für $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ ist die Behauptung klar.

Es ist für $j \leqq 3\,k + 2$

$$\int_a^b H\, e^{i\omega f}\, dx = 0\,((\omega\,\varepsilon^2)^{-j}) \quad (j \geqq 0) \qquad (7)$$

Denn es ist, wie man durch mehrfache partielle Integration feststellt $\int_a^b H\, e^{i\omega f}\, dx = \dfrac{1}{(i\,\omega)^j} \int_a^b H_j\, e^{i\omega f}\, dx$. Aus $H_j = 0\,(\varepsilon^{-2j})$ folgt sofort die Behauptung.

Auch (7) folgt wegen $\varepsilon = C\,\omega^{-\frac{1}{3}}$ mit $j = [\frac{3}{2}\,(k+2)] + 1$

$$\int_a^b H\, e^{i\omega f}\, dx = 0\,(\omega^{-\frac{k}{2}-1}) \qquad (7')$$

In (6) sind also nur mehr die ersten beiden Integrale zu betrachten. Es sei

$I_1 = \int\limits_a^{a+\varepsilon} B\, e^{i\,\omega\, f}\, dx$, wo $B = N_a\, g$. Es ist $B^{(j)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-j})(j \leqq 3\,(k+1))$.

Wir setzen $p\,(x) = f\,(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2} f''\,(a)$. Nun ist

$$f\,(x) = p\,(x) + \frac{1}{3!}\,(x-a)^3\, f'''\,(a + \vartheta\,(x-a))$$

also für $0 \leqq x - a \leqq \varepsilon$

$$f^{(s)}\,(x) - p^{(s)}\,(x) = 0\,(\varepsilon^{3-s}),\ (0 \leqq s \leqq 3),\ f^{(s)}\,(x) - p^{(s)}\,(x) = 0\,(1)\,(s > 3). \tag{8}$$

Setzen wir $L = B\, e^{i\,\omega\,(f-p)}$, so wird $I_1 = \int\limits_a^{a+\varepsilon} L\, e^{i\,\omega\, p}\, dx$. Nun ist $\dfrac{d}{dx}\,(e^{i\,\omega\,(f-p)}) = i\,\omega\, e^{i\,\omega\,(f-p)}\,(f' - p') = 0\,(\varepsilon^2\,\omega) = 0\,(\omega^{\frac{1}{3}})$, allgemein

$$\frac{d^j}{dx^j}\,(e^{i\,\omega\,(f-p)}) = 0\,(\omega^{\frac{j}{3}}), \tag{9}$$

wie man mittels vollständiger Induktion zeigt, denn es ist ja

$$\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}\,(e^{i\,\omega\,(f-p)}) = i\,\omega\,\Sigma\,\binom{j}{k}\,\frac{d^k\, e^{i\,\omega\,(f-p)}}{dx^k}\,(f^{(j-k+1)} - p^{(j-k+1)}).$$

Weiter ist

$$L^{(j)} = 0\,(\omega^{\frac{j}{3}}) \qquad (j \leqq 3\,(k+1)), \tag{10}$$

denn nach (9) und wegen $B^{(j)} = 0\,(\varepsilon^{-j})$ ist

$$L^{(j)} = \Sigma\,\binom{j}{k}\, B^{(k)}\,\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\, e^{i\,\omega\,(f-p)} = \Sigma\, 0\,(\varepsilon^{-k}\,\omega^{\frac{j-k}{3}}) = (\omega^{\frac{j}{3}}).$$

Wir setzen nun für $x \geqq 0$

$$\begin{cases} \psi_0\,(x) = e^{i\,\omega\, p} \\ \psi_{\mu+1}\,(x) = \dfrac{1}{\mu!}\displaystyle\int\limits_{C\,(x)} (\zeta - x)^\mu\, e^{i\,\omega\, p\,(\zeta)}\, d\,\zeta \qquad (\mu \geqq 0) \end{cases} \tag{11}$$

wo $C\,(x)$ der Weg $\zeta\,(x,\, t) = \dfrac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\,(t + \dfrac{x^2}{t}\, i)\ (x \leqq t \leqq \infty)$. Für $x = 0$ sei stets $\dfrac{x^2}{t} = 0$. Es ist $\zeta\,(x,\, x) = x$. Weiter ist, da

$t^2 - \dfrac{x^4}{t^2} \geqq (t-x)^2$

$$|e^{i\omega p(\zeta)}| = e^{-\frac{\omega}{4}|f''(a)|(t^2-\frac{x^4}{t^2})} \leqq e^{-\frac{\omega}{4}|f'(a)|(t-x)^2}, \tag{11'}$$

also ist das in (11) auftretende Integral konvergent.

Weiters ist

$$\psi_{\mu+1}(x) = -\psi_\mu(x) \tag{12}$$

denn $\frac{1}{h}(\psi_{\mu+1}(x+h) - \psi_{\mu+1}(x)) = \frac{1}{h}[\int\limits_{c(x+h)} (\zeta-x-h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta -$

$- \int\limits_{c(x)} (\zeta - x - h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta] + \int\limits_{c(x)} \frac{(\zeta - x - h)^\mu - (\zeta - x)^\mu}{h} d\zeta.$

Der erste Teil ist $\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} (\zeta - x - h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta$, geht also mit $h \to 0$ gegen 0. Der zweite Teil geht aber mit $h \to 0$ gegen $-\psi_\mu(x)$ w. z. b. w.

Es ist, wenn $\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird

$$\psi_{\mu+1}(0) = \frac{e^{i\omega f(a)\frac{i(\mu+1)\pi}{4!}}}{\mu!} \int\limits_0^\infty \tau^\mu e^{-\frac{\omega}{2}|f''(a)|\tau^2} d\tau \tag{13}$$

also

$$\psi_{\mu+1}(0) = \frac{e^{i\omega f(a)}}{2(\frac{\omega}{2}|f''(a)|)^{\frac{\mu+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})}{\mu!} e^{-\frac{i(\mu+1)\pi}{4}} \tag{13'}$$

Aus (11') und (11) folgt noch

$$\psi_{\mu+1}(x) = 0(\omega^{-\frac{\mu+1}{2}}). \tag{14}$$

Wir gehen jetzt auf I_1 zurück und setzen $M(x) = L(x-a)$, $q(x) = p(x-a)$. Dann ist

$$f(a) = p(a) = q(0), M^{(j)}(0) = L^{(j)}(a) = g^{(j)}(a), M^{(j)}(\varepsilon) = L^{(j)}(a+\varepsilon) = 0 \tag{14'}$$

und nach (10) $L^{(j)}(x) = 0(\omega^{\frac{i}{3}})$.

Dann erhalten wir

$f(a) = p(a) = q(0)$, $M^{(j)}(0) = L^{(j)}(a)$, $M^{(j)}(\varepsilon) = L^{(j)}(a+\varepsilon)$ und nach (10) $L^{(j)}(x) = 0(\omega^{\frac{j}{3}})$.

Dann folgt durch partielle Integration

$$I_1 = \int_0^\varepsilon M e^{i\omega q}\,dx = \int_0^\varepsilon M \psi_0\,dx = M(0)\,\psi_1(0) + \int_0^\varepsilon M'\,\psi_1\,dx =$$
$$= \sum_{s=0}^{K} L^{(s)}(a)\,\psi_{s+1}(0) + \int_0^\varepsilon M^{(K+1)}\,\psi_{K+1}\,dx \tag{15}$$

wo $K = 3\,(k+1)$. Es ist

$$\int_0^\varepsilon M^{(K+1)}\,\psi_{K+1}\,dx = 0\,(\omega^{\frac{K+1}{3}})\;0\;(\omega^{-\frac{K+1}{2}})\,\varepsilon = 0\,(\omega^{-\frac{k}{2}-1})$$

Nun muß $L^{(s)}(a)$ betrachtet werden. Setzen wir für die n-te Ableitung von $e^{i\omega(f-p)}$ an der Stelle a, P_n, dann ist $P_0 = 1$, $P_1 = P_2 = 0$ und es ist (vgl. den Beweis von (9))

$$P_{n+1} = i\,\omega \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n}{r}\,P_r\,f^{(n-r+1)}(a) \tag{16}$$

Die P_n sind also Polynome in $i\,\omega$, und zwar nach (9) vom Grad $\left[\frac{n}{3}\right]$. Wir setzen daher $P_n = \sum_{t=0}^{n} K_{tn}\,(i\,\omega)^t$ mit $K_{00} = 1$, $K_{0n} = 0$ für $n \geqq 1$ und $K_{tn} = 0$, wenn $t > \left[\frac{n}{3}\right]$. Dann folgt aus (16)

$$K_{t+1,\,n+1} = \sum_{r=3t}^{n-2} \binom{n}{r}\,f^{(n-r+1)}(a)\,K_{t\,r} \tag{17}$$

also z. B. $K_{1n} = f^{(n)}(a)$. Weiter ist

$$L^{(s)}(a) = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n}\,g^{(s-n)}(a)\,P_n = \sum_{t=0}^{s} (i\,\omega)^t\,l_{ts} \text{ wo}$$
$$l_{ts} = \sum_{n=3t}^{s} \binom{s}{n}\,g^{(s-n)}(a)\,K_{tn} \tag{18}$$

also $l_{ts} = 0$ für $t > \frac{s}{3}$ und $l_{0s} = g^{(s)}(a)$.

Jetzt betrachten wir die Summe rechts in (15), wobei wir $\psi_{j+1}(0) = \Psi_{j+1}\,\omega^{-\frac{j+1}{2}}$ setzen, welche sich jetzt wegen (18) schreibt:

$$\sum_{s=0}^{K} \sum_{t=0}^{s} i^t\,\omega^{t-\frac{s+1}{2}}\,l_{ts}\,\Psi_{s+1} \tag{19}$$

Wir ordnen nach Potenzen von $\omega^{-\frac{1}{2}}$. Um den Koeffizienten A_j der $j+1$-ten Potenz zu erhalten ($j \geqq 0$) müssen wir alle Glieder in (19) nehmen, wo $s - 2\,t = j$ ist und erhalten daher $A_j = \sum_{t=0}^{j} i^t\,l_{t,\,j+2t}$

Ψ_{j+2t+1}, da für $t > j$, $l_{t,j+2t} = 0$. Dieser Ausdruck ist aber gerade der in (17) angegebene. Behalten wir in (19) nur die Potenzen mit $j \leqq k$ bei, so bekommen wir gerade $\Sigma_k(a)$, es ist also

$$I_1 = \Sigma_k(a) + 0\left(\omega^{-\frac{k}{2}-1}\right).$$

Bei dem Integral $\int\limits_{b-\varepsilon}^{b} N_b\, g e^{i\omega f}\, dx$ geht man analog vor. Es ist nur $\psi_{\mu+1}$ zu ersetzen durch

$$\frac{1}{\mu!}\int\limits_{x}^{\infty}(\zeta - x)^{\mu}\, e^{i\omega(f(b) - \frac{1}{2}f''(b)\zeta^2)}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\, dt$$

wo $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}}\left(t + \frac{x^2}{t}\, i\right)$. Beachtet man noch (7'), so ist alles gezeigt.

