manuscripta math. 29, 195 - 206 (1979)

manuscripta mathematica

MEROMORPHE FUNKTIONEN, DIE MIT IHRER ABLEITUNG WERTE TEILEN

Erwin Mues und Norbert Steinmetz

In this paper it is shown that the functions $f(z) = \alpha e^z$ are the only nonconstant entire (meromorphic) functions which share two (three) distinct finite values with their derivative.

1. EINLEITUNG UND ERGEBNISSE

Wir benützen die folgende Definition: Zwei in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen f und g "teilen" den Wert $a \in \hat{\mathbb{C}}$, falls $f(z_0) = a$ genau dann, wenn $g(z_0) = a$ ist.

Das erste fundamentale Ergebnis über meromorphe Funktionen, die Werte teilen, ist der Fünf-Punkte-Satz von Nevanlinna [2]. L.A. Rubel und C.C. Yang bewiesen in [3] den folgenden

SATZ A: *Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion. Teilen f und f' die beiden Werte a und b, $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{C}$, und zwar mit Berücksichtigung der Multiplizität, dann ist $f' = f$.*

0025-2611/79/0029/0195/$02.40

Die Bedingung "mit Berücksichtigung der Multiplizität" bewirkt, daß beide Werte jeweils nur einfach angenommen werden, falls $a \cdot b \neq 0$ ist, und daß die Null Picardscher Ausnahmewert von f und f' ist, falls $a \cdot b = 0$ ist, so daß sich in diesem Fall der Beweis wesentlich vereinfacht.

Für die ganze Funktion

$$f(z) = \exp(e^z) \int_0^z \exp(e^{-t})(1-e^t)\,dt$$

ist

$$\frac{f'(z)-1}{f(z)-1} = e^z \ .$$

f und f' teilen den Wert 1. Dieses Beispiel zeigt, daß die in Satz A geforderte Zahl von zwei geteilten Werten bestmöglich ist und nicht durch Eins ersetzt werden kann.

In [3] wird gefragt, ob Satz A auch noch für meromorphe Funktionen richtig bleibt, bzw. ob Satz A richtig bleibt, wenn die Forderung "mit Berücksichtigung der Multiplizität" fallen gelassen wird.

Das folgende Beispiel zeigt, daß es meromorphe Funktionen f gibt, die mit ihrer Ableitung zwei endliche Werte teilen, ohne daß $f' = f$ ist.

Dazu sei w eine nichtkonstante Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

(1) $$w' = \frac{1}{2}(w^2 + w - 1) \ .$$

w ist eine in $\mathbb{C}$ transzendente meromorphe Funktion, die die beiden Lösungen α_1, α_2 der Gleichung $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ als Picardsche Ausnahmewerte besitzt. Außerdem hat w' den Picardschen Ausnahmewert 0 (vergl. [4]).

Es sei jetzt $f = w^2$, und es soll gezeigt werden, daß f und f' die Werte 0 und 1 teilen.

Wegen $f' = 2ww'$ folgt aus $f(z_o) = 0$, daß $w(z_o) = 0$ und damit, daß $f'(z_o) = 0$ ist. Ist umgekehrt $f'(z_o) = 0$, dann muß wegen $w'(z_o) \neq 0$ sicher $w(z_o) = 0$, also $f(z_o) = 0$ sein. Weiter folgt aus (1), daß

$$f' - 1 = 2ww' - 1 = w^3 + w^2 - w - 1 = (f - 1)(w + 1)$$

ist. Hieraus sieht man, daß $f(z_1) = 1$ $f'(z_1) = 1$ nach sich zieht. Ist umgekehrt $f'(z_1) = 1$, dann ist entweder $f(z_1) = 1$ oder $w(z_1) = -1$, woraus aber auch $f(z_1) = w^2(z_1) = 1$ folgt. Das beweist die Behauptung.

Im folgenden soll nun zunächst gezeigt werden, daß die Forderung "mit Berücksichtigung der Multiplizität" in Satz A entbehrlich ist. Hier erweist sich eigentlich nur der Fall $a \cdot b = 0$ als schwierig. Weiter wird dann noch ein analoges Ergebnis für meromorphe Funktionen bewiesen.

Wir haben die folgenden Ergebnisse.

<u>Satz 1: Es sei</u> f <u>eine nichtkonstante ganze Funktion. Teilen</u> f <u>und</u> f' <u>die beiden Werte</u> $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$, <u>dann ist</u> $f' = f$.

