manuscripta math. 31, 269 - 283 (1980)

manuscripta mathematica

ÜBER SPHÄRISCHE BLÄTTERUNGEN UND DIE VOLLSTÄNDIGKEIT IHRER BLÄTTER

Sönke Hiepko und Helmut Reckziegel

Let M be a Riemannian manifold, Ω a differentiable form on M with values in a bundle $\mathrm{Hom}(TM,\zeta)$, and let G be an open subset of M such that $\mathrm{Ker}\Omega$ forms a vector bundle ξ of constant fibre dimension $k>0$ over G. We prove: If Ω satisfies some analytical conditions, then ξ is completely integrable, the integral manifolds of ξ are spherically bent in M, and in some interesting cases they are complete.

Einleitung

Wird ein mathematisches Problem durch eine auf einer Mannigfaltigkeit M definierte Differentialform Ω beschrieben, so gibt häufig der Kern von Ω interessante Informationen. In dem Falle, daß die Vektorräume Kern Ω_p für die Punkte p einer offenen Teilmenge $G \subset M$ eine konstante Dimension $k>0$ haben, ist Kern $\Omega|G$ bekanntlich ein Untervektorbündel ξ des Tangentialbündels TG. Beschreibt Ω nun einen geometrischen Sachverhalt in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und ist ξ vollständig integrabel, so ist zu hoffen, daß auch die Blätterung der Integralmannigfaltigkeiten von ξ geometrisch interessante Eigenschaften hat.

Angeregt durch die in der Differentialgeometrie auftauchenden Beispiele gehen wir von einem über M definierten Vektorbündel ζ aus, das mit einer kovarianten

0025-2611/80/0031/0269/$03.00

Ableitung versehen ist. Für eine Hom(TM,ζ)-wertige Differentialform Ω geben wir dann in den Sätzen 1.6 und 2.1 analytische Bedingungen an, die garantieren,

a) daß das wie oben definierte Untervektorbündel ξ vollständig integrabel ist und die Integralmannigfaltigkeiten von ξ in M "sphärisch gekrümmt" sind und
b) daß diese Integralmannigfaltigkeiten vollständige Riemannsche Untermannigfaltigkeiten von G sind.

Die Vollständigkeitsaussage von Satz 2.1 und die Beispiele in Abschnitt 3 sind die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit.

Die ersten konkreten Resultate dieser Art bezogen sich auf totalgeodätische Blätterungen, insbesondere die "Nullitätsblätterungen" isometrischer Immersionen, vgl. [1]. Mit der Entdeckung einer engen Beziehung zwischen totalgeodätischen Blätterungen und Jacobifeldern gelangte Dombrowski in der Arbeit [2] zu einer einheitlichen Darstellung aller bisher bekannten Vollständigkeitsergebnisse totalgeodätischer Blätterungen. Durch eine Modifikation seiner Idee konnte in [6] ein analoges Resultat für die Krümmungsflächen isometrischer Immersionen bewiesen werden. Für den Satz 2.1 der vorliegenden Arbeit kombinieren wir den allgemeinen Ansatz von Dombrowski mit der modifizierten Technik von Reckziegel. Damit erfassen wir neben den uns bekannten totalgeodätischen Beispielen auch sphärische Blätterungen, für welche die Ergebnisse weitgehend neu sind. - Der größte Teil dieser Resultate wurde in der Dissertation [3] erzielt.

1. Nabelsche und sphärische Untervektorbündel

1.1 Bezeichnungen Sämtliche auftretenden Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder, Riemannsche Metriken usw. seien als C^∞-differenzierbar vorausgesetzt. Ist ξ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit G, so bezeichnen wir mit ξ_p die Faser von ξ über $p \in G$, mit $rg(\xi)$ die Faserdimension von ξ und mit $\Gamma(\xi)$ den Modul der C^∞-Schnitte von

ξ . Ist G eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ξ ein Untervektorbündel des Tangentialbündels TG , so bezeichnen wir mit $\xi^{\perp}$ das orthogonale Komplement von ξ in TG und mit $P : TG \longrightarrow \xi$ und $Q : TG \longrightarrow \xi^{\perp}$ die Orthogonalprojektionen.

Da die geometrische Struktur der von uns untersuchten Blätterungen sich besonders einfach mittels ihrer Tangentialbündel beschreiben läßt (vgl. Bemerkung 1.3), definieren wir:

1.2 DEFINITION Es sei G eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Riemannsche Metrik auf G , ∇ ihre Levi-Civita-Ableitung und ξ ein Untervektorbündel von TG mit $1 \leq \mathrm{rg}(\xi) \leq m-1$.

(i) ξ heißt nabelsch, wenn ein Vektorfeld $H \in \Gamma(\xi^{\perp})$ existiert, so daß gilt:

$$Q\nabla_X Y = \langle X,Y\rangle \cdot H \quad \text{für alle} \quad X,Y \in \Gamma(\xi) . \tag{1}$$

(ii) ξ heißt sphärisch, wenn ξ nabelsch ist und wenn für das durch (1) eindeutig charakterisierte "Hauptnormalenfeld" H gilt:

$$Q\nabla_X H = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in \Gamma(\xi) . \tag{2}$$

Die nicht-trivialen, autoparallelen Untervektorbündel von TG sind gerade die sphärischen Untervektorbündel mit verschwindender Hauptnormale H , vgl. [2] Lemma 1 (iii).

