

Eine Verallgemeinerung des Differenzenkörpers

Von

Rolf Schneider, Bochum

(Eingegangen am 19. Mai 1969)

1. Einleitung, Ergebnisse

Für eine Teilmenge K des n -dimensionalen reellen Vektorraumes R^n wird die *Differenzenmenge* DK bekanntlich erklärt durch jede der folgenden gleichwertigen Definitionen

$$\begin{aligned} DK &= \{x \in R^n \mid x = x_1 - x_2 \text{ mit } x_1, x_2 \in K\} \\ &= K + (-K) \\ &= \{x \in R^n \mid K \cap (K+x) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Im R^n sei eine affine Volumenmessung eingeführt, v bezeichne das Volumen. Ist K ein konvexer Körper (stets mit inneren Punkten) im R^n , so genügt der affin-invariante Quotient

$$\delta_1(K) = v(DK) v(K)^{-1}$$

den Ungleichungen

$$2^n \leq \delta_1(K) \leq \binom{2n}{n}. \quad (1.1)$$

In der linken Ungleichung, die eine unmittelbare Folge des Brunn-Minkowskischen Satzes ist, besteht Gleichheit genau dann, wenn K ein Symmetriezentrum besitzt. Wegen dieser und einer weiteren Eigenschaft ist das Funktional δ_1 (bis auf eine unwesentliche Normierung) ein *Symmetriemaß* im Sinne von GRÜNBAUM [5]. Sein Maximum $\binom{2n}{n}$ erreicht $\delta_1(K)$ genau dann, wenn K ein Simplex ist. Dies ist für beliebiges n zuerst von ROGERS und SHEPHARD [8] bewiesen worden.

Die oben zuletzt angegebene Definition der Differenzenmenge läßt sich nun in naheliegender Weise folgendermaßen verallgemeinern: Für $K \subset R^n$ und $p = 1, 2, \dots$ sei

$$D_p K = \{(x_1, \dots, x_p) \in R^n \times \dots \times R^n \mid K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_p) \neq \emptyset\}.$$

Das durch die Volumenmessung im R^n induzierte Produktvolumen in $R^n \times \dots \times R^n$ werde mit V bezeichnet. Das Funktional

$$\delta_p(K) = V(D_p K) v(K)^{-p}$$

ist dann (soweit die Volumina existieren) offenbar eine affine Invariante der Menge K . Wir beschränken uns nun auf konvexe Körper. Es ergibt sich die Frage, ob das Funktional δ_p für $p \geq 2$ ebenfalls ein Symmetriemaß ist, ob es also sein Minimum genau für zentralsymmetrische Körper annimmt. Für $n = 2$ ist dies der Fall. Es gilt nämlich:

Satz 1: Für $n = 2$ und $p = 1, 2, \dots$ ist

$$\delta_p(K) = \frac{1}{2} p(p+1) \delta_1(K) + 1 - p^2; \tag{1.2}$$

also ist

$$\delta_p(K) \geq (p+1)^2 \tag{1.3}$$

mit Gleichheit genau für zentralsymmetrische K .

Die Ungleichung (1.3) ergibt sich dabei aus (1.2) und der linken Ungleichung in (1.1). Während also für $n = 2$ die Verallgemeinerung des Funktionals δ_1 zu δ_p wegen (1.2) nichts Neues liefert, liegen die Verhältnisse für $n \geq 3$ anders. Überraschenderweise nimmt nämlich δ_p für $n \geq 3, p \geq 2$ im allgemeinen sein Minimum nicht auf der Menge aller zentralsymmetrischen konvexen Körper an; δ_p liefert dann also kein Symmetriemaß. In der Tat berechnet man $\delta_2(P) > \delta_2(E)$ für $n = 3$, wenn P ein Parallelepiped und E ein Ellipsoid ist. Die Frage, für welche Körper das Funktional δ_p für $n \geq 3, p \geq 2$ sein Minimum annimmt, bleibt offen. Ohne Schwierigkeiten läßt sich dagegen die rechte Ungleichung in (1.1) verallgemeinern:

Satz 2: Für beliebige natürliche n, p und jeden konvexen Körper $K \subset R^n$ gilt

$$\delta_p(K) \leq \binom{pn+n}{n}. \tag{1.4}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn K ein Simplex ist.

Da das Funktional δ_p für $p \geq 2$ auf der Menge der zentralsymmetrischen Körper verschiedene Werte annehmen kann, entsteht das neue Problem, die zentralsymmetrischen Körper zu bestimmen, für die δ_p maximal wird. In dieser Richtung können wir nur für $n = 3$ eine Ungleichung beweisen:

Satz 3: Für $n = 3, p = 2, 3, \dots$ und jeden zentralsymmetrischen konvexen Körper $K \subset R^3$ gilt

$$\delta_p(K) \leq \frac{3}{2} p(p+1)^2 + p+1. \quad (1.5)$$

Die zum Beweis dieser Ungleichung benutzte Methode vermag offenbar keinen Aufschluß darüber zu geben, ob die Ungleichung scharf ist; vermutlich ist dies nicht der Fall. Immerhin ist die obere Schranke in (1.5) für alle p kleiner als die durch (1.4) gegebene Schranke. Zum Vergleich seien einige spezielle Werte für $n = 3$, $p = 2$ angegeben: δ_2 nimmt für das Ellipsoid den Wert 26,552... an, für Parallelepipid und affinreguläres Oktaeder 27, für das Simplex 84; die rechte Seite von (1.5) ergibt den Wert 30.