<u>Satz 2: Es sei</u> f <u>meromorph in</u> $\mathbb{C}$ <u>und nicht konstant. Teilen</u> f <u>und</u> f' <u>die drei (paarweise verschiedenen) Werte</u> $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, <u>dann ist</u> $f' = f$.

Das oben angeführte Beispiel zeigt, daß die Zahl drei in Satz 2 bestmöglich ist, jedenfalls sicher dann, wenn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$ ist.

Im nächsten Abschnitt werden einige Hilfsmittel zusammengestellt. Die weiteren Abschnitte enthalten dann die Beweise der Sätze 1 und 2, wobei die Fälle $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ (bzw. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$) und $a_1 \cdot a_2 = 0$ (bzw. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$) unterschieden werden.

2. HILFSMITTEL

Die Beweise werden mit der Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie geführt. Es werden die dort üblichen Bezeichnungen benutzt, also $m(r,f)$, $N(r,f)$, $T(r,f)$, usw. (vergl. [1], [4]). Es bezeichne $\bar{N}(r,f)$ die Anzahlfunktion der Polstellen von f, wobei jede Polstelle ohne Berücksichtigung ihrer Multiplizität nur einfach gezählt wird. Es sei $N_1(r,f) = N(r,f) - \bar{N}(r,f)$. Es bezeichne $S(r,f)$ jede Größe, die ein $o(T(r,f))$ ist für $r \to \infty$ mit eventueller Ausnahme einer Menge von r-Werten, die endliches lineares Maß hat. Für die folgenden Tatsachen vergleiche man etwa [1].

Nach dem Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung ist

$$m(r,\frac{f'}{f}) = S(r,f)$$

und allgemeiner

$$m(r,\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}) = S(r,f)\ , \qquad j \le k\ .$$

Für die Charakteristik der Ableitung hat man die Abschätzung

$$T(r,f') \le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f)\ .$$

Außerdem ist stets

$$N(r,f') = N(r,f) + \bar{N}(r,f)\ .$$

Diese Gleichungen und Ungleichungen werden im folgenden öfters verwendet, ohne daß jeweils besonders darauf verwiesen wird.

Wir benötigen weiter das folgende bekannte Ergebnis der Wertverteilungslehre, das hier als Hilfssatz formuliert werden soll (vergl. etwa [1]).

<u>Hilfssatz 1:</u> <u>Es sei</u> F <u>eine in</u> $\mathbb{C}$ <u>nichtkonstante meromorphe Funktion und</u> $a_1,\dots,a_q$ <u>seien</u> $q \ge 1$ <u>paarweise verschiedene kom-</u>

plexe Zahlen. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,\frac{1}{F-a_j}) \le m(r,\frac{1}{F'}) + S(r,F) .$$

3. BEWEIS DER SÄTZE 1 UND 2

Wir führen zunächst den Beweis der beiden Sätze, falls $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ bzw. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$. Dabei sei $q = 2$, falls f ganz ist, und sonst $q = 3$.

Es werde angenommen, daß f-f' nicht konstant ist. Dann ist

$$\begin{aligned} N(r,\frac{1}{f-f'}) &\le T(r,f-f') + O(1) \\ &= N(r,f-f') + m(r,f-f') + O(1) \\ &= N(r,f') + m(r,f(1-\frac{f'}{f})) + O(1) \qquad (2) \\ &\le N(r,f') + m(r,f) + S(r,f) \\ &= T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f) . \end{aligned}$$

Da f und f' die Werte $a_1,\dots,a_q$ teilen und $a_1\dots a_q \neq 0$ ist, nimmt f die Werte a_j nicht mehrfach an. Also ist

$$\sum_{j=1}^{q} N(r,\frac{1}{f-a_j}) \le N(r,\frac{1}{f-f'}) \le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f)$$

wegen (2). Weiter ist nach Hilfssatz 1

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,\frac{1}{f-a_j}) \le m(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f) .$$

Addition liefert zusammen mit dem 1. Hauptsatz

$$qT(r,f) \le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + m(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f) . \qquad (3)$$

Weiter ist nach Voraussetzung und (2)

$$\sum_{j=1}^{q} \bar{N}(r,\frac{1}{f'-a_j}) \le N(r,\frac{1}{f-f'}) \le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f) .$$

Außerdem hat man

$$\sum_{j=1}^{q} N_1(r,\frac{1}{f'-a_j}) \le N(r,\frac{1}{f''}) .$$

Wieder nach Hilfssatz 1 (man beachte, daß die $a_j \neq 0$ sind) gilt

$$m(r,\frac{1}{f'}) + \sum_{j=1}^{q} m(r,\frac{1}{f'-a_j}) \le m(r,\frac{1}{f''}) + S(r,f) .$$

