manuscripta math. 31, 197 - 215 (1980)

manuscripta mathematica

KLASSIFIKATION DER EINFACHEN REELLEN SPEZIELLEN JORDAN-TRIPELSYSTEME

Erhard Neher

The problem of classifying the simple real finite-dimensional Jordan triple systems has been reduced to the problem of classifying the involutive automorphisms of the simple compact Jordan triple systems. This classification is given here for the simple compact special Jordan triple systems.

Mit der vorliegenden Arbeit wird die Klassifikation der einfachen endlich-dimensionalen Jordan-Tripelsysteme über $\mathbb{R}$ fortgesetzt, die in [1o] begonnen wurde. Dort wurde gezeigt, daß sich das Klassifikationsproblem auf das Lösen der beiden folgenden Probleme zurückführen läßt:

A) Man klassifiziere die einfachen kompakten Jordan-Tripelsysteme (definiert in 1.2).

B) Für jedes einfache kompakte Jordan-Tripelsystem V bestimme man ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von V. Dabei heißen zwei involutorische Automorphismen α und β von V konjugiert, wenn es einen Automorphismus φ von V gibt mit $\varphi\alpha\varphi^{-1} = \beta$.

Die Lösung des Problems A) ist bekannt (siehe z.B. [8]): Jedes einfache kompakte Jordan-Tripelsystem ist entweder hermitesch oder eine reelle Form eines einfachen kompakten hermiteschen Jordan-Tripelsystems (vgl. 1.3). Die einfachen kompakten hermiteschen Jordan-Tripelsysteme sind

I_{pq} ,	$1 \le p \le q$	(2.3)
II_p ,	$5 \le p$	(4.4)
III_p ,	$2 \le p$	(3.2)
IV_n ,	$5 \le n$	(5.2)

und die Ausnahmetypen V und VI .

0025-2611/80/0031/0197/$03.80

Wir nennen I_{pq} (bzw. $II_p,\ldots$) und seine reellen Formen Jordan-Tripelsysteme vom Typ I (bzw. II,...).

In dieser Arbeit wird Problem B) für die Typen I -IV gelöst. Dazu wird für jeden Typ ein charakteristisches zentral-einfaches Jordan-Tripelsystem über einem Körper der Charakteristik Null definiert und seine Strukturgruppe bestimmt. Damit läßt sich in jedem der hier behandelten Beispiele von kompakten Jordan-Tripelsystemen die Struktur- und Automorphismengruppe berechnen. Mit der expliziten Kenntnis aller Automorphismen kann man dann eine Klassifikation der involutorischen Automorphismen durchführen.

Nach [6] und [8] beschreiben die kompakten hermiteschen Jordan-Tripelsysteme die beschränkten symmetrischen Gebiete. Man kann zeigen, daß die Menge der Konjugationsklassen involutorischer Automorphismen eines einfachen kompakten hermiteschen Jordan-Tripelsystems bijektiv ist zur Menge der Konjugationsklassen involutorischer Isometrien des zugehörigen irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebiets. Bei dieser Bijektion werden die Konjugationsklassen $\mathbb{C}$-antilinearer involutorischer Automorphismen auf die Konjugationsklassen der antiholomorphen involutorischen Isometrien abgebildet. Für die hier behandelten Beispiele kompakter hermitescher Jordan-Tripelsysteme - sie entsprechen den klassischen Gebieten - wurde die Anzahl der Konjugationsklassen antiholomorpher involutorischer Isometrien in [5] bestimmt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in der Dissertation des Verfassers enthalten, die unter der Anleitung von Herrn Professor M. Koecher entstand. Der Autor dankt ihm für seine vielfältige Unterstützung.

1. VORBEREITUNGEN

1.1. Die grundlegenden Eigenschaften von Jordan-Tripelsystemen (kurz: Jordan-Tripel) findet der Leser in [6],[7] und [9]. Zur Festlegung der Bezeichnungsweise werden hier einige der im folgenden wichtigen Begriffe wiederholt.