§ 3.

Es sei im R_m $(m \geqq 2)$ B ein konvexer Körper, der den Koordinatenursprung o im Innern enthält. Der Rand $S(B)$ von B sei durch gleichsinnig parallele Stützebenen umkehrbar eindeutig und $6\,m$-mal stetig differenzierbar auf die Einheitskugeloberfläche abgebildet. Die Distanzfunktion $f(x)$ und Stützfunktion $H(u)$ $(|u| = 1)$ sind also für $x \neq 0$, $u \neq 0$ $6\,m$-mal stetig differenzierbar. B selbst habe die Darstellung $f(x) \leqq 1$. Die Ableitungen von H nach den u_i, wo $u = (u_1, \ldots, u_m)$ sind, wenn ihre Ordnung $\leqq 6\,m$, auf der Kugel $|u| = 1$ gleichmäßig beschränkt, da sie stetig sind. Weiters ist $\inf H(u) > 0$ auf $|u| = 1$, da o innerer Punkt von B ist. Ist nun $K = r_1 \ldots r_{m-1}$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien r_i von $S(B)$, so machen wir die folgende Voraussetzung

$$\inf K = \varrho > 0 \text{ auf } S(B) \tag{1}$$

Man vergleiche zum Folgenden stets *Bonnesen-Fenchel*, Konvexe Körper (kurz *B. F.*).

Es soll nun

$$G = \int\limits_{B} e^{i\omega x_1}\, dx, \text{ bzw. } G_1 = \int\limits_{B}(m + i\omega x_1)\, e^{i\omega x_1}\, dx \tag{2}$$

für $\omega \geqq 1$ asymptotisch entwickelt werden.

Da sich der Rand von B auf $|u| = 1$ abbilden läßt, so ist auch K eine Funktion von u. Dann gilt für $k \leqq m + 3$

Satz 2: Es ist

$$G = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \left[e^{i\omega H_1} \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} + e^{-i\omega H_{-1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} \right] + 0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}-1}) \tag{3}$$

wo

$$H_{\pm 1} = H(\pm 1, 0, \dots 0),\; K_{\pm 1} = K(\pm 1, 0, \dots 0),$$

$$a_0 = \sqrt{K_1}\, e^{-i\frac{(m+1)\pi}{4}}\; b_0 = \sqrt{K_{-1}}\, e^{i\frac{(m+1)\pi}{4}} \tag{4}$$

$$G_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left[e^{i\omega H_1} \sum_{j=0}^{k} \frac{a'_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} + e^{-i\omega H_{-1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{b'_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} \right] + 0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}}) \tag{5}$$

wo

$$a_0' = H_1 \sqrt{K_1}\, e^{-\frac{(m-1)\pi}{4}},\; b_0' = H_{-1} \sqrt{K_{-1}}\, e^{i\frac{(m-1)\pi}{4}} \tag{6}$$

Zuerst schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 2: Es sei $Q = \sum_{i,k=1}^{s} A_{ik}\, l_i\, l_k$ eine positiv-definite Form. Es sei $D = \text{Det}\, A_{ik}$ und $C = \operatorname*{Max}_{i,k} A_{ik}$. Dann ist für alle $(l_1, \dots, l_s)$ mit $\Sigma\, l_i^2 = 1$

$$Q \geqq \frac{D}{(s\, C)^s} \tag{7}$$

Beweis: Die Eigenwerte von Q seien $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \dots \leqq \lambda_s$. Dann ist für alle $(l_1, \dots l_s)$ mit $\Sigma\, l_i^2 = 1$

$$Q \geqq \lambda_1 = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_s}{\lambda_2 \dots \lambda_s} \geqq \frac{D}{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)^s} \geqq \frac{D}{(s\, C)^s}$$

da $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = A_{11} + \dots + A_{ss} \leqq s\, C$ w. z. b. w.

Beweis von Satz 2: Nach dem *Gauß*schen Integralsatz ist

$$G = \frac{1}{\omega i} \int_{S(B)} e^{i\omega x_1}\, u_1\, do. \tag{8}$$

Dabei ist do das Oberflächenelement von $S\,(B)$ und u_1 die erste Komponente des normierten, nach außen gerichteten Normalenvektors u im Punkt $x = (x_1 \dots x_m)$. Es sei gleich $m > 2$. Es ist nun x auf $S\,(B)$ eine Funktion von u, da $S\,(B)$ auf $|\,u\,| = 1$ abgebildet ist. Es ist weiter $do = K\, d\sigma$, wo $d\sigma$ das Oberflächenelement von $E_m : |\,u\,| = 1$ (vgl.

$B. F.$ S. 63, Z. 6 v. u.) ist. Weiters sei $d\bar{\sigma}$ das Oberflächenelement der $m-1$-dimensionalen Einheitskugel E_{m-1}. Wir setzen nun

$$u_1 = \cos\vartheta,\ u_j = \sin\vartheta\ a_j\ (j \geqq 2),\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ \sum_{j=2}^{m} a_j^2 = 1 \tag{9}$$

Dann folgt aus (8)

$$i\,\omega\, G = \int_{E_{m-1}} d\bar{\sigma} \int_0^{\pi} e^{i\,\omega\, x_1}\ K \cos\vartheta\, \sin^{m-2}\vartheta\, d\vartheta \tag{10}$$

Wir halten zunächst $a_2, \ldots a_m$ fest und betrachten nur das innere Integral in (10).

Es ist nun nach $B. F.$ S. 58 (1) $x_1 = \frac{\partial H}{\partial u_1}$, also

$$\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \sin\vartheta + \cos\vartheta \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial u_i} a_i \tag{11}$$

Nun gilt nach $B. F.$ S. 59, Z. 1 v. u. wegen der Homogenität von H

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = H,\ \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\, \partial u_j} = 0\ (j = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

Daraus folgt zunächst

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}(\pm 1, 0, 0 \ldots 0) = \pm H(\pm 1, 0, \ldots 0),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial u_j}\ (\pm 1, 0 \ldots 0) = 0 \tag{13}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial u_i} \cos\vartheta = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial u_i} u_1 = -\sum_{k=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2\, \partial u_k} u_k,$$

also folgt aus (11)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta\, F(\vartheta, a_i) \tag{14}$$

wo

$$F(\vartheta, a_i) = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \sum_{i,k=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\, \partial u_k} a_i a_k\ \left(\sum_{i=2}^{m} a_i^2 = 1\right) \tag{15}$$

Es ist nun nach $B. F.$ S. 62 (5) K die Summe aller $m-1$-reihigen Hauptminoren h der Matrix $(H_{ik}) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_i\, \partial u_k}\right)$. Nun ist nach (1) inf $K = \varrho > 0$, also $K \geqq \varrho$ auf $|u| = 1$. Es muß also einer der Hauptminoren $h \geqq \frac{1}{m}\varrho > 0$ sein. Dann kann die quadratische Form $Q(z)$ in den Variablen z, deren Koeffizienten von den Elementen dieses Hauptminors gebildet werden, sicher nicht ausgeartet sein. Nun ist H konvex, also nach *B. F.* S. 18, Z. 1 v. u. $\sum\limits_{i,k=1}^{m} H_{ik} z_i z_k \geqq 0$, also muß das obige Q sogar positiv-definit sein. Nun sind nach Voraussetzung die H_{ik} auf $|u| = 1$ beschränkt, also $\leqq C$.

Dann gilt nach Hilfssatz 2

$$Q(z) \geqq \frac{\varrho}{(m-1)(m\,C)^{m-1}} = \varrho_1 \tag{16}$$

auf der $m-1$-dimensionalen Einheitskugel, da $s = m-1$. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden

1. Es sei Q gerade die Form $\sum\limits_{i,k=2}^{m} H_{ik} z_i z_k$, dann ist, da $H_{11} \geqq 0$

$$F \geqq \varrho_1 \tag{17}$$

für alle $a_2, \ldots, a_m$ mit $\Sigma a_i^2 = 1$.

2. Ist das obige Q nicht von dieser Gestalt, so muß H_{11} als ein Koeffizient in Q auftreten und es ist dann wegen (16) $H_{11} \geqq \varrho_1$, also gilt wieder (17).

Es besitzt also nach (14) $\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta}$ nur die Nullstellen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, d. h. für $u = (1, 0 \ldots 0)$ und $u = (-1, 0, \ldots, 0)$.

Weiters ist

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \vartheta^2}\Big|_0 = -F(0, a_i) \leqq -\varrho_1 < 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \vartheta^2}\Big|_\pi = F(\pi, a_i) \geqq \varrho_1 > 0$$

wo ϱ_1 von den a_i nicht abhängt.

Wir können also Hilfssatz 1 aus § 2 anwenden mit $a = 0$, $b = \pi$, $f(\vartheta) = x_1$, $g = K \sin^{m-2}\vartheta \cos\vartheta$. In $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ besitzt g die Entwicklungen

$$g(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{m-2}\left[K_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta}\right)_0 \vartheta + \ldots\right] \\ -(\pi-\vartheta)^{m-2}\left[K_{-1} + \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta}\right)_\pi (\pi-\vartheta) + \ldots\right], \end{cases}$$

also

$$g^{(j)}(\vartheta) = 0 \text{ für } \vartheta = 0 \text{ und } \pi \ (0 \leqq j \leqq m-2),\ g^{(m-2)}(0) = (m-2)!\ K_1,$$
$$g^{(m-2)}(\pi) = (-1)^{m-1}(m-2)!\,K_{-1}. \tag{19}$$

Setzen wir noch $F(0, a_i) = F_1$, $F(\pi, a_i) = F_{-1}$, so ist also

$$\int_0^\pi e^{i\omega x_1} K \cos\vartheta \sin^{m-2}\vartheta\, d\vartheta$$
$$= \tfrac{1}{2} e^{i\omega x_1(1,0,\ldots,0)} \sum_{j=m-2}^{k+m-2} A_j\, e^{-\frac{i(j+1)}{4}}\, \omega^{-\frac{j+1}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} e^{i\omega x_1(-1,0,\ldots,0)} \sum_{j=m-2}^{k+m-2} (-1)^j B_j\, e^{\frac{i(j+1)\pi}{4}}\, \omega^{-\frac{j+1}{2}} + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m+k}{2}}}\right)$$
$$\tag{20}$$

Dabei gilt $0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}})$ gleichmäßig in den a_i.