Addiert man diese drei Ungleichungen, dann folgt wieder mit dem 1. Hauptsatz

$$m(r,\frac{1}{f'}) + qT(r,f') \le T(r,f'') + T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f) .$$

Addiert man hierzu die Ungleichung (3), dann ergibt sich

$$\begin{aligned}(q-2)T(r,f) + qT(r,f') &\le T(r,f'') + 2\bar{N}(r,f) + S(r,f) \\ &\le T(r,f') + 3\bar{N}(r,f) + S(r,f) ,\end{aligned}$$

also

$$(q-2)T(r,f) + (q-1)T(r,f') \le 3\bar{N}(r,f) + S(r,f) . \tag{4}$$

Es sei jetzt f nicht ganz, also $q = 3$. Dann folgt wegen $2T(r,f') \ge 2N(r,f') = 2N(r,f) + 2\bar{N}(r,f) \ge 3\bar{N}(r,f)$ aus (4), daß

$$T(r,f) = S(r,f) ,$$

und das ist nicht möglich.

Ist f ganz, also $q = 2$, dann erhält man aus (4) wegen $\bar{N}(r,f) \equiv 0$, daß

$$T(r,f') = S(r,f) .$$

Damit ist aber dann auch

$$m(r,\frac{1}{f'}) \le T(r,f') + O(1) = S(r,f) ,$$

und aus (3) folgt

$$2T(r,f) \le T(r,f) + S(r,f) ,$$

was auch einen Widerspruch ergibt. Also ist in beiden Fällen gezeigt, daß die Annahme $f-f' \not\equiv$ const. nicht haltbar ist. Also muß $f-f' \equiv c$ sein, und da f und f' zwei bzw. drei Werte teilen, ist $f' = f$.

4. BEWEIS VON SATZ 2, FALLS $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$

Wir setzen $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = 0$ und nehmen wieder $f-f' \not\equiv$ const. an. Zunächst ist wieder nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,\tfrac{1}{f'-a}) + \bar{N}(r,\tfrac{1}{f'-b}) + \bar{N}(r,\tfrac{1}{f'}) &\le N(r,\tfrac{1}{f-f'})\\ &\le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f)\end{aligned}$$

wegen (2). Außerdem ist

$$N_1(r,\tfrac{1}{f'-a}) + N_1(r,\tfrac{1}{f'-b}) + N_1(r,\tfrac{1}{f'}) \le N(r,\tfrac{1}{f''}) .$$

Hilfssatz 1 liefert

$$m(r,\tfrac{1}{f'-a}) + m(r,\tfrac{1}{f'-b}) + m(r,\tfrac{1}{f'}) \le m(r,\tfrac{1}{f''}) + S(r,f) .$$

Durch Addition erhält man

$$3T(r,f') \le T(r,f'') + T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f) . \tag{5}$$

Wegen $a \cdot b \neq 0$ werden a und b von f einfach angenommen. An einer Nullstelle z_0 von f ist wegen $f'(z_0) = 0$ die Multiplizität der Nullstelle von $f-f'$ gleich der Multiplizität der Nullstelle von f'. Als hat man

$$\begin{aligned}N(r,\tfrac{1}{f-a}) + N(r,\tfrac{1}{f-b}) + N(r,\tfrac{1}{f'}) &\le N(r,\tfrac{1}{f-f'})\\ &\le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + S(r,f) .\end{aligned} \tag{6}$$

Da f und f' den Wert 0 teilen, ist

$$\begin{aligned}N(r,\tfrac{1}{f}) - N(r,\tfrac{1}{f'}) &= N(r,\tfrac{1}{f}) - N_1(r,\tfrac{1}{f}) = \bar{N}(r,\tfrac{1}{f})\\ &= \bar{N}(r,\tfrac{1}{f'}) \le N(r,\tfrac{1}{f'}) .\end{aligned}$$

Damit erhält man aus (6)

$$N(r,\frac{1}{f-a}) + N(r,\frac{1}{f-b}) + N(r,\frac{1}{f}) \le T(r,f) + \bar{N}(r,f) + N(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f) \quad .$$

Wieder nach Hilfssatz 1 ist

$$m(r,\frac{1}{f-a}) + m(r,\frac{1}{f-b}) + m(r,\frac{1}{f}) \le m(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f) \quad .$$