Der nächste Abschnitt enthält einige grundlegende Bemerkungen über $D_p K$. Der 3. Abschnitt befaßt sich mit zwei integralgeometrischen Identitäten, aus denen sich dann die Gl. (1.2) herleiten läßt. Der Beweis von Satz 2 folgt im 5. und der von Satz 3 im 6. Abschnitt.

2. Einfache Eigenschaften der Körper $D_p K$

Die Zahlen $n \geq 1$ und $p \geq 1$ sind im folgenden fest. Die Indizes i, j, k, α sollen stets die folgenden Werte durchlaufen:

$$i = 1, \dots, p,$$

$$j = 0, 1, \dots, p,$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Relationen, in denen diese Indizes vorkommen, gelten stets für alle in Frage kommenden Werte des betreffenden Index; der Gültigkeitsbereich wird also nicht jeweils extra angegeben. Ebenfalls sollen Summen und Durchschnitte über alle diese angegebenen Werte der auftretenden Indizes erstreckt werden. Die folgende Konvention ist nützlich zur Vereinfachung der Schreibweise: Ein Vektor des R^n , dessen Symbol den unteren Index Null trägt, soll stets der Nullvektor sein.

Wir schreiben $\mathbf{R} = R^n \times \dots \times R^n$ (p Faktoren) und setzen für $K \subset R^n$ und $X \in \mathbf{R}$

$$D(K, X) = \cap (K + x_j), \text{ falls } X = (x_1, \dots, x_p).$$

Dann definieren wir, wie in der Einleitung bereits angedeutet,

$$D_p K = \{X \in \mathbf{R} \mid D(K, X) \neq \emptyset\}.$$

Wir stellen nun einige einfache Eigenschaften der Abbildung $D_p: \mathcal{D}(R^n) \rightarrow \mathcal{D}(R)$ (\mathcal{D} = Potenzmenge) fest:

D_p ist linear, d. h. (2.1)

$$(a) D_p(\mu K) = \mu D_p K, \mu \geq 0,$$

$$(b) D_p(K_1 + K_2) = D_p K_1 + D_p K_2.$$

Beweis. (a) ist trivial; zu (b): Sei $X \in D_p K_1 + D_p K_2$, also

$$X = X_1 + X_2 \text{ mit } X_\alpha \in D_p K_\alpha.$$

Sei $X_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha)$. Wegen $D(K_\alpha, X_\alpha) \neq \emptyset$ existieren Vektoren $a_\alpha \in D(K_\alpha, X_\alpha)$. Es gilt also $a_\alpha \in K_\alpha + x_j^\alpha$ und daher $a_1 + a_2 \in K_1 + K_2 + x_j^1 + x_j^2$. Das bedeutet $a_1 + a_2 \in D(K_1 + K_2, X_1 + X_2)$, also ist $D(K_1 + K_2, X_1 + X_2) \neq \emptyset$ und daher $X = X_1 + X_2 \in D_p(K_1 + K_2)$.

Sei nun umgekehrt $X \in D_p(K_1 + K_2)$. Wegen $D(K_1 + K_2, X) \neq \emptyset$ existiert ein Vektor $a \in D(K_1 + K_2, X)$. Es gilt also $a \in K_1 + K_2 + x_i$, wenn $X = (x_1, \dots, x_p)$ ist. Das bedeutet $a = a^1 + a^2$ mit $a^\alpha \in K_\alpha$ und $a = a_i^1 + a_i^2 + x_i$ mit $a_i^\alpha \in K_\alpha$. Setze $b_i^\alpha = a^\alpha - a_i^\alpha$. Wegen $a^\alpha \in K_\alpha$ und $a^\alpha - b_i^\alpha = a_i^\alpha \in K_\alpha$ ist dann $a^\alpha \in \cap (K_\alpha + b_i^\alpha)$. Wird also $B_\alpha = (b_1^\alpha, \dots, b_p^\alpha)$ gesetzt, so ist $B_\alpha \in D_p K_\alpha$ und somit $B_1 + B_2 \in D_p K_1 + D_p K_2$. Es ist aber $b_1^1 + b_1^2 = a^1 - a_1^1 + a^2 - a_1^2 = a - (a - x_1) = x_1$, also $B_1 + B_2 = X \in D_p K_1 + D_p K_2$. qed.

Ist K konvex, so ist auch $D_p K$ konvex. (2.2)

Beweis. Sei $X_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha) \in D_p K$ und $\mu \geq 0$. Wegen

$$D(K, X_\alpha) \neq \emptyset$$

existieren Vektoren $a^\alpha \in K + x_j^\alpha$. Da K konvex ist, ist

$$\begin{aligned} (1-\mu) a^1 + \mu a^2 &\in (1-\mu) K + (1-\mu) x_j^1 + \mu K + \mu x_j^2 = \\ &= K + (1-\mu) x_j^1 + \mu x_j^2. \end{aligned}$$

Also ist $D(K, (1-\mu) X_1 + \mu X_2) \neq \emptyset$ und daher $(1-\mu) X_1 + \mu X_2 \in D_p K$. qed.