Daraus folgt, wenn wir beachten, daß $x_1(\pm 1, 0 \ldots 0) = \frac{\partial H}{\partial u_1}(\pm 1, 0 \ldots 0) = \pm H_{\pm 1}$ nach (13),

$$i\omega G = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j^* e^{i\omega H_1} + b_j^* e^{-i\omega H_{-1}}}{\omega^{\frac{j}{2}}} + 0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}}). \tag{21}$$

Dabei ist

$$\begin{cases} a_0^* = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\,(m-2)!}\, 2^{\frac{m-1}{2}}\, e^{-\frac{i(m-1)\pi}{4}} \displaystyle\int_{E_{m-1}} \frac{g^{(m-2)}(0)}{F_0^{\frac{m-1}{2}}}\, d\bar\sigma \\[2ex] b_0^* = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\,(m-2)!} (-1)^{m-2}\, 2^{\frac{m-1}{2}}\, e^{\frac{i(m-1)\pi}{4}} \displaystyle\int_{E_{m-1}} \frac{g^{(m-2)}(\pi)}{F_0^{\frac{m-1}{2}}}\, d\bar\sigma \end{cases} \tag{22}$$

Es soll nun a_0^* und b_0^* bestimmt werden. Nach (13) ist $F(0, a_2, \ldots a_m) = \sum_{i,j=2}^{m} H_{ik}(1, 0 \ldots 0)\, a_i a_k$. Wegen (9) haben wir nur $\int_{E_{m-1}} \frac{d\bar\sigma}{F_1^{\frac{m-1}{2}}}$ zu berechnen. Durch eine orthogonale Transformation können wir F_1 überführen in $\sum_{i=2}^{m} \lambda_i a_i^2$ $(\lambda_i > 0)$. Dabei ist $\lambda_2 \ldots \lambda_m = K_1 = K(1, 0, \ldots, 0)$, da die Hauptminoren von (H_{ik}) für $(1, 0 \ldots 0)$ verschwinden bis auf Det. H_{ik} $(2 \leqq i, k \leqq m)$.

Wir gehen nun von dem absolutkonvergenten Integral

$$I = \int_{R_{m-1}} e^{-\sum_{i=2}^{m} \lambda_j x_j^2} d x_2 \dots d x_m \tag{23}$$

aus. Es ist einerseits

$$I = \prod_{i=2}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i x_i^2} d x_i = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{\lambda_2 \dots \lambda_m}} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{K_1}}$$

Führen wir andererseits in I Polarkoordinaten ein: $x_j = r a_j$ $(j = 2, \dots m)$, $\Sigma a_j^2 = 1$, so kommt

$$I = \int_0^\infty r^{m-2} d r \int_{E_{m-1}} e^{-r^2 \sum_{i=2}^{m} \lambda_i x_i^2} d \bar{\sigma} = \tfrac{1}{2} \Gamma \left(\frac{m-1}{2}\right) \int_{E_{m-1}} \frac{d \bar{\sigma}}{(\Sigma \lambda_i x_i^2)^{\frac{m-1}{2}}},$$

also erhalten wir wegen (19) aus (22)

$$a_0^* = \sqrt{K_1}\; e^{-i\frac{(m-1)\pi}{4}}, \; b_0^* = -\sqrt{K_{-1}}\, e^{i\frac{(m-1)\pi}{4}}.$$

Damit erhalten wir für G (3) und (4), wenn wir $a_i = -i a_i^*$, $b_i = i b_i^*$ setzen. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Bei G_1 gehen wir analog vor. Es ist nach dem *Gauß*schen Integralsatz

$$G_1 = \frac{1}{i \omega} \int_S e^{i \omega x_1} (m - 1 + i \omega x_1) u_1 \, d o \tag{24}$$

Man braucht also nur $G_3 = \int_S u_1 x_1 e^{i \omega x_1} d o$ zu betrachten und erhält dann (5) und (6).

Man stellt sofort fest, daß der Satz und sein Beweis auch für $m = 2$ gilt, wenn man in (10) unter $\int_{E_{m-1}} d \sigma$ die Zahl 2 versteht.

Bemerkung: Betrachtet man das Integral $G_4^{\pm} = \int_B e^{\pm \omega x_1} d x$, so zeigt eine ganz analoge Rechnung, wo statt Hilfssatz 1 aus § 2 die *Laplace*sche Methode zu verwenden ist, daß

$$G_4^{\pm} \sim \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \sqrt{K(\pm 1, 0 \dots 0)}\, e^{\omega H(\mp 1, 0, \dots 0)}, (\omega \to \infty) \tag{25}$$

§ 4.

Es soll nun mittels Satz 1 und Satz 2

$$I_\delta = \int_B (1 - f^2)^\delta e^{i \omega x_1} d x \tag{1}$$

für $\delta \geqq 0$ asymptotisch dargestellt werden. Über B mögen wieder dieselben Voraussetzungen wie in § 3 gelten. Insbesondere ist $B: f(x) \leqq 1$. Dann gilt:

Satz 3:

$$I_\delta = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} 2^\delta \Gamma(\delta+1)}{\omega^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \left[\frac{\sqrt{K_1}}{H_1^\delta} e^{i\omega H_1 - \frac{i\pi}{2}\left(\delta + \frac{m+1}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{K_{-1}}}{H_{-1}^\delta} e^{-i\omega H_{-1} + \frac{i\pi}{2}\left(\delta + \frac{m+1}{2}\right)} \right] + 0\left(\omega^{-\frac{m}{2}-\delta-1}\right) + 0\left(\omega^{-m-2}\right) \tag{2}$$

Dabei ist $H_{\pm 1}, = H(\pm 1, 0, \ldots 0)$, ebenso ist $K_{\pm 1}$ erklärt (wie in § 3). Die Abschätzungen gelten in δ gleichmäßig in jedem Intervall $[0, \delta_0]$.

Unter stärkeren Voraussetzungen kann in (2) das zweite Fehlerglied weggelassen werden. Dies wird in der Fortsetzung dieser Arbeit gezeigt werden, wo die Integrale (1) nach einer anderen Methode behandelt werden.

Beweis: Für $\delta = 0$ wurde (2) bereits in § 3 Satz 2 bewiesen, da $I_0 = G$. Es kann also $\delta > 0$ vorausgesetzt werden. Nach § 1 (3) ist für $\delta > 0$

$$I_\delta = 2\delta \int_0^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{m+1} G(u)\, du, \tag{3}$$

wo $G(u) = \int_B e^{iu\omega x_1}\, dx$. Da $|G| \leqq V(B)$ (Volumen von B), so ist $\int_0^{\frac{1}{\omega}} (1-u^2)^{\delta-1} u^{m+1} G(u)\, du = 0\left(\omega^{-(m+2)}\right)$ Wir erhalten weiter, wenn wir § 3 (3) mit $k = m+3$ verwenden.

$$I_\delta = 2\delta\, 0\left(\frac{1}{\omega^{m+2}}\right) + \frac{2\delta (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \int_{\frac{1}{\omega}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{\frac{m+1}{2}} du$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m+3} \frac{a_j e^{i\omega u H_1} + b_j e^{-i\omega u H_{-1}}}{(u\omega)^{\frac{j}{2}}}\right) + 0\left(\frac{2\delta}{\omega^{m+\frac{5}{2}}} \int_{\frac{1}{\omega}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{-\frac{3}{2}} du\right) \tag{4}$$

Der letzte 0-Term in (4) ist $0\left(\frac{\delta+1}{\omega^{m+2}}\right)$, denn es ist

$$\int_{\omega^{-1}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{-\frac{3}{2}} du = \int_{\omega^{-1}}^{1/2} + \int_{1/2}^1 \leqq 4/3\sqrt{\omega} + \frac{2\sqrt{2}}{\delta}.$$

Wir haben nun weiter die Integrale

$$I_{\pm} = 2\,\delta \int_0^1 (1-u^2)^{\delta-1}\, u^{\frac{l}{2}}\, e^{\pm i\,\omega\, u\, H_{\pm 1}}\, du$$

zu betrachten, wo $l = m + 1 - j$, $0 \leqq j \leqq m + 3$. Wir beschränken uns auf I_+ und setzen $u = 1 - v$, dann kommt

$$I_t = 2^\delta\,\delta\, e^{i\,\omega\, H_1} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} v^{\delta-1} (1 - \frac{v}{2})^{\delta-1} (1-v)^{\frac{l}{2}}\, e^{-i\,\omega\, H_1\, v}\, d\,v. \qquad (5)$$

Wir betrachten nun in der komplexen v-Ebene den Bereich begrenzt durch die Strecke $v = t$ $(0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{\omega})$ auf der positiven reellen Achse, durch $v = t\, e^{-\frac{i\,\pi}{2}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ auf der negativ-imaginären Achse und den Viertelkreis $V: v = (1 - \frac{1}{\omega})\, e^{-it}\, (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$. Außerdem ist der Punkt $v = 0$ durch einen Kreisbogen V_ϱ vom Radius ϱ $(\varrho > 0)$ um diesen Punkt auszuschließen. In den so begrenzten Bereich ist der Integrand von (5) eindeutig und regulär, also das Integral über den Rand dieses Bereichs 0. Man sieht sofort, daß $\lim\limits_{\varrho \to 0} \int_{V_\varrho} = 0$.