1.3 Bemerkung Sind die Voraussetzungen der Definition 1.2 erfüllt, so folgt unmittelbar:

a) Ist ξ nabelsch und H das Hauptnormalenfeld von ξ , so ist ξ involutiv und daher vollständig integrabel, und für jede Integralmannigfaltigkeit L_0 von ξ ist $H|L_0$ das mittlere Krümmungsnormalenfeld.

b) Ist ξ vollständig integrabel und L die Blätterung der Integralmannigfaltigkeiten von ξ , so gilt: ξ ist genau dann sphärisch (bzw. nabelsch), wenn die Blätterung L sphärisch (bzw. nabelsch) ist, d.h. wenn jede Integralmannigfaltigkeit von ξ sphärisch (bzw. nabelsch) ist.[1)]

Es folgt eine Kennzeichnung der nabelschen Untervektorbündel, die das Hauptnormalenfeld nicht enthält.

1.4 LEMMA Unter den Voraussetzungen von 1.2 gilt:

a) ξ ist genau dann nabelsch, wenn für alle $X,Y \in \Gamma(\xi)$ gilt: $\langle X,Y\rangle = 0 \Longrightarrow \nabla_X Y \in \Gamma(\xi)$. (3)

(Triviale Folgerung: $rg(\xi) = 1 \Longrightarrow \xi$ ist nabelsch.)

b) Ist ξ nabelsch, ist H das Hauptnormalenfeld von ξ und ist R der Krümmungstensor von ∇, so ist

$QR(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle Q\nabla_X H - \langle X,Z\rangle Q\nabla_Y H$ für alle $X,Y,Z \in \Gamma(\xi)$. (3')

Diese Gleichung faßt die Codazzi-Gleichungen aller Integralmannigfaltigkeiten von ξ zusammen.

Beweis: (1) impliziert trivial (3). - Gelte umgekehrt (3). Für je zwei lokale Einheitsfelder E,F von ξ folgt dann $Q(\nabla_F E - \nabla_E F) = Q(\nabla_{\phi E} E - \nabla_E \phi E) = -(E\phi)QE = 0$ mit $\phi = \langle F,E\rangle$, also $0 = Q\nabla_{E+F}(E-F) = Q\nabla_E E - Q\nabla_F F$. Durchläuft E die lokalen Einheitsvektorfelder von ξ, so fügen sich daher die Felder $Q\nabla_E E$ zu einem globalen Feld $H \in \Gamma(\xi^{\perp})$ zusammen, für das man nun mühelos die tensorielle Gleichung (1) beweist. Zum Beweis von b) beachte man $id_{TG} = P+Q$ und (1).

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns Untervektorbündeln zu, die durch Differentialformen definiert werden.

1.5 Generalvoraussetzungen Es sei M eine m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Levi-Civita-Ableitung ∇; weiterhin sei ζ ein Vektorbündel über M mit einer kovarianten Ableitung $\bar{\nabla}$ und Ω eine alternierende $Hom(TM,\zeta)$-wertige Differentialform auf M vom Grad $r \in \{0,\ldots,m\}$, vgl. die Beispiele in Abschnitt 3. Für jeden

---

1) Eine Untermannigfaltigkeit L von G heißt nabelsch, wenn die zweite Fundamentalform α von L mittels der mittleren Krümmungsnormalen η von L durch $\alpha = \langle\cdot,\cdot\rangle\cdot\eta$ beschrieben wird. Ist außerdem η in dem Normalenbündel von L parallel, so nennen wir L sphärisch (nach Nomizu).

Punkt $p \in M$ ist der Kern von Ω in p durch

$$\text{Kern } \Omega_p := \left\{ w \in T_pM \,\middle|\, \begin{array}{l} \Omega(v_1,\dots,v_r)w = 0 \text{ für} \\ \text{alle } v_1,\dots,v_r \in T_pM \end{array} \right\}$$

gegeben.2) Die Cartansche Ableitung $d\Omega$ ist eine alternierende $\mathrm{Hom}(TM,\zeta)$-wertige Differentialform vom Grad $r+1$, und zwar gilt für $X_o,\dots,X_r,Z \in \Gamma(TM)$

$$d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z =$$
$$\sum (-1)^i \cdot (\bar{\nabla}_{X_i}(\Omega(X_o,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_r)Z) - \Omega(X_o,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_r)\nabla_{X_i}Z)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \cdot \Omega([X_i,X_j],X_o,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_r)Z \quad ,$$

vgl. [2] Formel (61). Es wird nun vorausgesetzt, daß es ein $k \in \{1,\dots,m-1\}$ und eine offene Menge $G \subset M$ gibt, so daß

$$\underline{\dim \text{Kern } \Omega_p = k \quad \text{für alle } p \in G}$$

ist. Dann bilden die Untervektorräume Kern Ω_p über G ein Untervektorbündel ξ von TG. Weiterhin nehmen wir im Falle $r \geq 1$ an, daß Ω die folgende Bedingung erfüllt:

<u>(A0)</u> $\Omega(X_1,\dots,X_r) = 0$ <u>für alle</u> $X_1 \in \Gamma(\xi)$ <u>und alle</u> $X_2,\dots,X_r \in \Gamma(TG)$;

also gilt für alle $X_1,\dots,X_r,Z \in \Gamma(TG)$:

$$\Omega(X_1,\dots,X_r)Z = \Omega(QX_1,\dots,QX_r)QZ \ .$$

Ist $X_o \in \Gamma(\xi)$, so vereinfacht sich die Formel für $d\Omega$ daher zu

$$d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z = \bar{\nabla}_{X_o}(\Omega(X_1,\dots,X_r)Z) - \Omega(X_1,\dots,X_r)\nabla_{X_o}Z + \sum (-1)^j \Omega([X_o,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_j},\dots,X_r)Z. \tag{4}$$

<u>1.6 SATZ</u> <u>VORAUSSETZUNG</u> : <u>Gegeben sei die Situation</u> 1.5.
<u>BEHAUPTUNG</u> : a) ξ <u>ist ein nabelsches Untervektorbündel von</u> TG <u>genau dann, wenn für</u> Ω <u>gilt:</u>

<u>(A1)</u> <u>Für alle</u> $X_o,Z \in \Gamma(\xi)$ <u>mit</u> $\langle X_o,Z\rangle = 0$ <u>und alle</u> $X_1,\dots,X_r \in \Gamma(\xi^\perp)$ <u>ist</u> $d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z = 0$.

---

2) Ist $r=0$, so ist Ω ein Vektorbündel-Homomorphismus $TM \longrightarrow \zeta$. In diesem Fall steht $\Omega(v_1,\dots,v_r)w$ für Ωw .

b) <u>Ist</u> ξ <u>nabelsch, ist</u> H <u>das Hauptnormalenfeld von</u> ξ <u>und sind</u> $X_o,\dots,X_{r+1},Z \in \Gamma(TG)$, <u>so gilt</u>

$$d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z = \begin{cases} 0 \ , & \text{wenn } r \geq 1 \text{ und } X_o,X_1 \in \Gamma(\xi) \\ -\langle X_o,Z\rangle\cdot\Omega(X_1,\dots,X_r)H \ , & \text{wenn } X_o,Z \in \Gamma(\xi) \end{cases} \tag{5}$$

<u>und, wenn</u> $X_o,X_1,Z \in \Gamma(\xi)$:

$$dd\Omega(X_o,\dots,X_{r+1})Z = \Omega(X_2,\dots,X_{r+1})(\langle X_o,Z\rangle\cdot\nabla_{X_1}H - \langle X_1,Z\rangle\cdot\nabla_{X_o}H) \ . \tag{6}$$

c) <u>Ist</u> ξ <u>nabelsch mit</u> $rg(\xi) \geq 2$, <u>so ist</u> ξ <u>ein sphärisches Untervektorbündel von</u> TG <u>genau dann, wenn für</u> Ω <u>gilt</u>:

(<u>A2</u>) <u>Für alle</u> $X_o,X_1 \in \Gamma(\xi)$ <u>mit</u> $\langle X_o,X_1\rangle = 0$ <u>und alle</u> $X_2,\dots,X_{r+1} \in \Gamma(\xi^\perp)$ <u>ist</u> $dd\Omega(X_o,\dots,X_{r+1})X_o = 0$.

Die geometrische Bedeutung des Satzes für die Integralmannigfaltigkeiten von ξ ist aus Bemerkung 1.3 zu ersehen.

Beweis: Zu a): Sind $X_o,Z \in \Gamma(\xi)$, so reduziert sich (4) zu

$$d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z = -\Omega(X_1,\dots,X_r)\nabla_{X_o}Z \ . \tag{7}$$

Daher folgt aus (A0)

$$-d\Omega(X_o,QX_1,\dots,QX_r)Z$$
$$= \Omega(QX_1,\dots,QX_r)\nabla_{X_o}Z = \Omega(X_1,\dots,X_r)\nabla_{X_o}Z \ ,$$

weshalb (A1) offenbar zu (3) äquivalent ist.

Zu b): Sind $X_o,X_1 \in \Gamma(\xi)$, also nach 1.3 a) auch $[X_o,X_1] \in \Gamma(\xi)$, so folgt die erste Gleichung von (5) aus (4) und (A0). Zum Beweis der zweiten verwende man (7) und (1) und beachte, daß man $\nabla_{X_o}Z$ in (7) durch $Q\nabla_{X_o}Z$ ersetzen kann.