Von nun an setzen wir K als konvexen Körper voraus. Wir führen im R^n eine euklidische Metrik ein und metrisieren die Menge der konvexen Körper des R^n in üblicher Weise durch die Hausdorff-Metrik. Analog metrisieren wir die Menge der konvexen Körper in R vermöge der dort induzierten euklidischen Metrik. Die zugehörige Abstandsfunktion bezeichnen wir in beiden Räumen mit d . Es ergibt sich, daß die Abbildung D_p stetig ist, d. h. aus $\lim K_n = K$ für konvexe Körper

K, K_1, K_2, \dots folgt $\lim D_p K_n = D_p K$. Dies ist eine Konsequenz des folgenden Ergebnisses:

Es gibt eine Konstante c mit

$$d(D_p K_1, D_p K_2) \leq c d(K_1, K_2) \quad (2.3)$$

für alle konvexen Körper $K_1, K_2 \subset R^n$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß aus $K_1 \subset K_2$ trivialerweise die Relation $D_p K_1 \subset D_p K_2$ folgt.

Sei S^n die Einheitskugel des R^n mit Mittelpunkt im Nullpunkt, analog S^m die Einheitskugel des Raumes R . Sei $d(K_1, K_2) = \delta$, dann ist nach Definition der Hausdorff-Metrik $K_1 \subset K_2 + \delta S^n$ und $K_2 \subset K_1 + \delta S^n$. Es folgt $D_p K_1 \subset D_p(K_2 + \delta S^n) = D_p K_2 + \delta D_p S^n$ nach (2.1). Wähle c mit $D_p S^n \subset c S^{np}$. Dann ist also $D_p K_1 \subset D_p K_2 + \delta c S^{np}$ und analog $D_p K_2 \subset D_p K_1 + \delta c S^{np}$. Das bedeutet aber $d(D_p K_1, D_p K_2) \leq c\delta$. qed.

Schließlich wollen wir noch zeigen, daß im Gegensatz zu $D_1 K$ der Körper $D_p K$ für $p \geq 2$ im allgemeinen nicht zentralsymmetrisch zum Nullpunkt ausfällt. Vielmehr gilt:

Ist $D_p K$ für ein $p \geq 2$ bezüglich des Nullpunktes zentralsymmetrisch, so ist auch K zentralsymmetrisch. (2.4)

Beweis. Sei $x \in K, x-a \in K, x-b \in K$. Dann ist $K \cap (K+a) \cap (K+b) \neq \phi$, also

$$(a, b, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-2}) \in D_p K.$$

Da der Nullpunkt Mittelpunkt von $D_p K$ ist, ist auch

$$(-a, -b, 0, \dots, 0) \in D_p K,$$

also $K \cap (K-a) \cap (K-b) \neq \phi$. Es gibt also einen Punkt $x' \in R^n$ mit $x' \in K, x'+a \in K, x'+b \in K$. Das Dreieck mit den Ecken $x', x'+a, x'+b$ geht durch Spiegelung am Punkt $(x+x')/2$ aus dem Dreieck mit den Ecken $x, x-a, x-b$ hervor. Der Körper K enthält also zu jedem Dreieck T ein Translat von $-T$. Sei S eine längste Sehne von K . Sei $x \in K \setminus S$ und T das Dreieck mit S als Kante und x als Ecke. Es gibt ein in K enthaltenes Dreieck der Form $-T+y$ mit geeignetem $y \in R^n$. Die Kante $-S+y$ von $-T+y$ ist parallel zu S und von gleicher Länge, sie muß also mit S zusammenfallen, da sonst S nicht eine längste Sehne von K wäre. Daher erhält man den Punkt $-x+y \in -T+y \subset K$ durch Spiegelung von x am Mittelpunkt z der Sehne S . K enthält also mit jedem

Punkt x auch den dazu bezüglich z symmetrischen Punkt, d. h. z ist Mittelpunkt von K . qed.

Wir schreiben nun eine für spätere Betrachtungen geeignete Darstellung von $V(D_p K)$ für $p \geq 2$ auf. Das Volumenelement an der Stelle $x \in R^n$ bezeichnen wir mit dx ; wir können dann unter Verwendung des Satzes von Fubini schreiben

$$\begin{aligned} V(D_p K) &= \int_{D_p K} dV = \int_{D_p K} \dots \int_{D_p K} dx_1 \dots dx_p \\ &= \int \dots \int [\int dx_p] dx_1 \dots dx_{p-1}. \end{aligned}$$

Die äußere $(p-1)$ -fache Integration ist hier zu erstrecken über alle (x_1, \dots, x_{p-1}) mit $K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}) \neq \emptyset$, also über $D_{p-1} K$. Bei gegebenem (x_1, \dots, x_{p-1}) ist das innere Integral zu erstrecken über alle x_p mit $K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}) \cap (K+x_p) \neq \emptyset$. Wegen

$$\{x \in R^n \mid A \cap (K+x) \neq \emptyset\} = A + (-K)$$

ist also

$$\begin{aligned} V(D_p K) &= \int_{D_{p-1} K} \dots \int v([K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1})] + (-K)) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \int_{D_{p-1} K} \dots \int v_{n-m}(K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}), -K) dx_1 \dots dx_{p-1}. \end{aligned}$$