Wir erhalten also

$$\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = e^{-\frac{i\,\pi}{2}\,\delta} \int_0^{1-\omega^{-1}} t^{\delta-1} (1 + \frac{t}{2}\, i)^{\delta-1} (1 + i\,t)^{\frac{l}{2}}\, e^{-\omega\, H_1\, t}\; d\,t + \int_V. \qquad (6)$$

Nun ist

$$\left| \int_V \right| \leqq (1 - \frac{1}{\omega})^\delta\; 5\; (\frac{8}{5})^{\delta-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 1 - (1 - \frac{1}{\omega})\, e^{-it} \right|^{\frac{l}{2}} e^{-\omega\, H_1 \sin t}\, dt. \text{ Da}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \leqq \left| 1 - (1 - \frac{1}{\omega})\, e^{-it} \right|^2 = 1 + (1 - \frac{1}{\omega})^2 - 2\,(1 - \frac{1}{\omega}) \cos t \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\omega^2} + t^2 \qquad (7)$$

wegen $\cos t \geqq 1 - \frac{t^2}{2}$, so ist

$$\left| \int_V \right| \leqq 5\; (\frac{8}{5})^{\delta-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\omega^2} + C\,.\,t^2)^{\frac{l}{4}}\, e^{-\omega\, H_1\, \sin t}\; dt \leqq 5\; (\frac{8}{5})^{\delta-1}$$

$$\int_0^{\infty} (\frac{1}{\omega^2} + C\, t^2)^{\frac{l}{4}}\, e^{-\frac{2}{\pi}\,\omega\, H_1\, t}\, d\,t$$

wo C zwischen 0 und 1 liegt. Wir setzen nun $t = \frac{\tau}{\omega}$ und erhalten

$$\left|\int_v\right| \leqq \frac{25_c{}^{\delta}}{8\,\omega^{\frac{l}{2}+1}} \int_0^{\infty} (1 + C\,\tau^2)^{\frac{l}{4}}\, e^{-\frac{2}{\pi} H_1 t}\, d\,t = 0\,\Bigl(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\Bigr).$$ Dabei

wurde $c = \frac{8}{5}$ gesetzt und benutzt, daß H auf $|u| = 1$ nach unten beschränkt ist.

Nun betrachten wir das Integral rechts in (6). Entwickeln wir $(1 + \frac{t}{2}\,i)^{\delta-1}\,(1 + t\,i)^{\frac{l}{2}}$ bis zur ersten Potenz in t, so erhalten wir

$$e^{\frac{i\pi}{2}\delta} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\delta-1}\, e^{-\omega H_1 t}\, d\,t + 0\,\Bigl(\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\delta}\, e^{-\omega H_1 t}\, d\,t\Bigr) + \\ + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{8}$$

Nun ist für $\gamma \geqq 0$, $\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\gamma-1}\, e^{-\omega H_1 t}\, d\,t = \int_0^{\infty} - \int_{1-\frac{1}{\omega}}^{\infty}$. Nun ist

$$\int_{1-\frac{1}{\omega}}^{\infty} t^{\gamma-1}\, e^{-\omega H_1 t}\, d\,t \leqq \frac{1}{(\omega\,H_1)^{\gamma}} \int_{\omega H_1}^{\infty} t^{\gamma-1}\, e^{-t}\, d\,t \leqq \\ \frac{1}{(\omega\,H_1)^{\gamma+1}} \int_0^{\infty} t^{\gamma}\, e^{-t}\, d\,t.$$

Es ist also

$$\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\gamma-1}\, e^{-\omega H_1 t}\, d\,t = \frac{\Gamma(\gamma)}{(\omega\,H_1)^{\gamma}} + 0\left(\frac{1}{(\omega\,H_1)^{\gamma+1}}\right).$$

Wenden wir dies für $\gamma = \delta$ und $\delta + 1$ an, so erhalten wir

$$e^{\frac{i\pi}{2}\delta} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = \frac{\Gamma(\delta)}{(\omega\,H_1)^{\delta}} + 0\left(\frac{1}{(\omega\,H_1)^{\delta+1}}\right) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{9}$$

also

$$I_{\pm} = \frac{2^{\delta}\,\Gamma(\delta+1)\, e^{\pm i\,\omega H_{\pm 1}}}{(\omega\,H_{\pm 1})^{\delta}}\,\Bigl(1 + 0\,\Bigl(\frac{1}{\omega}\Bigr)\Bigr) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{10}$$

Bei I_- ist einfach der Bereich in der komplexen v-Ebene zu nehmen, der aus dem bei I_+ verwendeten durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht. Setzen wir dies alles in (4) ein, so kommt

$$I_\delta = \frac{2^\delta \Gamma(\delta+1)(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{j=0}^{m+3} \frac{1}{\omega^{\delta+\frac{j}{2}}} \left(\frac{a_j e^{i(\omega H_1 - \frac{\pi}{2}\delta)}}{H_1^\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_j e^{-i(\omega H_{-1} - \frac{\pi}{2}\delta)}}{H_{-1}^\delta} \right) + \frac{1}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \left| \sum_{j=0}^{m+3} 0 \left(\frac{1}{\omega^{\delta+1+\frac{j}{2}}} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{m+3} 0 \left(\frac{1}{\omega^{\frac{j}{2}+\frac{m+1-j}{2}+1}} \right) + 0 \left(\frac{1}{\omega^{m+2}} \right) \tag{11}$$

Die Glieder in der Summe für $j \geqq 1$ und der erste 0-Term sind $0\left(\frac{1}{\omega^{\delta+\frac{1}{2}}}\right)$, der zweite 0-Term ist $0\left(\frac{1}{\omega^{m+2}}\right)$. Setzt man für a_0 und b_0 ihre Werte nach § 3 (4) ein, so erhält man (2) w. z. b. w.

Man kann mittels der Sätze 1 und 2 auch asymptotische Entwicklungen für $\int\limits_D \Phi(f) e^{i\omega x_1} dx$ aufstellen, wenn $\Phi(u)$ genügend oft differenzierbar ist. Wir beschränken uns, um ein Beispiel zu geben, auf den Fall, daß $\Phi(1) \neq 0$ ist. Dann gilt

Satz 4

$$I = \int\limits_B \Phi(f) e^{i\omega x_1} dx = \Phi(1) \int\limits_B e^{i\omega x_1} dx + 0(\omega^{-\frac{m}{2}-1}) \tag{12}$$

wenn $\Phi(u)$ mindestens zweimal differenzierbar ist.

Beweis: Aus § 1 (1) folgt durch partielle Integration

$$I = \Phi(1) G(1) - \int_0^1 \Phi'(u) u^m G(u) du. \tag{13}$$

Dann folgt aus § 3 (3) mit $k = 0$, wenn wir beachten, daß

$$\int^{\omega-\frac{1}{2}} \Phi'(u) u^m G(u) du = 0(\omega^{-\frac{m}{2}-1}),$$

$$\int_0^1 \Phi'(u) u^m G(u) du = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} [a_0 \int_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^1 \Phi'(u) u^{\frac{m-1}{2}} e^{i\omega u H_1} du +$$

$$+ b_0 \int\limits_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^{1} \Phi'(u)\, u^{\frac{m-1}{2}}\, e^{-i\omega u H_1}\, du] + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right) \int\limits_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^{1} \Phi'(u)\, u^{\frac{m}{2}-1}\, du)$$

$$+ 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right) = 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right),$$

da $m \geqq 2$. Man sieht die Abschätzung ein, wenn man die auftretenden Integrale partiell integriert. Damit ist bereits alles gezeigt.

§ 5.

Bis jetzt wurden nur Integrale von der Gestalt $\int\limits_B \Phi(f)\, e^{i\omega x_1}\, dx$ betrachtet. Für die Anwendungen benötigen wir aber Integrale von der allgemeinen Gestalt $\int\limits_{B_t} \Phi(f)\, e^{ilx}\, dx$, wo $B_t : f(x) \leqq t$ für großes $|l|\, t$, insbesondere für $\Phi(f) = (t^2 - f^2)^\delta$ $(\delta \geqq 0)$. Wir wollen uns gleich auf diese, also auf

$$I_\delta = \int\limits_{f \leqq t} (t^2 - f^2)^\delta\, e^{ilx}\, dx \quad (\delta \geqq 0) \tag{1}$$

beschränken. Dabei ist $B_1 = B : f \leqq 1$. Für B mögen wieder die Voraussetzungen von § 3 gelten. Wir können schreiben

$$I_\delta = t^{2\delta+m} \int\limits_B (1 - f^2)^\delta\, e^{it|l|\, e_l x}\, dx, \quad \text{wo } e_l = \frac{l}{|l|}.$$

Durch eine orthogonale Drehung A können wir erreichen, daß e_l übergeht in $(1, 0, \ldots 0)$. Dabei geht B über in $B' = A\, B$ und es wird

$$I_\delta = t^{2\delta+m} \int\limits_B (1 - f'^2(x))^\delta\, e^{it|l|\, x_1}\, dx, \tag{2}$$

wo f' Distanzfunktion von B'. Jetzt können wir mit $\omega = t\,|l|$ auf (2) Satz 3, § 4 anwenden. Dies ist möglich, da B' dieselben Voraussetzungen wie B erfüllt. Denn zunächst ist $\inf K$ auf $|u| = 1$ eine Drehinvariante, also auch $\inf K'$. Weiter sind alle $6\,m$ Ableitungen von H', wo H' Stützfunktion von B', beschränkt, denn diese sind Linearkomposita in den Ableitungen von H mit Koeffizienten, welche Produkte der Elemente von A sind. Da A orthogonal, so sind diese Produkte und damit auch die Ableitungen von H' beschränkt. Machen wir nun die Drehung wieder rückgängig, so ist in (2) überall der Vektor $(1, 0, \ldots 0)$ durch e_l zu ersetzen und wir erhalten also

Satz 5: Es ist für $\delta \geqq 0$

$$\int\limits_{(x)\leqq t} (t^2 - f^2(x))^\delta e^{i l x} d x = \frac{(2\pi t)^{\frac{m-1}{2}} (2t)^\delta \Gamma(\delta+1)}{|l|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} [C_1 e^{i|l|tH(e_l)-\alpha} +$$

$$+ C_2 e^{-i|l|tH(e_{-l})+\alpha}] + 0\left(\frac{t^{\frac{m}{2}+\delta-1}}{|l|^{\frac{m}{2}+\delta+1}}\right) + 0\left(\frac{t^{2\delta-2}}{|l|^{m+2}}\right) \tag{3}$$