Zu (6): Mit $\hat{\nabla}$ bezeichnen wir die kovariante Ableitung von $Hom(TG,\zeta)$, die von ∇ und $\bar{\nabla}$ induziert wird, und mit R , $\bar{R}$ bzw. $\hat{R}$ die Krümmungsformen von ∇ , $\bar{\nabla}$ bzw. $\hat{\nabla}$. Dann zeigt eine leichte Rechnung

$$(\hat{R}(X,Y)S)Z = \bar{R}(X,Y)(SZ) - S(R(X,Y)Z) \tag{8}$$

für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TG)$ und $S \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TG,\zeta))$. Die bekannte Formel

$$dd\Omega = \hat{R} \wedge \Omega \tag{9}$$

des Cartanschen Kalküls Vektorbündel-wertiger Differentialformen besagt nun explizit

$$dd\Omega(X_o,\dots,X_{r+1}) =$$
$$= -\sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, \hat{R}(X_i,X_j)\Omega(X_o,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_{r+1}) ,$$

so daß für $X_o,X_1,Z \in \Gamma(\xi)$ und $S := \Omega(X_2,\dots,X_{r+1})$ wegen $\xi \subset \mathrm{Kern}\ S$ und wegen (A0) und (8) sofort folgt:

$$dd\Omega(X_o,\dots,X_{r+1})Z = (\hat{R}(X_o,X_1)S)Z$$
$$= - S(R(X_o,X_1)Z) = - S(QR(X_o,X_1)Z) .$$

Hieraus ergibt sich (6) mittels (3'). - Bei Beachtung von (A0) und (2) ist Aussage c) nun eine unmittelbare Konsequenz von (6).

2. Vollständigkeit von Integralmannigfaltigkeiten sphärischer Untervektorbündel

2.1 SATZ VORAUSSETZUNG : Es sei die in 1.5 beschriebene Situation gegeben. Das Untervektorbündel ξ von TG sei sphärisch und es gelte:

(A1') Für alle $X_o \in \Gamma(\xi)$, $X_1,\dots,X_r \in \Gamma(\xi^\perp)$ und $Z \in \Gamma(TG)$ mit $\langle X_o,Z\rangle = 0$ ist $d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z = 0$, oder es existiert eine $\bar{\nabla}$-parallele (von $X_o,\dots,X_r$, Z unabhängige) Riemannsche Metrik g für ζ, so daß $g(d\Omega(X_o,\dots,X_r)Z,\Omega(X_1,\dots,X_r)Z) = 0$ ist.

BEHAUPTUNG : a) Sei $\delta \in \mathbb{R}_+$ und $c : [0,\delta] \longrightarrow M$ ein stetiger Weg. Ist $c|[0,\delta[$ eine Geodätische einer Integralmannigfaltigkeit von ξ, so ist auch noch

$$\dim \mathrm{Kern}\ \Omega_{c(\delta)} = k .$$

b) Ist M vollständig, $k = \min \dim \operatorname{Kern} \Omega_p$ $(p \in M)$ und G die offene Menge $\{p \in M \mid \dim \operatorname{Kern} \Omega_p = k\}$, so sind alle maximalen Integralmannigfaltigkeiten von ξ vollständige Riemannsche Untermannigfaltigkeiten von M, (obwohl sie nur eine Blätterung von G bilden).[3)]

2.2 Vorbemerkungen zum Beweis Die Aussage b) ist eine Folgerung von a); der Beweis verläuft genauso wie der von Theorem 1(v) in [6]. Bei dem Beweis von a) dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß die Geodätische c die Geschwindigkeit $\|\dot{c}\| = 1$ hat. Da ξ sphärisch ist, ist dann $c|[0,\delta[$ ein "geodätischer Kreisbogen" von M, d.h.

$$\nabla_\partial \nabla_\partial \dot{c} + \langle \nabla_\partial \dot{c}, \nabla_\partial \dot{c} \rangle \, \dot{c} = 0 \quad , \quad ^{4)} \tag{10}$$

vgl. [6], Remark vor Proposition 4. Daher kann c nach [6] Prop. 4 differenzierbar über δ hinaus fortgesetzt werden; genauer: Wir dürfen annehmen, daß c auf einem offenen Intervall I, das $[0,\delta]$ enthält, als C^∞-Weg definiert ist. Die Untersuchung, wie sich $\operatorname{Kern} \Omega_{c(t)}$ für $t \to \delta$ verhält, ist bedeutend schwieriger. Der komplizierte Teil wird in dem folgenden Lemma abgetrennt. So wie die Fortsetzbarkeit von c daraus folgt, daß man die Geodätischengleichung von c durch die in ganz M sinnvolle Differentialgleichung (10) ersetzt, so werden wir im Beweis des Lemmas die Differentialgleichung (17), die nur auf $[0,\delta[$ sinnvoll ist, durch das Gleichungssystem (16) ersetzen, das Lösungen über ganz I besitzt. Dieses System ist eine Verallgemeinerung der Jacobischen Differentialgleichung und erfaßt analytisch die infinitesimale Variation geodätischer Kreise von M.

2.3 LEMMA Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.1 erfüllt, und $c : I \longrightarrow M$ sei wie in 2.2. Dann gilt: Ist $Z \in \Gamma(c^*TM)$ eine Lösung der Differentialgleichung

---

3) Die hier definierte Menge G ist offen, weil die Funktion $p \mapsto \dim \operatorname{Kern} \Omega_p$ nach oben halbstetig ist.