Addiert man nun (5) und die beiden letzten Ungleichungen, dann ergibt sich

$$T(r,f) + 2T(r,f') \le T(r,f'') + 2\bar{N}(r,f) + S(r,f)$$

$$\le T(r,f') + 3\bar{N}(r,f) + S(r,f) \quad ,$$

also

$$T(r,f) + T(r,f') \le 3\bar{N}(r,f) + S(r,f) \quad .$$

Hieraus folgt sofort

$$m(r,f) + m(r,f') + 2N_1(r,f) = S(r,f) \quad .$$

Dann ist aber

$$T(r,f) = \bar{N}(r,f) + S(r,f) \quad ,$$

$$T(r,f') = 2\bar{N}(r,f) + S(r,f) = 2T(r,f) + S(r,f) \quad ,$$

$$T(r,f'') = 3\bar{N}(r,f) + S(r,f) = 3T(r,f) + S(r,f) \quad .$$

In (5) eingesetzt ergibt das

$$6T(r,f) \le 5T(r,f) + S(r,f) \quad .$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß $f-f'$ konstant, also $f' = f$ sein muß. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

5. BEWEIS VON SATZ 1, FALLS $a_1 \cdot a_2 = 0$

Es sei also jetzt f eine ganze Funktion, $a_2 = 0$ und o.B.d.A. $a_1 = 1$. Die Werte 0 und 1 sollen von f und f' geteilt werden, und wir nehmen wieder an, daß $f-f'$ nicht konstant ist. Dann sind die Nullstellen von f mindestens doppelt und die 1-Stellen von f einfach. Hieraus folgt, daß

$$g = \frac{f'(f'-f)}{f(f-1)} \tag{7}$$

eine ganze Funktion ist.

Man findet:

$$\begin{aligned} T(r,g) &= m(r,g) = m\left(r,\frac{f'}{f-1}\left(\frac{f'}{f}-1\right)\right) \\ &\le m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + O(1) = S(r,f) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Man schreibe (7) in der Form

$$f'^2 - ff' = g(f^2-f)$$

und differenziere zweimal. Das ergibt

$$2f'f'' - f'^2 - ff'' = g'(f^2-f) + g(2ff'-f') \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned} &2f''^2 + 2f'f''' - 3f'f'' - ff''' \\ &\quad = g''(f^2-f) + 2g'(2ff'-f') + g(2f'^2 + 2ff'' - f'') \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Es sei jetzt z_1 eine 1-Stelle von f, also $f(z_1) = f'(z_1) = 1$. Damit findet man aus (9)

$$f''(z_1) = 1 + g(z_1) \ . \tag{11}$$

Weiter ergibt sich mit $f(z_1) = f'(z_1) = 1$ und (11) aus (10)

$$f'''(z_1) = 2g'(z_1) - g^2(z_1) + 2g(z_1) + 1 \ . \tag{12}$$

Man definiere die Funktionen ϕ und ψ durch

$$f'' - (1+g)f' = \phi(f-1) \ , \tag{13}$$

$$f''' - (2g' - g^2 + 2g + 1)f' = \psi(f-1) \ . \tag{14}$$

ϕ und ψ sind ganze Funktionen! Pole von ϕ und ψ können nämlich nur bei 1-Stellen von f auftreten; das sind aber auch 1-Stellen von f', und in diesen Punkten gelten (11) und (12).

Also verschwinden dort die linken Seiten von (13) und (14). ϕ und ψ können also keine Pole besitzen.

Daher gilt für ϕ, falls es nicht identisch verschwindet,

$$T(r,\phi) = m(r,\phi) \le m(r,\frac{f'}{f-1}) + m(r,\frac{f''}{f-1}) + m(r,g) + O(1)$$

$$= S(r,f) \ .$$

Analog findet man für ψ, falls es nicht identisch verschwindet,

$$T(r,\psi) = m(r,\psi) = S(r,f) \ .$$

Man differenziere jetzt (13), ersetze dann f" wieder durch die Darstellung (13) und subtrahiere von (14). Das ergibt

$$f'[2g^2 - g' + \phi] = (f-1)[\psi - \phi' - (1+g)\phi] \ . \tag{15}$$

Wir behaupten nun, daß die Faktoren bei f' und f-1 in (15) beide identisch verschwinden. Ist das nicht der Fall, dann verschwindet der Faktor bei f' an jeder 1-Stelle von f und der Faktor bei f-1 an jeder Nullstelle von f, die ja auch Nullstelle von f' ist. Damit ist