Dabei ist

$$e_l = \frac{l}{|l|}, \alpha = \frac{i\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}), C_1 = \frac{\sqrt{K(e_l)}}{(H(e_l))^\delta}, C_2 = \frac{\sqrt{K(-e_l)}}{(H(-e_l))^\delta} \tag{3'}$$

Die Abschätzung ist gleichmäßig in δ in jedem Intervall $[0, \delta_0]$. Ist insbesondere B symmetrisch mit o als Mittelpunkt, so ist das Hauptglied in (3), wenn $t = 1$

$$2\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} 2^\delta \Gamma(\delta+1)}{|l|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \frac{\sqrt{K(e_l)}}{(H(e_l))^\delta} \cos(|l| H(e_l) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})) \tag{3''}$$

Dies ist für die Kugel wohlbekannt, da $I_\delta = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \frac{J_{\frac{m}{2}+\delta}(|l|)}{|l|^{\frac{m}{2}+\delta}}$

ist, wo J rechts die *Bessel*sche Funktion 1. Art ist. Hier kann das Restglied bedeutend schärfer angegeben werden. Für das Integral $G_4(\pm l) = \int\limits_B e^{\pm l x} d x$ erhält man mittels § 3 (25)

$$G_4(\pm l) = \int\limits_B e^{\pm l x} d x \sim \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{|l|^{\frac{m+1}{2}}} \sqrt{K(\pm e_l)}\, e^{|l| H(\pm e_l)} \tag{4}$$

Daraus folgt

$$\overline{\lim_{|l|\to\infty}} \frac{\ln G_4(\pm l)}{|l|} = H(\pm l) \tag{5}$$

Dies steht mit den allgemeinen Untersuchungen von *Plancherel-Polya*[6] in Einklang. Dort wird (5) für beliebige konvexe Körper bewiesen.

Es sollen noch Abschätzungen für $G = \int\limits_B e^{i\omega x_1} d x$ und $G_1 = \int\limits_B e^{i\omega x_1} (m + i\omega x_1) d x$ gegeben werden, die auch dann gelten, wenn nur auf B der *Gauß*sche Integralsatz anwendbar ist.

---

[6] Commentarii Helvetici 9.

Satz 6: Es ist, wenn $\omega \neq 0$

$$|G| \leqq \frac{S(B)}{|\omega|}, \; |G_1| \leqq C(B) \tag{6}$$

Dabei ist $S(B)$ die Oberfläche von B und $C(B)$ eine Konstante, die nur von B abhängt.

Beweis: Die Abschätzung von G folgt sofort aus § 3 (8). Bei G_1 sieht man dies so: Für $|\omega| \leqq 1$ ist

$$|G_1| \leqq \int_B (m + |x_1|)\, d\, x = C_1(B).$$

Ist $|\omega| \geqq 1$, so folgt aus § 3 (24)

$$|G_1| \leqq (m-1)\, S(B) + \int_{S(B)} |x_1|\, d\, o = C_2(B) \text{ w.z.b.w.}$$

§ 6.

Es sei wieder B_t der Bereich $f(x) \leqq t$, $B_1 = B$ ist dann der Eichkörper. Sein Volumen bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}$. Weiter sei A eine Matrix mit Det. $A = 1$. $\varphi(x)$ sei eine integrierbare Funktion auf B_t, die außerhalb B_t verschwindet und c eine Zahl > 0.

Mit g, bzw. l sollen im folgenden stets Gitterpunkte des R_m bezeichnet werden.

Wir bilden uns die in g periodische Funktion

$$\Phi(x) = \sum_g \varphi(c\, A\, (g - x)) \tag{1}$$

und entwickeln sie formal in eine Fouriersche Reihe

$$\Phi(x) \sim \sum_l a_l\, e^{2\pi i l x} \tag{2}$$

Ist E der Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots m)$, so ist

$$a_l = \int_E \Phi(x)\, e^{-2\pi i l x}\, d\, x = \frac{1}{c^m} \int_{Rm} \varphi(-A\, x)\, e^{-\frac{2\pi i}{c} l x}\, d\, x$$

also

$$a_l = \frac{1}{c^m} \int_{B_t} \varphi(x)\, e^{\frac{2\pi i k x}{c}}\, d\, x \quad (k = A^{*-1}) \tag{3}$$

Nach dem Vollständigkeitssatz ist $\Sigma\, |a_l|^2$ konvergent und es ist

$$\int_E \Phi^2\, d\, x = \sum_l |a_l|^2 \tag{4}$$

In (4) spezialisieren wir jetzt, indem wir $\varphi(x) = 1$ setzen und $c = 2$ nehmen. Dann ist $a_0 = \frac{1}{2^m} \int\limits_{B_t} d\,x = \frac{V}{2^m}$, wo $V = \Im t^m$ das Volumen von B_t. Weiter ist

$$\int\limits_E \Phi^2 d\,x = \int\limits_{R_m} \varphi(-2Ax)\, \sum_g \varphi(2A(g-x))\, d\,x = \frac{1}{2^m} \sum_g \int\limits_{B_t} \varphi(-x+2Ag)\, d\,x,$$

also wird aus (4)

$$2^m \,[V + \sum_g{}' \int\limits_{B_t} \varphi(-x+2\,A\,g)\, d\,x] = V^2 + \sum_l{}' \left|\int\limits_{B_t} e^{\pi\,i\,k\,x}\, d\,x\right|^2 \tag{5}$$

Dabei bedeutet Σ', daß bei der Summation $g = 0$, bzw. $l = 0$ auszulassen ist. Diese Formel stammt von *C. Siegel*[7].

§ 7.

Wir nehmen für $\varphi(x)$ wieder $\varphi(x) = 1$ auf B_t, 0 sonst, setzen aber $c = 1$. Dann stellt

$$\Phi(y) = \sum_g \varphi(A(g-y)) \sim \sum_l a_l\, e^{2\pi i l y} \tag{1}$$

die Anzahl der Gitterpunkte in $f(A(x-y)) \leqq t$ dar.

Es genügt, wenn y auf den Würfel

$$E: 0 \leqq y_i \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

beschränkt wird.

Wir betrachten gleich allgemeiner, wenn wir $t^2 = u$ setzen, die Funktion $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} (u - f^2(x))^\delta$ auf B_t. Damit ist, wenn $f(A\,x) = F(x)$ gesetzt wird, nach § 6 (2) und (3)

$$\Phi_\delta(y, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{F^2(g-y) \leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta \sim \sum_l L_\delta(l, u)\, e^{2\pi i l y} \tag{3}$$

wo

$$L_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int\limits_{f^2(x) \leqq u} (u - f^2(x))^\delta\, e^{2\pi i k x}\, d\,x. \tag{4}$$

Es ist

$$L_{\delta+1}(l, u) = \int\limits_0^u L_\delta(l, v)\, d\,v, \tag{5}$$

---

[7]) Acta Mathematica 64.

denn es ist

$$\int_0^u L_\delta(l, v)\, d\,v = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_0^u d\,v \int_{f \leqq \sqrt{v}} (v - f^2)^\delta\, e^{2\pi i k x}\, d\,x =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_{f \leqq \sqrt{u}} e^{2\pi i k x}\, d\,x \int_{f^2}^{u} (v - f^2)^\delta\, d\,v =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta+2)} \int_{f \leqq \sqrt{u}} e^{2\pi i k x}\, (u - f^2)^{\delta+1}\, d\,u = L_{\delta+1}.$$

Weiter ist

$$L_\delta(0, u) = \mathfrak{J}\, u^{\frac{m}{2}+\delta} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)} \tag{6}$$

denn nach § 1 (1) ist

$$\int_{f \leqq \sqrt{u}} (u - f^2(x))^\delta\, d\,x = m\, I \int_0^{\sqrt{u}} (u - v^2)^\delta\, v^{m-1}\, d\,v =$$

$$= \frac{m}{2} \mathfrak{J}\, u^{\frac{m}{2}+\delta} \frac{\Gamma(\delta+1)\, \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}$$

Wie (5) zeigt man

$$\Phi_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^u \Phi(v, y)\, (u - v)^{\delta-1}\, d\,v \tag{7}$$

wo $\Phi_0 = \Phi$ aus (1) ist

Daraus folgt

$$\Phi_{\delta+1}(y, u) = \int_0^u \Phi_\delta(y, v)\, d\,v \tag{7'}$$

Es wird jetzt gezeigt werden, daß in (3) für $\delta > \frac{m-1}{2}$ das $=$ Zeichen steht. Wir zeigen gleich folgenden allgemeineren Satz:

Satz 7: Ist h ein beliebiger Punkt, aber kein Gitterpunkt $\neq 0$, so gilt

$$\sum_{F^2(g-y) \leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta\, e^{-2\pi i h g} =$$

$$= \sum_l e^{2\pi i (l-h) y} \int_{f^2 \leqq u} e^{-2\pi i (k-\bar{h}) x}\, (u - f^2)^\delta\, d\,x, \tag{8}$$

wo $\bar{h} = A^{*-1} h$, wenn

1. $\delta > \frac{m-1}{2}$, und zwar für alle y in E. Die Reihe rechts in (8) konvergiert absolut und gleichmäßig in jeden Intervall $[u_1, u_2]$ wo $u_1 > 0$ und wenn

2. $\delta \geqq 0$, $h = 0$ für alle in E bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0.

Dabei ist vorausgesetzt, daß $B_1 = B$ alle Voraussetzungen von § 3 erfüllt.

Beweis: Es werde gesetzt

$$\Phi_\delta^* (y, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta + 1)} \sum_{F^2(g-y) \leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta e^{-2\pi i h g}, \ L_\delta^* (l, u) =$$
$$= \int_{f^2 \leqq u} e^{2\pi i (k - \bar{h}) x} (u - f^2)^\delta \, d\, x.$$

Dann gilt auch für diese Größen (5) und (7′).

Es soll zunächst der erste Teil der Behauptung bewiesen werden. Es sei also $\delta > \frac{m-1}{2}$. Dann ist die Reihe rechts in (8) absolut und in jedem Intervall $[u_1, u_2]$ in u gleichmäßig konvergent, denn es ist nach § 5 (3)

$$L_\delta^* (l, u) = u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta}{2}} \, 0 \left(\frac{1}{|k - \bar{h}|^{\frac{m+1}{2} + \delta}} \right) + u^{\delta - 1} \, 0 \left(\frac{1}{|k - \bar{h}|^{m+2}} \right). \tag{9}$$

Da $k - \bar{h} = A^{*-1} (l - h) \neq 0$, da h kein Gitterpunkt und $\sum_l \frac{1}{|k - \bar{h}|^\sigma}$ für $\sigma > m$ konvergent ist, so ist damit diese Behauptung gezeigt.