Darin haben wir mit $v_i(A, B)$ das gemischte Volumen

$$v(\underbrace{A, \dots, A}_{n-i}, \underbrace{B, \dots, B}_i)$$

bezeichnet. Ist $V'(D_{p-1} K)$ das Volumen von $D_{p-1} K$ bezüglich des in $R^n \times \dots \times R^n$ ($p-1$ Faktoren) induzierten Produktvolumens, so ergibt sich

$$\begin{aligned} V(D_p K) &= v(K) V'(D_{p-1} K) + \\ &+ \sum \binom{n}{k} \int_{D_{p-1} K} \dots \int v_{n-k}(K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}), -K) dx_1 \dots dx_{p-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Integralgeometrische Hilfsformeln

Die Darstellung (2.5) legt den Versuch nahe, die Untersuchung von $V(D_p K)$ auf Informationen über die rechts auftretenden Integrale zu gründen. Für $k = n$ und $k = n-1$ lassen diese Integrale sich durch gemischte Volumina ausdrücken. Die folgenden Identitäten sind allgemeiner, als sie später benötigt werden, sie lassen sich jedoch ohne

zusätzlichen Aufwand gleich in dieser Form herleiten und dürften auch von selbständigem Interesse sein. Für konvexe Körper

$$K_0, K_1, \dots, K_p, H \subset R^n$$

gilt

$$\begin{aligned} \int \dots \int v(K_0 \cap (K_1+x_1) \cap \dots \cap (K_p+x_p)) dx_1 \dots dx_p &= \\ &= v(K_0) \dots v(K_p), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \int \dots \int v_1(K_0 \cap (K_1+x_1) \cap \dots \cap (K_p+x_p), H) dx_1 \dots dx_p &= \\ &= v(K_0) \dots v(K_p) \sum v_1(K_j, H) v(K_j)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für das folgende sei im R^n eine euklidische Metrik eingeführt.

Die linken Seiten der Identitäten (3.1), (3.2) kann man auch so interpretieren, daß über alle Parallelverschiebungen der Körper K_1, \dots, K_p integriert wird, wobei man die Volumenelemente als Translationsdichten auffaßt. Die Berechnung der Integrale erscheint so als Aufgabe der Integralgeometrie zur Translationsgruppe. Demgemäß finden sich auch Spezialfälle von (3.1) und (3.2) in Arbeiten zur Integralgeometrie. Für $p=2$ ist (3.1) (allgemein für Lebesgue-meßbare Mengen) von BALANZAT [1] bewiesen worden (darin wird zwar über die Bewegungen von K_1 statt nur über die Translationen integriert, vgl. aber HADWIGER [7], S. 288, Anmerkung 17). Für $p=2$ ist (3.1) auch von HADWIGER [6], S. 93, und speziell für $K_1 = -K_0$ von ROGERS und SHEPHARD [8] sowie für $K_1 = -K_0$ von STEIN [9] angegeben worden. Der Beweis des allgemeinen Falles ist ebenso einfach: Sei η_j die charakteristische Funktion von K_j , dann ist

$$v(K_0 \cap (K_1+x_1) \cap \dots \cap (K_p+x_p)) = \int_{R^n} \eta_0(y) \eta_1(y-x_1) \dots \eta_p(y-x_p) dy,$$

da der Integrand genau dann nicht verschwindet und also gleich 1 ist, wenn $y \in K_0$, $y \in K_1+x_1$, \dots , $y \in K_p+x_p$ ist. Also ist

$$\begin{aligned} \int \dots \int v(K_0 \cap (K_1+x_1) \cap \dots \cap (K_p+x_p)) dx_1 \dots dx_p &= \\ &= \int \dots \int [\int \eta_0(y) \eta_1(y-x_1) \dots \eta_p(y-x_p) dy] dx_1 \dots dx_p \\ &= \int \eta_0(y) [\int \dots \int \eta_1(y-x_1) \dots \eta_p(y-x_p) dx_1 \dots dx_p] dy \\ &= \int \eta_0(y) [\int \eta_1(y-x_1) dx_1 \dots \int \eta_p(y-x_p) dx_p] dy \\ &= \int \eta_0(y) v(K_1) \dots v(K_p) dy \\ &= v(K_0) v(K_1) \dots v(K_p). \end{aligned}$$

Die Gl. (3.2) findet man für den Spezialfall $n=3$, $p=1$ bei BERWALD und VARGA [2] (Gl. (21.1), man beachte dazu die für konvexe

Körper gültigen Beziehungen (17.14)). Sie ist dort allgemeiner für nicht notwendig konvexe Gebiete aufgestellt, allerdings unter zusätzlichen analytischen Voraussetzungen über die Berandungen dieser Gebiete (von denen man sich im Falle konvexer Körper natürlich nachträglich durch ein naheliegendes Approximations-Argument befreien kann). Wir wollen zunächst für (3.2) im Falle $p = 1$ einen für beliebiges $n \geq 2$ gültigen Beweis geben:

Für $\mu \geq 0$ gilt, wenn wir die für beliebige Mengen $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ bestehende Relation

$$(A \cap B) + C \subset (A + C) \cap (B + C)$$

berücksichtigen,

$$\begin{aligned} & \int v((K_0 \cap (K_1 + x)) + \mu H) dx && [K_0 \cap (K_1 + x) \neq \emptyset] \\ & \leq \int v((K_0 + \mu H) \cap (K_1 + \mu H + x)) dx && [K_0 \cap (K_1 + x) \neq \emptyset] \\ & \leq \int v((K_0 + \mu H) \cap (K_1 + \mu H + x)) dx && [(K_0 + \mu H) \cap (K_1 + \mu H + x) \neq \emptyset] \\ & = v(K_0 + \mu H) v(K_1 + \mu H), \end{aligned}$$

wobei das Integrationsgebiet jeweils rechts vom Integral angegeben ist. Die letzte Zeile folgt dabei aus (3.1). Entwickeln wir in der ersten und in der letzten Zeile die Volumina der Summen und berücksichtigen abermals (3.1), so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mu^{k-1} \int v_k(K_0 \cap (K_1 + x), H) dx \leq \\ & \leq n[v_1(K_0, H) v(K_1) + v(K_0) v_1(K_1, H)] + O(\mu) \end{aligned}$$

für alle $\mu \geq 0$, also

$$\int v_1(K_0 \cap (K_1 + x), H) dx \leq v_1(K_0, H) v(K_1) + v(K_0) v_1(K_1, H). \quad (3.3)$$

Wir setzen

$$\mathfrak{F}(K_0, K_1, H) = \int v_1(K_0 \cap K_1, H) d\bar{K}_1 - v_1(K_0, H) v(K_1) - v(K_0) v_1(K_1, H).$$

Darin ist $d\bar{K}_1$ die *Translationsdichte* von K_1 (s. HADWIGER [7], 6. 2. 1), und wir haben das in (3.3) auftretende Integral in die in der Integralgeometrie übliche Form umgeschrieben; zu integrieren ist dabei über alle Parallelverschiebungen von K_1 ,

Wir nehmen nun zunächst H speziell als Kugel vom Radius 1 an. Sei $d\bar{K}_1$ die *Drehdichte* (s. HADWIGER [7], 6. 2. 1) von K_1 . Da

$$\mathfrak{F}(K_0, K_1, H) \leq 0 \quad (3.4)$$

für beliebige Körper K_0, K_1 gilt, ergibt sich bei Integration über alle Drehungen von K_1 die Ungleichung

$$\int \mathfrak{F}(K_0, K_1, H) d\bar{K}_1 \leq 0. \quad (3.5)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{F}(K_0, K_1, H) d\bar{K}_2 &= \iint v_1(K_0 \cap K_1, H) d\bar{K}_1 d\bar{K}_1 \\ &\quad - \int [v_1(K_0, H) v(K_1) + v(K_0) v_1(K_1, H)] d\bar{K}_1 \\ &= \int W_1(K_0 \cap K_1) dK_1 - c_n [W_1(K_0) v(K_1) + v(K_0) W_1(K_1)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Darin bezeichnet dK_1 die *kinematische Dichte* von K_1 und c_n das vollständige Drehintegral (s. HADWIGER [7], 6.2.1). Das gemischte Volumen $v_1(A, H)$ ist gleich dem ersten Quermaßintegral $W_1(A)$, da H eine Einheitskugel ist. Ferner wurde benutzt, daß die Funktionale $v(K_1)$ und $W_1(K_1)$ bewegungsinvariant sind. Nach HADWIGER [7], 6.3.7, ist die rechte Seite von (3.6) gleich Null, es gilt also in (3.5) das Gleichheitszeichen. Nun hängt, wie man unschwer nachweist, das Funktional $\mathfrak{F}(K_0, K_1^\delta, H)$ stetig von der Drehung δ ab (K_1^δ bezeichnet das Bild von K_1 unter δ ; die Drehgruppe ist mit der üblichen Topologie versehen). Daher kann wegen (3.4) das Gleichheitszeichen in (3.5) nur dann bestehen, wenn $\mathfrak{F}(K_0, K_1^\delta, H) = 0$ ist für jede Drehung δ . Insbesondere ist also

$$\mathfrak{F}(K_0, K_1, H) = 0.$$

Dies gilt, wenn H eine Einheitskugel ist, und daher auch, wenn H eine beliebige Kugel ist.

Bei festgehaltenen K_0, K_1 definieren wir nun für beliebige konvexe Körper H ein Funktional $\mathfrak{G}(H)$ durch

$$\mathfrak{G}(H) = \int \mathfrak{F}(K_0, K_1, H) d\bar{H},$$

wo über alle Drehungen von H zu integrieren ist. Das Funktional \mathfrak{G} ist offenbar bewegungsinvariant und im Minkowskischen Sinn linear. Sind also β_1, \dots, β_r Bewegungen und μ_1, \dots, μ_r nichtnegative reelle Zahlen mit $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$, so ist

$$\mathfrak{G}(\mu_1 H^{\beta_1} + \dots + \mu_r H^{\beta_r}) = \mu_1 \mathfrak{G}(H^{\beta_1}) + \dots + \mu_r \mathfrak{G}(H^{\beta_r}) = \mathfrak{G}(H).$$

Nach einem Satz von HADWIGER [7], 4.5.3, kann man die Bewegungen β_1, \dots, β_r und die Zahlen μ_1, \dots, μ_r so wählen, daß der Körper $\mu_1 H^{\beta_1} + \dots + \mu_r H^{\beta_r}$ sich beliebig wenig (im Sinne der Hausdorff-Metrik) von einer geeigneten Kugel unterscheidet. Da das Funktional \mathfrak{G} für Kugeln verschwindet und da es, wie man leicht einsieht, stetig ist, muß \mathfrak{G} identisch verschwinden. Aus (3.4) folgt dann nach der bereits

einmal benutzten Schlußweise, daß $\mathfrak{F}(K_0, K_1, H^\delta) = 0$ ist für alle Drehungen δ ; insbesondere folgt also

$$\mathfrak{F}(K_0, K_1, H) = 0$$

für beliebige konvexe Körper K_0, K_1, H . Damit ist (3.2) für $p = 1$ bewiesen.