4) Mit ∂ wird das kanonische Einheitsvektorfeld von $\mathbb{R}$ bezeichnet.

$$\nabla_\partial Z = \langle \dot c, Z\rangle \nabla_\partial \dot c - \langle Z, \nabla_\partial \dot c\rangle \dot c \tag{11}$$

mit $\langle Z(\delta), \dot c(\delta)\rangle = 0$, so ist $\langle Z, \dot c\rangle \equiv 0$ und zu beliebigen Anfangswerten $w_1,\dots,w_r \in \xi^\perp_{c(0)}$ existieren Vektorfelder $X_1,\dots,X_r \in \Gamma(c^*TM)$ jeweils mit $X_j(0) = w_j$, so daß

$$\overline{\nabla}_\partial(\Omega(X_1,\dots,X_r)Z)|[0,\delta[= d\Omega(\dot c, QX_1,\dots,QX_r)Z|[0,\delta[. \tag{12}$$

Beweis: Mit (11) folgt zunächst $\partial\langle Z, \dot c\rangle = 0$, also $\langle Z, \dot c\rangle \equiv 0$. Da $c|[0,\delta[$ eine Kurve in einer Integralmannigfaltigkeit von ξ ist, haben wir

$$\dot c(t) \in \xi_{c(t)} \quad \text{für} \quad 0 \le t < \delta \tag{13}$$

und daher wegen (11) auch

$$(\nabla_\partial Z)_t \in \xi_{c(t)} \quad \text{für} \quad 0 \le t < \delta \quad . \tag{14}$$

Mit Hilfe des Hauptnormalenfeldes H von ξ und der Orthogonalprojektionen $P : TG \longrightarrow \xi$ und $Q : TG \longrightarrow \xi^\perp$ führen wir auf G eine modifizierte kovariante Ableitung

$$\hat\nabla_X Y := \nabla_X Y - \langle X, Y\rangle \cdot H + \langle Y, H\rangle \cdot X$$

und ein Tensorfeld

$$B(X,Y) := Q\nabla_Y PX - \langle PX, PY\rangle \cdot H$$

vom Typ (2,1) ein. Offenbar gilt $Q[X,Y] = Q(\hat\nabla_X Y - B(X,Y))$ für alle $X \in \Gamma(\xi)$ und $Y \in \Gamma(TG)$. Wegen der Gültigkeit von (AO) können wir daher in (4) die Lieklammer $[X_o, X_j]$ jeweils durch $\hat\nabla_{X_o} X_j - B(X_o, X_j)$ ersetzen.

Sind $Y_1,\dots,Y_r \in \Gamma((c|[0,\delta[)^*TM)$ irgendwelche Vektorfelder, so gibt es zu jedem $t \in]0,\delta[$ eine Umgebung $U = U(t) \subset]0,\delta[$ und globale Felder $\tilde X_o,\dots,\tilde X_r, \tilde Z \in \Gamma(TG)$ mit $\tilde X_o \in \Gamma(\xi)$, $\tilde X_o \circ c|U = \dot c|U$, $\tilde X_j \circ c|U = Y_j|U$ für $j=1,\dots,r$ und $\tilde Z \circ c|U = Z|U$. Nach der vorangegangenen Betrachtung folgt daher aus (4) und (14)

$$\begin{aligned} d\Omega(\dot c, Y_1,\dots,Y_r)Z &= \overline{\nabla}_\partial(\Omega(Y_1,\dots,Y_r)Z) \\ &+ \sum (-1)^j\, \Omega(\hat\nabla_\partial Y_j - B(\dot c, Y_j), Y_1,\dots,\hat Y_j,\dots,Y_r)Z \end{aligned} \tag{15}$$

(Man beachte, daß Ω und $d\Omega$ tensorielle Größen sind.)

Es seien nun $w_1,\dots,w_r \in \xi^\perp_{c(0)}$, und es bezeichne jeweils (U_1^j, U_2^j, U_3^j) mit $U_i^j \in \Gamma(c^*TM)$ die Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\partial U_1 &= U_2 \\ \nabla_\partial U_2 &= R(\dot c, U_1)\dot c + U_3 \\ \nabla_\partial U_3 &= R(\dot c, U_1)\nabla_\partial \dot c - \langle \nabla_\partial \dot c, \nabla_\partial \dot c\rangle \cdot U_2 - 2\langle U_3, \nabla_\partial \dot c\rangle \cdot \dot c \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

zu den Anfangsbedingungen $U_1^j(0) = w_j$, $U_2^j(0) = B(\dot c(0), w_j)$ und $U_3^j(0) = \nabla_{w_j} H$. Hierbei bezeichnet R den Riemannschen Krümmungstensor von M. Die fragliche Gleichung (12) folgt nun aus (15) mit $X_j := U_1^j$, $j = 1, \ldots, r$. Denn nach [6] Prop. 3(vi) sind die Felder $Y_j := QX_j | [0,\delta[$ Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\hat\nabla_\partial Y = B(\dot c, Y) , \quad (17)$$

und wegen (AO) ist $\Omega(Y_1, \ldots, Y_r) = \Omega(X_1, \ldots, X_r) | [0,\delta[$.