Wir betrachten die Funktion $\varphi_\lambda (x) = (u - F^2 (x - y))^\delta e^{-2\pi i h x}$ auf $F^2 (x - y) \leqq u$. Außerhalb dieses Bereiches sei $\varphi_\lambda = 0$. Man sieht weiter, daß alle Voraussetzungen des Satzes von *Bochner*[8] über die *Poisson*sche Summenformel erfüllt sind und wir erhalten nach diesem Satz (8).

Für $u = 0$ gilt sie selbstverständlich auch.

Es soll nun der zweite Teil der Behauptung gezeigt werden. Nach (3) ist die rechte Seite von (8) für $h = 0$ die Fouriersche Reihe der linken

[8] Mathematische Annalen 106.

Seite. Nun ist aber nicht nur $\sum_l |L_\delta|^2$ konvergent, wie es nach dem Vollständigkeitssatz sein muß (vgl. § 6 (4)), sondern sogar $\sum_l |L_\delta|^2 |l|^\eta$ für jedes η mit $0 < \eta < 1$. Denn es ist zunächst nach Hilfssatz 2 $|l| \leqq C(A) |k|$, wo C von A abhängt. Weiters ist nach (9) $\sum_l |L_\delta|^2 |k|^\eta$ konvergent. Daraus folgt aber nach einem Satz von *Kaczmarz*[9], daß die Reihe rechts in (8) für fast alle y in E konvergiert und gleich der linken Seite ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 8: Ist $f(x)$ die Distanzfunktion, $H(u)$ die Stützfunktion eines konvexen Körpers B, welcher den Voraussetzungen des § 3 genügt, und sind außerdem noch diese Funktionen für $x \neq 0$, $u \neq 0$ sogar analytisch, so gibt es eine periodische Funktion $X(x)$ (Periode 1 in $x_1, \ldots x_m$), so beschaffen, daß für seine Fourierkoeffizienten a_l gilt:

$$\overline{\lim_{R \succ \infty}} \left| \sum_{f(g) \leqq R} \left(1 - \frac{f^2(g)}{R^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} a_g \right| = + \infty \tag{10}$$

Für die Kugel wurde dies von *Bochner*[10] gezeigt. Für den Beweis ist folgendes zu beachten: $H(u)$ ist sicher nicht analytisch in $u = 0$ und dies ist auch die einzige Stelle nach Voraussetzung. Weiters haben wir in § 5 (3) eine asymptotische Formel für L_δ^*, welche in δ im Intervall $[\frac{m-1}{2}, \delta_0]$ $(\delta_0 > \frac{m-1}{2}$, beliebig) gilt. Dann kann der Beweis wie bei *Bochner* geführt werden.

§ 8.

Es soll jetzt für die Anzahl der Gitterpunkte $\Phi(y, u)$ von $f(A(x - y)) \leqq \sqrt{u}$ eine asymptotische Abschätzung gegeben werden:

Satz 9:

$$\Phi(y, u) = \mathfrak{J}\, u^{\frac{m}{2}} + O\left(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}\right) \tag{1}$$

Für das Ellipsoid wurde dies von *Landau*[11] gezeigt. Wir werden weitgehend seiner Methode folgen. Satz 7, § 7 gilt sicher für $\delta = [\frac{m+1}{2}] > \frac{m-1}{2}$ und $h = 0$. Es ist nach (5)

$$\frac{d^\delta L^\delta}{d u^\delta} = L_0 = \int_{f^2(x) \leqq u} e^{2\pi i k x}\, d x \text{ und nach § 5 (3)}$$

---

[9] Studia Mathematica 2.

[10] Transactions 40, S. 193.

$$L_\delta = u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\, 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\right), \tag{2}$$

da das zweite 0-Glied wegen $\frac{m+1}{2}+\delta \leqq m+1$ wegfällt. Wir setzen kurz $L_\delta = L$ und betrachten mit *Landau*

$$\Delta L = \sum_{\gamma=0}^{\delta} (-1)\, l^{\delta-\gamma} \binom{\delta}{\gamma} L(u+\nu\tau, y)$$

wo $\tau = u^{\frac{1}{m+1}}$, also $0 < \tau \leqq u$ ist. Dann ist zunächst nach (2)

$$\Delta L = u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\, 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\right)$$

Nun gibt es sicher ein τ' mit $u \leqq \tau' \leqq u+\delta\tau$, so daß $\Delta L = \tau^\delta L^{(\delta)}(\tau')$ Nun ist $L^{(\delta)} = L_0$, also folgt aus (2) mit $\delta = 0$

$$\Delta L = \tau^\delta u^{\frac{m-1}{4}}\, 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\right).$$

Zusammenfassend haben wir

$$\Delta L = \frac{u^{\frac{m-1}{4}}}{|k|^{\frac{m+1}{2}}} \operatorname{Min}\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{|k|}\right)^\delta, \tau^\delta\right). \tag{3}$$

Nach § 7 (8) und § 7 (6) gilt

$$\Phi_\delta(y, u) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\, u^{\frac{m}{2}+\delta} + \sum_l{}' e^{2\pi i l y} L_\delta(l, u).$$

Wenden wir auf Φ_δ die obige Δ-Operation an, welche wir rechts gliedweise anwenden können, so kommt

$$\Delta\Phi_\delta = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\, \Delta\left(u^{\frac{m}{2}+\delta}\right) + \sum_l{}' e^{2\pi i l y} \Delta L_\delta(l, u) \tag{4}$$

Dann ist nach (3)

$$\left|\Sigma' e^{2\pi i l y} \Delta L\right| \leqq C\, u^{\frac{m-1}{4}} \Sigma' \frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}}} \left(\operatorname{Min}\left(\frac{\sqrt{u}}{|k|}, \tau\right)\right)^\delta =$$

$$= C\Big[u^{\frac{m-1}{4}} \tau^\delta \sum_{|k| \leqq \frac{\sqrt{u}}{\tau}} |k|^{-\frac{m+1}{2}} + u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}} \sum_{|k| > \frac{\sqrt{u}}{\tau}} |k|^{-\frac{m+1}{2}-\delta}$$

Nun ist die erste Summe rechts $0\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau}\right)^{\frac{m-1}{2}}\right)$, die zweite

$$0\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau}\right)^{\frac{m-1}{2}-\delta}\right)$$

also folgt

$$\sum_l{}' e^{2\pi i l y} \varDelta L = 0\,(\tau^\delta\, u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}) \tag{5}$$

Weiter ist

$$\varDelta\,(u^{\frac{m}{2}+\delta}) = \tau^\delta \frac{d^\delta}{d\,u^\delta}(u^{\frac{m}{2}+\delta})\,\Big|_{u=\tau'} = \tau^\delta \frac{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\,\tau'^{\frac{m}{2}} =$$

$$= \tau^\delta \frac{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\,(u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m}{2}-1}\,\tau)),$$

wo τ' eine Zwischenstelle in $[u, u+\delta\,\tau]$. Es ist also

$$\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\,\varDelta\,(u^{\frac{m}{2}+\delta}) = \tau^\delta\,(u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})) \tag{6}$$

Daraus folgt, wenn wir (5) und (6) zusammenfassen

$$\varDelta\,\Phi_\delta = \tau^\delta\,(\mathfrak{J}\,u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})) \tag{7}$$

Nun ist, wenn wir das Argument y unterdrücken,

$$\varDelta\,\Phi_\delta = \int_u^{u+\tau} d\,u_1 \int_{u_1}^{u_1+\tau} du_2 \ldots \int_{u_{\delta-1}}^{u_{\delta-1}+\tau} \Phi\,(u_\delta)\,d\,u_\delta \tag{8}$$

Nun ist

$$\Phi\,(u) \leqq \Phi\,(u_\delta) \leqq \Phi\,(u+\delta\,\tau),\ \text{also nach (8)}$$

$$\tau^\delta\,\Phi\,(u) \leqq \varDelta\,\Phi \leqq \tau^\delta\,\Phi\,(u+\delta\,\tau). \tag{9}$$

Dann ist nach (7) einerseits $\Phi\,(u) \leqq \mathfrak{J}\,u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$, andererseits $\Phi\,(u+\delta\,u^{\frac{1}{m+1}}) \geqq \mathfrak{J}\,u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$.

Setzen wir $u+\delta\,u^{\frac{1}{m+1}} = v$, dann ist $u = v - \delta\,u^{\frac{1}{m+1}} = v + 0\,(v^{\frac{1}{m+1}})$ also $\Phi\,(v) \geqq \mathfrak{J}\,(v + 0\,(v^{\frac{1}{m+1}}))^{\frac{m}{2}} + 0\,(v^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}) = \mathfrak{J}\,v^{\frac{m}{2}} + 0\,(v^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$
also

$$\Phi(u, y) = \Im u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}) \text{ w.z.b.w.}$$

Wir wollen jetzt, und zwar für $y = 0$ weiter zeigen (vgl. *Landau*[11])
Satz 10: Es ist

$$\Phi(0, u) = \sum_{F^2(g) \leqq u} 1 = \Im u^{\frac{m}{2}} + \Omega\,(u^{\frac{m-1}{4}}) \tag{10}$$

Beweis: Wir setzen $R_\delta(0, u) = \Phi_\delta(0, u) - \Im u^{\frac{m}{2}+\delta} \dfrac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}$,

dann gilt wegen § 7 (7)

$$R_\delta = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^u R_0(v, 0)\,(u-v)^{\delta-1}\,d\,v. \tag{11}$$

Weiter ist nach § 7 (8) und § 7 (6), da R_δ reell ist,

$$R_\delta = \sum_l{}' \text{ Real } L_\delta(l\,u), \tag{12}$$

wenn $\delta > \dfrac{m-1}{2}$. Wir verwenden (12) zunächst für $\delta_1 = \delta + 1$, wo $\delta = [\dfrac{m+1}{2}]$. Dann ist nach (2), da $\delta_1 \leqq m + 2$, auf (12) angewendet

$$R_{\delta_1} = 0\,(u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta_1}{2}}). \tag{13}$$