$$N(r,\frac{1}{f-1}) \le N(r,\frac{1}{2g^2-g'+\phi}) = S(r,f)$$

und

$$\bar{N}(r,\frac{1}{f}) \le N(r,\frac{1}{\psi-\phi'-(1+g)\phi}) = S(r,f) \ ,$$

weil $T(r,g) + T(r,\phi) + T(r,\psi) = S(r,f)$ ist. Zusammen mit dem 2. Hauptsatz für ganze Funktionen erhielte man dann

$$T(r,f) \le \bar{N}(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f-1}) + S(r,f) = S(r,f) \ . \tag{16}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß die beiden eckigen Klammern in (15) identisch verschwinden. Also ist insbesondere

$$2g^2 - g' + \phi = 0 \ . \tag{17}$$

Ist z_0 eine Nullstelle von f, dann erhält man aus (9) nach Division durch f' für $z \to z_0$

$$2f''(z_o) = -g(z_o)$$

und aus (13) für $z = z_o$

$$f''(z_o) = -\phi(z_o) .$$

Damit ist $\phi(z_o) = \frac{1}{2}g(z_o)$, und mit (17) ergibt sich

$$2g^2(z_o) + \frac{1}{2}g(z_o) - g'(z_o) = 0 .$$

Wäre nun $2g^2(z) + \frac{1}{2}g(z) - g'(z) \not\equiv 0$, dann hätte man

$$\bar{N}(r,\tfrac{1}{f}) \le N(r,\frac{1}{2g^2 + \frac{1}{2}g - g'}) \le T(r,2g^2+\tfrac{1}{2}g-g') + O(1) = S(r,f)$$

wegen (8). Weil aber

$$\begin{aligned} N(r,\tfrac{1}{f-1}) \le N(r,\frac{1}{\frac{f'}{f} - 1}) &\le T(r,\tfrac{f'}{f} - 1) + O(1) \\ &= N(r,\tfrac{f'}{f}) + m(r,\tfrac{f'}{f}) + O(1) \\ &= \bar{N}(r,\tfrac{1}{f}) + S(r,f) \end{aligned}$$

ist, würde sich

$$N(r,\tfrac{1}{f-1}) + \bar{N}(r,\tfrac{1}{f}) = S(r,f)$$

ergeben, was wie in (16) einen Widerspruch ergibt. Also ist

$$g' = \frac{1}{2}g + 2g^2 . \tag{18}$$

Die Lösungen einer Riccatischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sind aber entweder konstant oder in $\mathbb{C}$ transzendente meromorphe Funktionen mit unendlich vielen Polen (vergl. [4]). Da g eine ganze Funktion ist, muß g konstant sein. Aus (18) sieht man, daß $g \equiv 0$ oder $g \equiv -\frac{1}{4}$ sein muß. Wegen (7) zieht $g \equiv 0$ $f-f' \equiv 0$ nach sich. Das war aber nach Annahme ausgeschlossen.

Ist $g \equiv -\frac{1}{4}$, dann folgt aus (7)

$$(2f'-f)^2 = f .$$

Setzt man $h = 2f'-f$, dann ist $f = h^2$, also $f' = 2hh'$ und

$f' = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2$, und damit

$$h' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h \quad . \tag{19}$$

Man findet so

$$h(z) = A\exp\left(\frac{z}{4}\right) - 1 \qquad \text{mit } 0 \neq A = \text{const.}$$

Für die Punkte $z^* = 4\pi i - 4\log A$ ist $h(z^*) = -2$ und damit nach (19) $h'(z^*) = -\frac{1}{4}$. Also ist $f(z^*) = h^2(z^*) = 4$ und $f'(z^*) = 2h(z^*)h'(z^*) = 1$.

Da f und f' den Wert 1 teilen, kann also auch der Fall $g \equiv -\frac{1}{4}$ nicht eintreten. Also ist doch $f - f' \equiv \text{const.}$ und damit $f' = f$. Das beweist Satz 1.

LITERATUR

[1] HAYMAN, W.K.: Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press 1975

[2] NEVANLINNA, R.: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars 1929

[3] RUBEL, L.A., YANG, C.C.: Values shared by an entire function and its derivative. Complex Analysis (Proc. Conf. Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1976), 101-103. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 599, Berlin: Springer 1977

[4] WITTICH, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer 1968

Erwin Mues
Universität Hannover
Institut für Mathematik
Welfengarten 1
D-3000 Hannover 1

Norbert Steinmetz
Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
Englerstr. 2
D-7500 Karlsruhe 1

(Eingegangen am 9. April 1979)