Für $r = 0$ reduziert sich der Beweis von (12) auf den Nachweis von (14), da in diesem Fall die Felder X_j überhaupt nicht auftreten.

2.4 Beweis von Satz 2.1a) Wir dürfen c wie in 2.2 voraussetzen. Da $c(\delta) \in \overline{G}$ und $p \mapsto \dim \text{Kern}\, \Omega_p$ halbstetig nach oben ist, gilt zunächst $\dim \text{Kern}\, \Omega_{c(\delta)} \geq k$. Daher genügt es, einen Vektorraum-Isomorphismus $\Phi : T_{c(\delta)}M \longrightarrow T_{c(0)}M$ mit

$$\Phi(\text{Kern}\, \Omega_{c(\delta)}) \subset \text{Kern}\, \Omega_{c(0)} \quad (18)$$

zu konstruieren. Ist $v \in T_{c(\delta)}M$, so sei $Z \in \Gamma(c^*TM)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung (11) mit der Anfangsbedingung $Z(\delta) = v$. Setzen wir $\Phi(v) := Z(0)$, so erhalten wir offenbar mit Φ einen Isomorphismus. Da $Z = \dot c$ eine Lösung von (11) ist, gilt zunächst $\Phi(\dot c(\delta)) = \dot c(0) \in \text{Kern}\, \Omega_{c(0)}$; aus Stetigkeitsgründen folgt aus (13) weiterhin $\dot c(\delta) \in \text{Kern}\, \Omega_{c(\delta)}$. Zum Beweis von (18) genügt es daher, zu zeigen:

Ist Z eine Lösung von (11) mit $Z(\delta) \in \text{Kern}\, \Omega_{c(\delta)}$ und $\langle Z(\delta), \dot c(\delta)\rangle = 0$, so ist auch $Z(0) \in \text{Kern}\, \Omega_{c(0)}$, d.h. für alle $w_1, \ldots, w_r \in \xi^\perp_{c(0)}$ ist (19)

$\Omega(w_1,\ldots,w_r)Z(0) = 0$.

Die Beschränkung auf $w_j \in \xi^{\perp}_{c(0)}$ ist wegen (A0) zulässig. Zum Beweis von (19) benutzen wir die Vektorfelder $X_1,\ldots,X_r \in \Gamma(c^*TM)$ aus dem Lemma 2.3. Wegen $\langle Z,\dot c\rangle = 0$ können wir die tensorielle Bedingung (A1') für $d\Omega(\dot c,QX_1,\ldots,QX_r)Z$ ausnutzen und erhalten mit (12) und (A0), daß $\Omega(X_1,\ldots,X_r)Z|[0,\delta[$ kovariant konstant bzw. von konstanter Länge ist. Wegen $Z(\delta)\in \mathrm{Kern}\ \Omega_{c(\delta)}$ hat das $\Omega(X_1,\ldots,X_r)Z|[0,\delta] \equiv 0$ zur Folge, also insbesondere $\Omega(w_1,\ldots,w_r)Z(0) = 0$.

3. Beispiele

3.1 SATZ <u>VORAUSSETZUNG</u> : <u>Es sei M und ζ wie in 1.5. Weiterhin sei σ ein Schnitt von ζ und α eine symmetrische, bilineare Bündel-Abbildung von TM mit Werten in ζ , für die die Codazzi-Gleichung gilt, d.h.: Für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ist</u>

$$\bar\nabla_X(\alpha(Y,Z)) - \bar\nabla_Y(\alpha(X,Z)) = \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha([X,Y],Z).$$

<u>Damit werde die Hom(TM,ζ)-wertige Differentialform Ω vom Grad 1 durch</u>

$$\boxed{\Omega(X)Y := \alpha(X,Y) - \langle X,Y\rangle\cdot\sigma}$$

<u>definiert. Wie in 1.5 setzen wir voraus, daß es ein $k\in \{1,\ldots,m-1\}$ und eine offene Menge $G\subset M$ gibt, so daß die Untervektorräume Kern Ω_p über G ein Untervektorbündel ξ von TG vom Rang k bilden. Mit $\bar R$ werde die Krümmungsform der kovarianten Ableitung $\bar\nabla$ von ζ bezeichnet.</u>

<u>BEHAUPTUNG</u> : a) <u>Für Ω sind die Bedingungen (A0) und (A1) erfüllt; ξ ist also nabelsch (vgl. Bemerkung 1.3).</u>

b) <u>Ist $k\geq 2$, so ist $\bar\nabla_X\sigma = 0$ für alle $X\in\Gamma(\xi)$.</u>

c) <u>Ist $\bar\nabla_X\sigma = 0$ und $\bar R(X,Y)\sigma = 0$ für alle $X\in\Gamma(\xi)$ und $Y\in\Gamma(\xi^{\perp})$, so ist ξ ein sphärisches Untervektorbündel, Ω erfüllt auch die Bedingung (A1'), und daher gelten für die Integralmannigfaltigkeiten von ξ die Vollständigkeitsaussagen a) und b) des Satzes 2.1.</u>