Weiter ist nach § 5 (3)

$$\text{Real } L_\delta = \frac{u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}}{|\,k\,|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}[A_l \cos\alpha_l + B_l \cos\beta_l] + 0\left(\frac{u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta-1}{2}}}{|\,k\,|^{\frac{m}{2}+1+\delta}}\right) \tag{14}$$

wo $A_l = \dfrac{\Gamma(\delta+1)}{2\,\pi^{\delta+1}} \dfrac{\sqrt{K(e_k)}}{(H(e_k))^\delta}$, $B_l = \dfrac{\Gamma(\delta+1)}{2\,\pi^{\delta+1}} \dfrac{\sqrt{K(-e_k)}}{(H(-e_k))^\delta}$. Sie sind also positiv. Weiter ist

$$\alpha_l = 2\,\pi\sqrt{u}\,H(k) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}),\ \beta_l = 2\,\pi\sqrt{u}\,H(-k) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})$$

Weiter ist, da $\delta = [\dfrac{m+1}{2}]$, $\cos\alpha_l = (-1)^j \cos(2\,\pi\sqrt{u}\,H(k) - \dfrac{\pi}{4}\,\varepsilon)$, wo $j = [\dfrac{m+1}{2}]$ und $\varepsilon = 1$ wenn m gerade und sonst 0. Dasselbe gilt

[11] Preußische Sitzungsberichte 1915, Göttinger Nachrichten, S. 137 ff.

für $\cos \beta_l$. Setzen wir noch $2\pi \sqrt{u}\, H(k) - \frac{\pi}{4}\varepsilon = \alpha_l'$, $2\pi \sqrt{u}\, H(-k) - \frac{\pi}{4}\varepsilon =$ $= \beta'_l$ so wird (12)

$$R_\delta = (-1)^j\, u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}} \Sigma' \frac{A_l \cos \alpha_l' + B_l \cos \beta_l'}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} + 0\ (u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta-1}{2}}) \tag{15}$$

Es sei nun K eine natürliche Zahl. Dann kann man zu jedem $\eta > 0$ und zu jedem u_0 ein $u\,(\eta, K, u_0)$ so bestimmen, so daß

$$\cos \alpha_l' = \cos (2\,\pi \sqrt{u}\, H\,(\pm\, k) - \frac{\pi}{4}\,\varepsilon) > \cos \frac{\pi}{4}\,\varepsilon - \eta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} - \eta$$

für alle k mit $|\,k\,| \leqq K$ (Dirichletscher Approximationssatz. Dann ist aber, wenn Σ' die Summe in (15) rechts bedeutet

$$\Sigma' \geqq \underset{|k|\leqq K}{\Sigma'} - \underset{|k|>K}{\Sigma} \frac{A_l + B_l}{|\,k\,|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}, \text{ also}$$

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ \Sigma' \geqq (\frac{1}{\sqrt{2}} - \eta)\ \underset{|k|\leqq K}{\Sigma'} \frac{A_l + B_l}{|\,k\,|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} - \underset{|k|>K}{\Sigma} \frac{A_l + B_l}{|\,k\,|^{\frac{m+1}{2}+\delta}},$$

also für $\eta \to 0$, $K \to \infty$

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ \Sigma' \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\ \underset{k}{\Sigma'}\ \frac{A_l + B_l}{|\,k\,|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} > 0 \tag{16}$$

Daraus folgt, daß

$$R_\delta = \Omega\,(u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}) \tag{17}$$

Wäre nun (10) falsch, also

$$R_0 = o\,(u^{\frac{m-1}{4}}) \tag{18}$$

so wäre z. B. nach *M. Riesz*[12], wegen (13) und $0 < \delta < \delta_1$

$$R_\delta = o\,(u^{\frac{m-1}{4}(1-\frac{\delta}{\delta_1})}\, u^{(\frac{m-1}{4}+\frac{\delta_1}{2})\frac{\delta}{\delta_1}}) = o\ (u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}) \tag{19}$$

in Gegensatz zu (17). Damit ist alles gezeigt.

---

[12] Acta Szeged 1.

§ 9.

Es soll nun Satz 9 in gewisser Hinsicht für fast alle η aus E (§ 7 (2)) verschärft werden.

Satz 11: Es sei $\lambda(u)$ eine monoton wachsende Funktion mit $\lambda(u) \to \infty$, δ eine beliebige Zahl mit $0 \leqq \delta < \frac{2}{m-1}$ und $\{u_\nu\}$ eine solche Folge, so daß

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_\nu^{2+\delta}},$$

wo $\lambda_\nu = \lambda(u_\nu)$, konvergiert. Dann ist für fast alle y aus E

$$\Phi(y, u) = \Im u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m-1}{4}} \lambda(u)), \tag{1}$$

wo u die Folge $\{u_\nu\}$ durchläuft.

Für $\delta = 0$ wurde dieser Satz von *Kendall*[3] gezeigt, und zwar für $m = 2$.

Beweis: Nach § 7 (1) ist $\sum\limits_l L_0\, e^{2\pi i l y}$ die *Fourier*sche Reihe von $\Phi(y, u)$, also

$$R_0 = \Phi - \Im u^{\frac{m}{2}} \sim \sum_l{}' L_0(l, u)\, e^{2\pi i l y} \tag{2}$$

Es ist nach § 6 (4) $\sum\limits_l{}' |L_0|^2$ konvergent. Da aber nach § 8 (2) $L_0 = 0 \left(\frac{u^{\frac{m-1}{4}}}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\right)$, so ist sogar $\Sigma' |L_0|^\alpha$ mit $\alpha = 1 + \frac{1}{\delta+1}$ konvergent, da $\Sigma |k|^{-\frac{m+1}{2}\alpha}$ wegen $\frac{m+1}{2}\alpha > m$ konvergent. Dann folgt nach dem Satz von *Hausdorff-Yonny*[13], daß wegen $1 < \alpha < 2$

$$\sigma_\beta = [\int_E |R_0(y, u)|^\beta\, d\,y]^{\frac{1}{\beta}} \leqq [\Sigma' |L_0|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{3}$$

wo $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, also $\beta = 2 + \delta$. Wir erhalten also

$$\sigma_\beta^\beta = 0\,(u^{\frac{m-1}{4}\beta}). \tag{4}$$

[13] F. Riesz, Math. Zeitschrift 18.

Nun gehen wir wie *Kendall* vor. Ist, u fest, M die Teilmenge von E, wo $|R_0| \geqq \lambda\,\sigma_\beta$, dann ist

$$\sigma_\beta^\beta \geqq \int\limits_M |R_0|^\beta\, d\,y \geqq \lambda^\beta \sigma_\beta^\beta\, V(M),$$

wo $V(M)$ das Maß von M. Es ist also

$$V(M) \leqq \lambda^{-\beta}. \tag{5}$$

Um (1), also $R_0(y,u) \leqq C(y)\, u^{\frac{m-1}{4}}\, \lambda(u)$ für $u = u_\nu \to \infty$ und fast alle y zu zeigen, gehen wir so vor: Es ist nur zu zeigen, daß die Menge $\overline{M}$, für die $|R_0(y,u_\nu)| < \lambda_\nu\, \sigma_\beta^{(\nu)}$ $(\sigma_\beta^{(\nu)} = \sigma_\beta\,(u_\nu))$ für alle ν, mit $\sigma_\beta^{(\nu)} = 0\,(u_\nu^{\frac{m-1}{4}})$ das Maß 1 hat. Mit M^* soll stets das Komplement von M in E bezeichnet werden.

Dann ist $\overline{M} = \Sigma\, S_\nu$, wo $S_\nu = \sum\limits_{j=\nu}^{\infty} M_j^*$. Dabei ist

$$M_j = \text{Menge}\,\{\, |R_0(y,u)| \geqq \lambda_\nu\, \sigma_\beta^{(\nu)} \}$$

Es ist also $V(S_\nu^*) \leqq \sum\limits_{j=\nu}^{\infty} V(M_j) \leqq \sum\limits_{j=\nu}^{\infty} \lambda_j^{-\beta} < \eta$, wenn $\nu \geqq \nu_0(\eta)$ für jedes $\eta > 0$, also $V(\overline{M}) > 1 - \eta$ für alle η w.z.b.w.

§ 10.

Für $\beta = 2$ gilt nach § 6 (4) in § 9 (3) das Gleichheitszeichen, also wenn $\sigma = \sigma_2$ gesetzt wird

$$\sigma^2 = \Sigma'\, |L_0|^2 \tag{1}$$

Wir nennen mit *Kendall* σ die Streuung. Es ist

$$\frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1}{4\pi^2}\, \Sigma'\, \frac{1}{|k|^{m+1}}\, \Big(K(e_k) + K(-e_k) +$$

$$+ 2\sqrt{K(e_k)\,K(-e_k)}\, \cos\big(|k|\sqrt{u}\,(H(e_k) + H(-e_k) - \frac{\pi}{2}(m+1)\big) +$$

$$+ 0\,(u^{-\frac{1}{4}}) \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{U}\int\limits_1^U \frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{4}}}\, d\,u = \frac{1}{4\pi^2}\, \Sigma'\, \frac{K(e_k) + K(-e_k)}{|k|^{m+1}} + 0\,(U^{-\frac{1}{4}}) \tag{3}$$

also

$$\lim_{U \succ \infty} \frac{1}{U} \int_1^U \frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{2}}}\, d\,u = \frac{1}{4\,\pi^2} \,\Sigma' \,\frac{K(e_k) + K(-e_k)}{|\,k\,|^{m+1}} \tag{4}$$

Aus (3) folgt sofort

Satz 12: Es ist die Streuung $\sigma = \Omega\,(u^{\frac{m-1}{4}})$.

Wäre nämlich $\sigma = o\,(u^{\frac{m-1}{4}})$, so wäre die linke Seite von (3), $o\,(1)$ in Gegensatz zur rechten Seite.

Aus (3) läßt sich noch eine weitere Folgerung ziehen (vgl. dazu für $m = 2$ *Kendall*, S. 22 (31)): Es war ja σ, wie B_0 usw., von der Matrix A mit Det. $A = 1$ abhängig. Es sei nun A orthogonal. Dann bilden wir uns den Mittelwert $\bar{\sigma}^2$ aller σ^2, also

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\{A\}} \int \sigma^2\, d\,\{A\}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet d $\{A\}$ das Volumselement in der Gruppe der Drehungen und $\{A\}$ das Gesamtvolumen.