Wir beweisen nun die Gl. (3.2) für ein beliebiges $p \geq 2$ und können dazu annehmen, sie sei bereits für alle kleineren natürlichen Zahlen bewiesen. Wir setzen

$$K_0 \cap (K_p + x_p) = H_0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} & \int \dots \int v_1(K_0 \cap (K_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_p + x_p), H) dx_1 \dots dx_p \\ &= \int [\int \dots \int v_1(H_0 \cap (K_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_{p-1} + x_{p-1}), H) dx_1 \dots dx_{p-1}] dx_p \\ &= v(K_1) \dots v(K_{p-1}) [\int v_1(K_0 \cap (K_p + x_p), H) dx_p \\ &\quad + \int v(K_0 \cap (K_p + x_p)) dx_p \sum_{m=1}^{p-1} v_1(K_m, H) v(K_m)^{-1}] \\ &= v(K_1) \dots v(K_{p-1}) [v_1(K_0, H) v(K_p) + v(K_0) v_1(K_p, H) \\ &\quad + v(K_0) v(K_p) \sum_{m=1}^{p-1} v_1(K_m, H) v(K_m)^{-1}] \\ &= v(K_0) \dots v(K_p) \sum_{j=0}^p v_1(K_j, H) v(K_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei ist zweimal die Induktionsannahme und einmal (3.1) benutzt worden. Die Gl. (3.2) ist damit bewiesen.

4. Beweis von (1.2)

Die Identität (1.2) ist nun schnell bewiesen: Setzen wir $n = 2$ und $p \geq 2$ voraus, so sind die in (2.5) auftretenden Integrale nach (3.1) und (3.2) bekannt; wir haben

$$\begin{aligned} V(D_p K) &= v(K) V'(D_{p-1} K) + \\ &\quad + 2 \int \dots \int v_1(K \cap (K + x_1) \cap \dots \cap (K + x_{p-1}), -K) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ &\quad + \int \dots \int v(K \cap (K + x_1) \cap \dots \cap (K + x_{p-1})) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ &= v(K) V'(D_{p-1} K) + 2pv(K)^{p-1} v_1(K, -K) + v(K)^p. \end{aligned}$$

Hier können wir $v_1(K, -K)$ gemäß

$$v(DK) = v(K + (-K)) = 2[v(K) + v_1(K, -K)]$$

durch $v(DK)$ und $v(K)$ ausdrücken und erhalten

$$\delta_p(K) = \delta_{p-1}(K) + p\delta_1(K) + 1 - 2p.$$

Die Gl. (1.2) ergibt sich dann durch Induktion.

Um zu zeigen, daß für $n \geq 3$, $p \geq 2$ die Körper mit minimalem $\delta_p(K)$ im allgemeinen nicht durch die Gesamtheit der zentralsymmetrischen Körper geliefert werden, berechnen wir für $n = 3$ den Wert von $\delta_2(K)$ zunächst für ein Parallelepipid, dann für ein Ellipsoid. Die Berechnung geschieht zweckmäßigerweise mittels der für zentralsymmetrische Körper gültigen Formel

$$V(D_2K) = \int_{DK} v([K \cap (K+x)] + K) dx.$$

Wir wählen im R^n eine euklidische Metrik und dazu eine ortho-normierte Basis. Wegen der affinen Invarianz des Ausdrucks $\delta_2(K)$ können wir K als Würfel der Kantenlänge 1 mit Kanten parallel zu den Basisvektoren annehmen. Sind x^1, x^2, x^3 die Koordinaten von x , so ist für $x \in DK$ der Körper $[K \cap (K+x)] + K$ ein rechtwinkeliges Parallelepiped mit den Kantenlängen $1 - |x^m| + 1$, $m = 1, 2, 3$. Also ist

$$v([K \cap (K+x)] + K) = \prod_{m=1}^3 (2 - |x^m|).$$

Die Integration ergibt

$$\delta_2(K) = V(D_2K) v(K)^{-2} = 27.$$

Ist eine K Kugel vom Radius 1, so ist $[K \cap (K+x)] + K$ für $x \in DK$ der äußere Parallelkörper im Abstand 1 zu einer gewissen Kugellinse; man berechnet

$$v([K \cap (K+x)] + K) = 2\pi \left[\frac{16}{3} - 5 \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]$$

mit $|x| = 2 \cos \alpha$. Die Integration ergibt

$$\delta_2(K) = V(D_2K) v(K)^{-2} = 21 + (3\pi/4)^2 < 27.$$

5. Beweis von Satz 2.

Wir verallgemeinern zunächst ein von FÁRY und RÉDEI [4] benutztes Lemma:

Für einen konvexen Körper $K \subset R^n$ und für $X \in D_p K$ sei

$$f(X) = v(D(K, X))^{1/n}. \tag{5.1}$$

Dann ist $f(X)$ eine konkave Funktion auf $D_p K$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Familie der konvexen Mengen des R^n der Form $D(K, X)$ mit $X \in D_p K$ konkav ist: Sei

$$a \in (1-\mu) D(K, X_1) + \mu D(K, X_2) \text{ mit } X_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha) \in D_p K$$

und $\mu \geq 0$. Dann ist $a = (1-\mu)a_1 + \mu a_2$ mit $a_\alpha \in D(K, X_\alpha)$, also mit $a_\alpha \in K$ und $a_\alpha = b_i^\alpha + x_i^\alpha$ mit $b_i^\alpha \in K$. Wegen der Konvexität von K ist $a = (1-\mu)a_1 + \mu a_2 \in K$ und

$$\begin{aligned} a &= (1-\mu)(b_i^1 + x_i^1) + \mu(b_i^2 + x_i^2) \\ &= (1-\mu)b_i^1 + \mu b_i^2 + (1-\mu)x_i^1 + \mu x_i^2 \\ &\in K + (1-\mu)x_i^1 + \mu x_i^2, \end{aligned}$$

d. h. es ist $a \in D(K, (1-\mu)X_1 + \mu X_2)$. Damit ist die Behauptung

$$(1-\mu) D(K, X_1) + \mu D(K, X_2) \subset D(K, (1-\mu)X_1 + \mu X_2)$$

gezeigt. Die Richtigkeit von (5.1) ergibt sich dann aus dem Brunn-Minkowskischen Satz.

CHAKERIAN [3] hat den von ROGERS und SHEPHARD [8] für die Abschätzung von $v(DK)$ gegebenen Beweis zu einem Beweis des folgenden allgemeineren Satzes abgewandelt:

(5.2) Sei f eine nichtnegative, konkave, reelle Funktion, die definiert ist für die Punkte eines konvexen Körpers $B \subset R^d$. Sei $X_0 \in B$, sei $h(\xi)$ für $\xi \geq 0$ eine streng monoton zunehmende, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen. Dann ist, wenn V ein affines Volumen in R^d bezeichnet,

$$\int_B (f(X)) dV(X) \geq dV(B) \int_0^1 h(tf(X_0)) (1-t)^{d-1} dt.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f auf dem Rand von B verschwindet und linear ist auf jedem Segment, das X_0 mit dem Rand von B verbindet.

Um diesen Satz auf die Abschätzung von $V(D_p K)$ anzuwenden, können wir R mit R^{pn} identifizieren und $d = pn$ wählen. Ferner setzen wir $B = D_p K$, $X_0 = 0$, $h(\xi) = \xi^n$, $f(X)$ wie in (5.1). Nach (5.1) ist f konkav. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_{D_p K} \dots \int v(K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_p)) dx_1 \dots dx_p &\geq \\ &\geq \binom{pn+n}{n}^{-1} V(D_p K) v(K). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Da nach (3.1) die linke Seite von (5.3) mit $v(K)^{p+1}$ übereinstimmt, ergibt sich die Ungleichung von Satz 2. Hierin gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $f(\mu X) = (1-\mu)f(0)$ für $X \in Rd D_p K$ und $0 \leq \mu \leq 1$ gilt. Ist dies der Fall, so ist für jedes $X \in D_p K$ der Körper

$D(K, X)$ homothetisch zu K (man beachte, wie beim Beweis von (5.1) der Brunn-Minkowskische Satz benutzt wurde); insbesondere ist $K \cap (K+x)$ homothetisch zu K für jedes $x \in DK$. Dann ist K bekanntlich ein Simplex. Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, daß K ein Simplex ist. O. B. d. A. können wir dann annehmen, daß K aus allen Punkten $y \in R^n$ besteht, deren Koordinaten y^1, \dots, y^n bezüglich einer passenden Basis die Ungleichungen

$$y^k \geq 0, \quad \Sigma y^k \leq 1$$

erfüllen. Sei $X = (x_1, \dots, x_p) \in Rd D_p K$, seien x_i^1, \dots, x_i^n die Koordinaten von x_i . Sei $0 \leq \mu \leq 1$. Dann besteht $D(K, \mu X)$ genau aus allen Punkten $y \in R^n$ mit

$$\left. \begin{aligned} y^k &\geq 0, \quad \Sigma y^k \leq 1, \\ y^k - \mu x_i^k &\geq 0, \quad \Sigma_k (y^k - \mu x_i^k) \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Die Ungleichungen (5.4) sind äquivalent mit

$$\left. \begin{aligned} y^k &\geq \mu \text{Max} \{0, x_1^k, \dots, x_p^k\}, \\ \Sigma y^k &\leq 1 + \mu \text{Min} \{0, \Sigma x_1^k, \dots, \Sigma x_p^k\} \end{aligned} \right\}. \quad (5.5)$$