Beweis: Wegen der Symmetrie von α und der Codazzi-Gleichung gilt für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$

$$\Omega(X)Y = \Omega(Y)X \quad \text{und} \tag{20}$$

$$d\Omega(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle \cdot \bar{\nabla}_Y\sigma - \langle Y,Z\rangle \cdot \bar{\nabla}_X\sigma \quad . \tag{21}$$

Daher sind (A0) und (A1) trivialerweise erfüllt; also ist ξ nach Satz 1.6 nabelsch, und es gilt die Aussage (5). Also folgt wegen (21) insbesondere $\langle X,Z\rangle \cdot \bar{\nabla}_Y\sigma = \langle Y,Z\rangle \cdot \bar{\nabla}_X\sigma$ für $X,Y \in \Gamma(\xi)$. Im Falle $k \geq 2$ ist daher $\bar{\nabla}_X\sigma = 0$ für alle $X \in \Gamma(\xi)$. Zum Beweis von c) werde jetzt $\bar{\nabla}_X\sigma = 0$ und $\bar{R}(X,Y)\sigma = 0$ für alle $X \in \Gamma(\xi)$ und $Y \in \Gamma(\xi^\perp)$ vorausgesetzt. Dann folgt zunächst (A1') aus (21); und für die Hauptnormale H von ξ gilt wegen (5) und (21) $\Omega(Y)H = - \bar{\nabla}_Y\sigma$ für alle $Y \in \Gamma(TG)$. Daher erhalten wir wegen (A1') und (4) für $X \in \Gamma(\xi)$ und $Y \in \Gamma(\xi^\perp)$:

$$\begin{aligned} 0 = d\Omega(X,Y)H &= - \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\sigma - \Omega(Y)\nabla_X H + \bar{\nabla}_{[X,Y]}\sigma \\ &= - \bar{R}(X,Y)\sigma - \Omega(Y)\nabla_X H = - \Omega(Y)\nabla_X H \ ; \end{aligned}$$

also ist $\nabla_X H \in \Gamma(\xi)$ für $X \in \Gamma(\xi)$, d.h. es gilt (2), und ξ ist sphärisch.

<u>3.2 Ein Spezialfall von Satz 3.1</u> Es sei f eine isometrische Immersion von M in einen Raum N konstanter Krümmung und h die zweite Fundamentalform[5] von f. ζ sei ein paralleles Untervektorbündel des Normalenbündels $\nu(f)$ von f, $\bar{\nabla}$ die Beschränkung der kanonischen kovarianten Ableitung D von $\nu(f)$ auf ζ [Man beachte: wegen der Parallelität von ζ ist $D_X\eta \in \Gamma(\zeta)$ für alle $X \in \Gamma(TM)$ und $\eta \in \Gamma(\zeta)$.], und $\pi : \nu(f) \longrightarrow \zeta$ sei die Orthogonalprojektion. Dann erfüllt $\alpha = \pi \circ h$ die Codazzi-Gleichung, denn für alle $X \in \Gamma(TM)$ und $\eta \in \Gamma(\nu(f))$ ist $\bar{\nabla}_X\pi\eta = \pi D_X\eta$, und bekanntlich gilt für die zweite Fundamentalform h die Codazzi-Gleichung. Ist nun Ω wie in Satz 3.1 mittels α und σ definiert und bezeichnet A den zweiten Fundamentaltensor von f, so ist für alle $p \in M$

5) Die erforderlichen Formeln der relativen Krümmungstheorie findet man z.B. in [5], Seite 180.

Kern $\Omega_p = \{ v \in T_pM \mid A_z v = \langle z,\sigma_p\rangle v$ für alle $z \in \zeta_p \}$. Da die Krümmungsform $\bar{R}$ von $\bar{\nabla}$ die Beschränkung der Krümmungsform R^D von D auf ζ ist, erhält man mit der Ableitungsgleichung zweiter Ordnung von Ricci $\bar{R}(v,w)z = 0$ für alle $v \in$ Kern Ω_p, $w \in T_pM$ und $z \in \zeta_p$.

Um konkrete Beispiele zu Satz 3.1 zu konstruieren, hat man solche isometrische Immersionen f zu suchen, für die ein paralleles Untervektorbündel ζ von $\nu(f)$ und ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(\zeta)$ existiert, so daß für die Punkte p einer offenen, nicht leeren Menge $G \subset M$ tatsächlich dim Kern $\Omega_p = k \geq 1$ ist. Im Falle $\zeta = \nu(f)$ erhält man die Theorie der "Krümmungsflächen" von f, wie sie in [5] und [6] beschrieben ist.