Nun ist $\int K\, d\,\sigma = S\,(B)$ (vgl. B. F. *S.* 63, Z. 6 v. u.), wo $d\,\sigma$ wie in § 3 das Oberflächenelement der m-dim. Einheitskugel $E\,m$ bedeutet. Es sei ω die Gesamtoberfläche. Dann folgt aus (3)[13a]

$$\lim_{U \succ \infty} \int_1^U \frac{\bar{\sigma}^2}{u^{\frac{m-1}{2}}}\, d\,u = \frac{S\,(B)}{2\,\pi^2\,\omega} \,\Sigma'_l \,\frac{1}{|\,L\,|^{m+1}} \tag{6}$$

Dabei ist, wie immer $B : f\,(x) \leqq 1$ und $\omega = \dfrac{2\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

§ 11.

Wir wollen nun unsere asymptotischen Formeln auf die Geometrie der Zahlen anwenden.

Es soll jetzt vorausgesetzt werden, daß B symmetrisch in bezug auf 0 ist. Weiter soll $m \not\equiv 1\ (4)$ sein, wo m die Dimension unseres Raumes ist. Die Anzahl der Gitterpunkte $\neq 0$ in $f\,(A\,x) \leqq t$, welche gerade ist, sei $2\,S$. Es ist $V = \mathfrak{J}\, t^n$ das Volumen von $B_t : f \leqq t$ und es werde $B_1 = B$ gesetzt. Dann gilt

Satz 13: Es gibt ein t_0, welches nur von B abhängt, so daß für alle $t > t_0$ und für alle Matrizen A mit Det. $A = 1$

$$V \leqq 2^{m-1}\,(S + 1) + \sqrt{4^{m-1}\,(S + 1)^2 - \varrho_t\, C}. \tag{1}$$

[13a] B besitze Mittelpunkt.

Dabei ist $\varrho_t = \inf_{B_t} K$ und $C > 0$ eine absolute Konstante, die nur von m abhängt.

Dieser Satz stellt für große t eine Verschärfung von

$$V \leqq 2^m (S + 1) \tag{2}$$

dar. (Verallgemeinerter Minkowkischer Satz.)

Beweis: Nach Satz 5, § 5 (3) und (3′) ist für $\delta = 0$

$$I = t^{\frac{1-m}{2}} \int_{B_t} e^{i\pi k x}\, d x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{|k|}\right)^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{K(e_k)} \left(\cos\left(\pi k t H(e_k) - \frac{(m+1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{t\,|k|}}\right)\right) \tag{3}$$

wo $k = A^{\nu-1} l = \widetilde{A}\, l$. Es ist Det. $\widetilde{A} = 1$. Nun wählen wir ein $l_0 \neq 0$ so, daß

$$1 \leqq |k_0| \leqq \sqrt{m} \tag{4}$$

Dies geht nach dem *Minkowski*schen Linearformensatz. Dann ist für $k = k_0 s$ (s natürliche Zahl $\varrho = \inf_B K$)

$$|I| \geqq \frac{1}{\pi}\, \varrho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{m}\, s}\right)^{\frac{m+1}{2}} \left|\, \left|\cos\left(\pi\, t\, s\, H(k_0) - \frac{(m+1)\pi}{4}\right)\right| - \frac{|C_1(B)|}{\sqrt{t\, s\, k_0}} \right|$$

Wir wählen nun t_0 so groß, daß $\dfrac{|C_1(B)|}{\sqrt{t_0}} < 2$ wird. Weiter wählen wir s, bei gegebenen $t > t_0$, so daß $\left|\dfrac{1}{2} s\, t\, H(k_0) - g\right| < \dfrac{1}{12}$ und $(32)^2 \leqq s \leqq 1\,2\,(32)^2$ (g ganz). Dies ist nach den *Dirichlet*schen Approximationssatz stets möglich. Dann ist, wenn $\alpha = \pi\,(s\, t\, H(k_0) - 2g)$

$|\cos\alpha| \geqq \cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{6} \geqq |\sin\alpha|$ und $\left|\cos\left(\alpha - \frac{(m+1)\pi}{4}\right)\right| \geqq$

$\geqq |\cos s\alpha|\, \left|\cos\frac{(m+1)\pi}{4}\right| - |\sin\alpha| \sin\frac{(m+1)\pi}{4} \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1) > \frac{1}{8}$,

da $\left|\cos\pi\frac{m+1}{4}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left|\sin\pi\frac{m+1}{4}\right| \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ für $m \not\equiv |\,(4)$.

Weiter ist $\frac{C_1(B)}{\sqrt{t\,s\,|k_0|}} \leqq \frac{2}{\sqrt{s}} = \frac{2}{32}$. Wir haben also, wenn $t > t_0$, uns ein k so konstruiert, daß

$$t^{\frac{1-m}{2}} \left| \int_{B_t} e^{\pi i k x}\, d\,x \right| \geqq \sqrt{C}\, \varrho^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

wo $C = \frac{1}{(16\,\pi)^2}(4800\sqrt{m})^{-m-1}$. Daraus folgt nach § 6 (5)

$$2^m \left[V + \sum_g{}' \int_{B_t} \varphi(x - 2\,A\,g)\, d\,x\right] \geqq V^2 + C\,\varrho\, t^{m-1} \tag{6}$$

Nun ist $\int_{B_t} \varphi(x - 2\,A\,g)\, d\,x$ genau dann $\neq 0$, wenn $\pm A\,g$ in B_t, da B_t konvex und symmetrisch in 0 ist. Weiters sind natürlich diese Integrale $\leqq V$, also folgt aus (6), da $f(A\,x) \leqq t$, S Gitterpunktpaare $\neq 0$ enthält,

$$2^m\, V\,(S+1) \geqq V^2 + C\,\varrho_t \tag{7}$$

da $\varrho_t = \varrho\, t^{m-1}$. Daraus folgt zunächst (2) und weiter $C\,\varrho_t \leqq 2^m\, V(S+1)$. Ist nun $V \leqq 2^{m-1}(S+1)$, so ist (1) richtig. Ist aber $V > 2^{m-1}(S+1)$, so folgt aus (7)

$$[V - 2^{m-1}(S+1)]^2 \leqq 4^{m-1}(S+1)^2 - C\,\varrho_t,$$

also wieder (1) w. z. b. w.

§ 12.

Die Verschärfung von § 11 (2) wurde unter stark einschränkenden Voraussetzungen über B_t erhalten ($m \equiv 1$ (4), Differenzierbarkeit von $S(B)$ usw.). Es soll nun eine andere Verschärfung angegeben werden, die nicht diese Voraussetzungen macht. (Für Parallelepipede wurde diese Verschärfung schon von *Gelfond*[5] angegeben.)

Satz 14: Ist N die Anzahl der Gitterpunktpaare $\neq 0$ in

$$H(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2\,t}, \tag{1}$$

wo $0 < \lambda < 1$ beliebig, H Stützfunktion von $B : f(x) \leqq 1$, so ist

$$V \leqq \frac{2^m(S+1)}{1 + N\cos^2\frac{\pi}{2}\lambda} \tag{2}$$

Dabei ist natürlich wieder B symmetrisch und V, S haben dieselbe Bedeutung wie in § 11.

Beweis: Es ist, da $H \leqq 1$ der polare Körper zu $B: f \leqq 1$ (*B.F.* S. 28, *Mahler*[14]), $|x\,y| \leqq f(x)\,H(y)$, also $|k\,x| \leqq t\,H(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2}$, wo $k = A^{*-1}\,l$, nach Voraussetzung (1). Für diese l ist dann

$$\left| \int e^{\pi i k x}\,d\,x \right| \geqq V \cos \frac{\pi}{2} \lambda$$

Also folgt aus § 6 (5) analog zu § 11 (7)

$$2^m (S+1)\,V \geqq V^2 \left(1 + N \cos^2 \frac{\pi}{2} \lambda\right) \quad \text{w.z.b.w.}$$

Daraus folgt

Satz 15: Besitzt für

$$\tau < \frac{\lambda}{8}\left(\frac{\mathfrak{J}}{S+1}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (0 < \lambda < 1) \tag{3}$$

$$H\,(A^{-1}\,l) \leqq \tau \tag{4}$$

eine Lösung und ist

$$\mathfrak{J}\,t^m + \frac{\lambda}{2\,\tau}\; t^{m-1} \cos^2 \frac{\pi}{2} \lambda > 2^m (S+1) \tag{5}$$

so besitzt $f(A\,x) \leqq t$ mehr als S Gitterpunktpaare $\neq 0$.

Beweis: Ist $\mathfrak{J}\,t^m > 2^m (S+1)$, so ist dies nach § 11 (2), welches immer gilt, richtig. Ist $\mathfrak{J}\,t^m \leqq 2^m (S+1)$, dann ist

$$(t\,\tau)^m \leqq \frac{2^m (S+1)}{\mathfrak{J}} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^m \frac{I}{2^m (S+1)} = \left(\frac{\lambda}{4}\right)^m,$$

also $\frac{\lambda}{2\,t\,\tau} \geqq 2$. Dann hat $H\,(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2\,t} = \tau \frac{\lambda}{2\,t\,\tau}$ mindestens $2\left[\frac{\lambda}{2\,t\,\tau}\right]$ Gitterpunkte $\neq 0$, also $N \geqq 2\left[\frac{\lambda}{2\,t\,\tau}\right] \geqq \frac{\lambda}{2\,t\,\tau}$, da $\frac{\lambda}{2\,t\,\tau} \geqq 2$. Dann würde nach (2), wenn $f(A\,x) \leqq t$ höchstens S Gitterpunktpaare $\neq 0$ enthielte,

$$\mathfrak{J}\,t^m \leqq \frac{2^m (S+1)}{1 + \frac{\lambda}{2\,t\,\tau} \cos^2 \frac{\pi}{2} \lambda}$$

[14] Casopis 68, S. 93ff.

in Gegensatz zur Voraussetzung (5).

Bermerkung: (3) ist sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{J}_1 \tau^m < (\frac{\lambda}{2})^m \frac{1}{(S+1)(m!)^2}$ wo $\mathfrak{J}_1$ das Volumen von $H(y) \leqq 1$ ist, denn nach *Mahler*[14] ist $\mathfrak{J}_1 \geqq \geqq \frac{4^m}{(m!)^2}$.