Sei V ein endlich-dimensionales Jordan-Tripel über dem Körper K, dessen Charakteristik Null sei.

a) Die Automorphismengruppe von V besteht genau aus den K-linearen invertierbaren Abbildungen φ von V mit $\varphi\{xyz\} = \{\varphi x, \varphi y, \varphi z\}$ für alle $x,y,z \in V$, wobei $\{\ldots\}$ das Tripelprodukt von V ist. Die Automorphismengruppe von V wird mit $\mathrm{Aut}\, V$ abgekürzt.

b) Für $x,y \in V$ werden K-lineare Abbildungen $L(x,y)$ durch $L(x,y)z = \{xyz\}$ $(x,y,z \in V)$ definiert. Man setzt $\mathrm{Sp}(x,y) := \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(L(x,y)+L(y,x))$ und erhält eine symmetrische Bilinearform Sp auf V. Genau dann ist V halbeinfach, wenn Sp nicht ausgeartet ist.

c) Sei V halbeinfach. Die bezüglich Sp adjungierte Abbildung von $\varphi \in \mathrm{End}_K V$ bezeichnen wir mit φ^*. Die Strukturgruppe von V besteht aus den K-linearen invertierbaren Abbildungen φ von V mit $\varphi\, L(x,y)\varphi^{-1} = L(\varphi x, \varphi^{*-1}y)$ für alle $x,y \in V$. Sie wird mit $\Gamma(V)$ abgekürzt. Offenbar gilt $\mathrm{Aut}\, V = \{\varphi \in \Gamma(V)\ ;\ \varphi^* = \varphi^{-1}\}$.

d) Sei V halbeinfach. Der von $\{L(x,y)\ ;\ x,y \in V\}$ erzeugte Teilvektorraum $\mathcal{T}(V)$ von $\mathrm{End}_K V$ ist bezüglich des kanonischen Kommutatorprodukts auf $\mathrm{End}_K V$ abgeschlossen, also eine Lie-Algebra. Sie wird als Strukturalgebra von V bezeichnet.

1.2. Ein endlich-dimensionales Jordan-Tripel über $\mathbb{R}$ heißt kompakt, falls seine Spurform positiv-definit ist. Kompakte Jordan-Tripel werden in [8]11 behandelt.
Für ein einfaches kompaktes Jordan-Tripel V gilt:

a) $\mathrm{Id}_V \in \mathcal{T}(V)$ ([6]II Lemma 3.1.),

b) $\mathcal{T}(V)$ operiert irreduzibel auf V ([9]XI Satz 4).

1.3. Ein endlich-dimensionales Jordan-Tripel U über $\mathbb{R}$ heißt hermitesch, wenn es eine komplexe Struktur J auf dem Vektorraum U gibt, so daß für alle $x,y,z \in U$ gilt

$$J\{xyz\} = \{x,y,Jz\} = -\{x,Jy,z\}\ .$$

Sei dies der Fall. Wie bei komplexen Jordan-Tripeln heißt Θ eine Konjugation von U, wenn Θ ein involutorischer Automorphismus von U mit $\Theta J = -J\Theta$ ist.

Bemerkungen: a) Kompakte hermitesche Jordan-Tripel werden in [8] behandelt. Im Gegensatz zu [8] wird hier ein kompaktes hermitesches Jordan-Tripel U als reelles Jordan-Tripel aufgefaßt. Deshalb sind die Elemente von $\Gamma(U)$ $\mathbb{R}$-linear.

b) Jedem kompakten hermiteschen Jordan-Tripel läßt sich ein halbeinfaches komplexes Jordan-Paar zuordnen ([8]2.9). Hiervon gilt auch die Umkehrung ([8]4.12). Bei diesen Abbildungen werden isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte und einfache Objekte auf einfache Objekte abgebildet.

c) Die Klassifikation der einfachen kompakten hermiteschen Jordan-Tripel zeigt: Jedes kompakte hermitesche Jordan-Tripel besitzt eine Konjugation.

d) Sei U ein hermitesches Jordan-Tripel, $\langle x,y\rangle$ die komplexe Spur des bezüglich der kanonischen komplexen Struktur auf U $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $L(x,y)$. Genau dann ist U kompakt, wenn $\langle .,.\rangle$ hermitesch und positiv-definit ist. In diesem Fall gilt

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\,[\mathrm{Sp}(x,y)+i\ \mathrm{Sp}(ix,y)]\ ,$$
$$\mathrm{Sp}(x,y) = 2\ \mathrm{Re}\ \langle x,y\rangle\ .$$

Für $\mathbb{C}$-lineare Endomorphismen stimmen daher die bezüglich $\langle .,.\rangle$ und Sp gebildeten adjungierten Abbildungen überein.

1.4. Sei V ein endlich-dimensionales Jordan-Tripel über $\mathbb{R}$, $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von V ([10]1.8), $\{\dots\}^{\mathbb{C}}$ das Tripelprodukt von $V^{\mathbb{C}}$ und Θ die Konjugation von $V^{\mathbb{C}}$ an der reellen Form V ([10]2.6). Für $x,y,z \in V^{\mathbb{C}}$ setzen wir

$$_{\Theta}\{xyz\} = \{x,\Theta y,z\}^{\mathbb{C}}\ .$$

Nach [9]10 Satz 2 ist dann der $V^{\mathbb{C}}$ zugrunde liegende reelle Vektorraum $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ zusammen mit dem Tripelprodukt $_{\Theta}\{\dots\}$ ein hermitesches Jordan-Tripel, das wir mit $H(V)$ (<u>Hermitefizierung von</u> V) bezeichnen.