Wird $\text{Max} \{0, x_1^k, \dots, x_p^k\} = a^k$ und

$$1 + \mu (\text{Min} \{0, \Sigma x_1^k, \dots, \Sigma x_p^k\} - \Sigma a^k) = \tau$$

gesetzt, so ist (5.5) äquivalent mit

$$\left. \begin{aligned} y^k - \mu a^k &\geq 0 \\ \Sigma (y^k - \mu a^k) &\leq \tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Die Punkte y , für deren Koordinaten (5.6) gilt, erfüllen gerade das Simplex $\tau K + \mu a$, wenn a der Vektor mit den Koordinaten a^1, \dots, a^n ist; also ist $D(K, \mu X) = \tau K + \mu a$. Nun ist τ linear in μ , und es ist $\tau = 1$ für $\mu = 0$; da wegen der Voraussetzung $X \in Rd D_p K$ der Körper $D(K, X)$ keine inneren Punkte hat, ist $\tau = 0$ für $\mu = 1$, es ist also $\tau = 1 - \mu$. Es ergibt sich $D(K, \mu X) = (1 - \mu) K + \mu a$ und daher $f(\mu X) = (1 - \mu) f(0)$; in der Ungleichung (5.3) gilt also das Gleichheitszeichen.

6. Beweis von Satz 3.

Wir zeigen zunächst die folgende, für $n \geq 3$, $p = 2, 3, \dots$ und beliebige konvexe Körper $K \subset R^n$ gültige Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int \dots \int_{D_{p-1} K} v_2(K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}), K) dx_1 \dots dx_{p-1} &\leq \\ &\leq \frac{p(np-1)}{n-1} v(K)^p. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Zum Beweis sei $\mu \geq 0$. Wegen der Relation

$$(A_1 \cap \dots \cap A_k) + B \subset (A_1 + B) \cap \dots \cap (A_k + B)$$

und der Monotonie der gemischten Volumina ist

$$\begin{aligned} & \int_{D_{p-1}K} \dots \int v_1([K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1})] + \mu K, K) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ & \leq \int_{D_{p-1}K} \dots \int v_1((1+\mu)K \cap ((1+\mu)K+x_1) \cap \dots \cap ((1+\mu)K+x_{p-1}), K) dx_1 \dots dx_{p-1}. \end{aligned}$$

Wegen $\mu \geq 0$ ist $D_{p-1}K \subset (1+\mu)D_{p-1}K = D_{p-1}((1+\mu)K)$, also ist das letzte Integral

$$\begin{aligned} & \leq \int_{D_{p-1}((1+\mu)K)} \dots \int v_1((1+\mu)K \cap ((1+\mu)K+x_1) \cap \dots \cap ((1+\mu)K+x_{p-1}), K) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ & = pv(K)^p (1+\mu)^{np-1} \end{aligned}$$

nach (3.2). Durch Entwicklung des obigen gemischten Volumens und der Potenz von $(1+\mu)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \mu^m \int_{D_{p-1}K} \dots \int v_{1+m}(K \cap (K+x_1) \cap \dots \cap (K+x_{p-1}), K) dx_1 \dots dx_{p-1} \\ & \leq pv(K)^p \sum_{m=0}^{np-1} \binom{np-1}{m} \mu^m. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $\mu \geq 0$ gilt und da die Koeffizienten von μ^0 nach (3.1) auf beiden Seiten übereinstimmen, folgt die Ungleichung (6.1).

Um nun Satz 3 zu beweisen, setzen wir $n = 3$ voraus und nehmen den konvexen Körper $K \subset R^3$ als zentralsymmetrisch an. In der Gl. (2.5) können wir dann $-K$ durch K ersetzen, und unter Verwendung von (6.1), (3.3) und (3.1) erhalten wir

$$V(D_p K) \leq v(K)V'(D_{p-1}K) + \frac{3}{2}p(3p-1)v(K)^p + 3pv(K)^p + v(K)^p,$$

also

$$\delta_p(K) \leq \delta_{p-1}(K) + \frac{3}{2}p(3p+1) + 1.$$

Hiermit ergibt sich (1.5) durch Induktion, wenn man die für zentralsymmetrische Körper K gültige Beziehung $\delta_1(K) = 8$ beachtet.

Literatur

- [1] BALANZAT, M.: Sur quelques formules de la géométrie intégrale des ensembles dans un espace à n dimensions. *Portugaliae Math.* **3**, 87–94 (1942).
- [2] BERWALD, L. und O. VARGA: Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum. *Math. Z.* **42**, 710–736 (1937).
- [3] CHAKERIAN, G. D.: Inequalities for the difference body of a convex body. *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 879–884 (1967).
- [4] FÁRY I. und L. RÉDEI: Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. *Math. Ann.* **122**, 205–220 (1950).
- [5] GRÜNBAUM, B.: Measures of symmetry for convex sets. *Proc. Symp. Pure Math.* **7** (Convexity), 233–270 (1963).
- [6] HADWIGER, H.: Altes und Neues über konvexe Körper. Basel-Stuttgart, 1955.
- [7] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
- [8] ROGERS, C. A. und G. C. SHEPHARD: The difference body of a convex body. *Arch. Math.* **8**, 220–233 (1957).
- [9] STEIN, S.: The symmetry function in a convex body. *Pacific J. Math.* **6**, 145–148 (1956).

Dr. ROLF SCHNEIDER
Abteilung für Mathematik der Ruhr-Universität
D-463 Bochum
Buscheystraße