3.3 SATZ VORAUSSETZUNG : Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Levi-Civita-Ableitung ∇; $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und K eine Hom(TM,TM)-wertige Differentialform vom Grad 2 auf M, für welche die Symmetriebedingung

$$\langle K(X,Y)Z,U\rangle = \langle K(Z,U)X,Y\rangle \quad \text{für alle} \quad X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$$

und die zweite Bianchi-Identität $dK = 0$ (vgl. 1.5) erfüllt ist. Damit werde die Hom(TM,TM)-wertige Differentialform Ω vom Grad 2 durch

$$\boxed{\Omega(X,Y)Z := K(X,Y)Z - \phi\cdot(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)}$$

definiert. (In diesem Beispiel ist $\zeta = TM$ und $\bar{\nabla} = \nabla$.) Nun setzen wir voraus, daß es ein $k \in \{2,\dots,m-1\}$ und eine offene Menge $G \subset M$ gibt, so daß die Untervektorräume Kern Ω_p über G ein Untervektorbündel ξ von TG vom Rang k bilden.

BEHAUPTUNG : a) Für Ω sind die Bedingungen (A0), (A1) und (A2) erfüllt; ξ ist also sphärisch (vgl. Bemerkung 1.3).

b) Ist $k \geq 3$, so ist $X\phi = 0$ für alle $X \in \Gamma(\xi)$.

c) Ist $X\phi = 0$ für alle $X \in \Gamma(\xi)$, so erfüllt Ω auch die Bedingung (A1'), und daher gelten für die Integralmannigfaltigkeiten von ξ die Vollständigkeitsaussagen a) und b) des Satzes 2.1.

Beweis: Die Symmetrieeigenschaft von K überträgt sich auf Ω , also

$$\langle\Omega(X,Y)Z,U\rangle = \langle\Omega(Z,U)X,Y\rangle \quad \text{für alle} \quad X,Y,Z,U \in \Gamma(TM). \tag{22}$$

Bezeichnen wir mit R_1 die ausgezeichnete $\mathrm{Hom}(TM,TM)$-wertige Differentialform vom Grad 2, die durch

$$R_1(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$$

definiert ist, so ist $\Omega = K - \phi \cdot R_1$ und daher $d\Omega = - d\phi \wedge R_1$ (wegen $dK = dR_1 = 0$) und $dd\Omega = 0$; also

$$d\Omega(X_o,X_1,X_2)Z = \sum_{i=o}^{2} \langle(X_{i+1}\phi)X_{i+2} - (X_{i+2}\phi)X_{i+1},Z\rangle X_i \tag{23}$$

für alle $X_o,\ldots,X_4,Z \in \Gamma(TM)$ mit $X_3 = X_o$ und $X_4 = X_1$. Aus (22) bzw. (23) bzw. $dd\Omega = 0$ folgt nun (A0) bzw. (A1) bzw. (A2). Nach Satz 1.6 ist daher ξ sphärisch, und es gilt (5), also insbesondere $d\Omega(X_o,X_1,X_2) = 0$ für $X_i \in \Gamma(\xi)$. Ist $k \geq 3$, so erhalten wir daher aus (23) zunächst $(X\phi)Y = (Y\phi)X$ und damit auch $X\phi \equiv 0$ für alle $X,Y \in \Gamma(\xi)$. Sind schließlich $X_1,X_2,Z \in \Gamma(TG)$ und ist $X_o \in \Gamma(\xi)$ mit $X_o\phi = 0$ und $\langle X_o,Z\rangle = 0$, so folgt mit (23), (22) und (A0)

$$\langle d\Omega(X_o,X_1,X_2)Z,\Omega(X_1,X_2)Z\rangle$$
$$= \langle(X_1\phi)X_2 - (X_2\phi)X_1,Z\rangle\langle X_o,\Omega(X_1,X_2)Z\rangle = 0 .$$

Daher gilt auch die Behauptung c) .

Im Falle, daß ϕ konstant ist, folgt aus (23) sogar $d\Omega = 0$. Nach (5) verschwindet dann das Hauptnormalenfeld H von ξ , und die Integralmannigfaltigkeiten von ξ sind daher totalgeodätisch in M . Dieser Spezialfall wurde von Maltz in [4] untersucht.

Literatur

1. Chern, S.S., Lashof, R.K.: On the total curvature of immersed manifolds. Amer. J. Math. 79, 306-318 (1957)
2. Dombrowski, P.: Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms. Resultate der Mathematik 1, 156-194 (1979)
3. Hiepko, S.: Einige Beiträge zur Theorie sphärischer Blätterungen. Dissertation, Köln 1978
4. Maltz, R.: The nullity spaces of curvature-like tensors. J. Diff. Geometry 7, 519-523 (1972)
5. Reckziegel, H.: Krümmungsflächen von isometrischen Immersionen in Räume konstanter Krümmung. Math. Annalen 223, 169-181 (1976)
6. Reckziegel, H.: Completeness of curvature surfaces of an isometric immersion. J. Diff. Geometry, erscheint demnächst

Dr. Sönke Hiepko
Frauenstr. 17
D-4400 Münster
Fed. Rep. of Germany

Dr. Helmut Reckziegel
Mathematisches Institut der Universität
Weyertal 86 - 90
D-5000 Köln 41
Fed. Rep. of Germany

(Eingegangen am 14. Dezember 1979;
in revidierter Fassung am 22. Februar 1980)