Bemerkungen: a) Θ ist eine Konjugation von $H(V)$.

b) Ist Sp bzw. $\mathrm{Sp}_{H(V)}$ die Spurform von V bzw. $H(V)$, so gilt

$$\mathrm{Sp}_{H(V)}(x_1+ix_2,y_1+iy_2) = 2[\mathrm{Sp}_V(x_1,y_1) + \mathrm{Sp}_V(x_2,y_2)],$$

$x_1,y_1,x_2,y_2 \in V$. Daher ist $H(V)$ genau dann kompakt (halbeinfach), wenn V kompakt (halbeinfach) ist.

c) Nach 1.3.c existiert zu jedem kompakten hermiteschen Jordan-Tripel U ein kompaktes Jordan-Tripel V mit $U = H(V)$.

d) $\Gamma(V)$ (bzw. Aut V) besteht genau aus den Abbildungen $\varphi|V$ mit $\varphi \in \Gamma(H(V))$ (bzw. $\varphi \in \mathrm{Aut}\, H(V)$), φ $\mathbb{C}$-linear und $[\varphi,\Theta] = 0$.

1.5. LEMMA. Sei V ein kompaktes Jordan-Tripel, Θ die Konjugation von $V^{\mathbb{C}}$ an V und $H(V)$ einfach. Dann gilt

$$\Gamma(H(V)) = \{\Theta^{\varepsilon}\varphi \; ; \; \varepsilon \in \{0,1\}, \varphi \in \Gamma(V^{\mathbb{C}})\} .$$

Beweis. Für $\psi \in \Gamma(H(V))$ ist

$$I(\psi) : \mathcal{T}(H(V)) \longrightarrow \mathcal{T}(H(V)) \; : \; T \longrightarrow \psi T \psi^{-1}$$

ein Lie-Algebrenautomorphismus. Nach 1.2 ist $\mathbb{C}\cdot\mathrm{Id}$ das Zentrum von $\mathcal{T}(H(V))$. Da $I(\psi)$ das Zentrum invariant läßt, folgt $\psi(i\mathrm{Id})\psi^{-1} = \pm\, i\mathrm{Id}$, d.h. ψ ist $\mathbb{C}$-linear oder $\mathbb{C}$-antilinear. Weil Θ ein $\mathbb{C}$-antilinearer Automorphismus von $H(V)$ ist, ist ψ oder $\Theta\psi$ $\mathbb{C}$-linear. Es genügt daher zu zeigen, daß $\Gamma(V^{\mathbb{C}})$ genau aus den $\mathbb{C}$-linearen Elementen von $\Gamma(H(V))$ besteht. Dies folgt aus folgender Beobachtung: Für die Spurform $Sp^{\mathbb{C}}$ von $V^{\mathbb{C}}$ und die in 1.3.d definierte Form $\langle .,. \rangle$ gilt $Sp^{\mathbb{C}}(x,y) = \langle x,\Theta y \rangle$. Für einen $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus ψ von $V^{\mathbb{C}}$ hat man deshalb $\psi^H = \Theta\psi^*\Theta$, wobei ψ^* bzw. ψ^H die Adjungierte von ψ bezüglich $Sp^{\mathbb{C}}$ bzw. $\langle .,. \rangle$ ist, und $\psi\{x,y,\psi^{-1}z\}^{\mathbb{C}} = \{\psi x,(\psi^{-1})^* y,z\}^{\mathbb{C}}$ ist mit $\psi({}_{\Theta}\{x,y,\psi^{-1}z\}) = {}_{\Theta}\{\psi x,(\psi^{-1})^H y,z\}$ äquivalent.

1.6. Aus 1.1.c, 1.2.d und 1.5 erhält man nun folgendes KOROLLAR. Die Automorphismengruppe von $H(V)$ besteht genau aus den Abbildungen $\Theta^{\varepsilon}\varphi$, wobei $\varepsilon \in \{0,1\}$ gilt und $\varphi \in \Gamma(V^{\mathbb{C}})$ bezüglich $\langle .,. \rangle$ unitär ist.

1.7. Später wird das folgende Kriterium verwendet:
LEMMA. Sei A eine einfache endlich-dimensionale Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$ und $V(A)$ das zugehörige Jordan-Tripel. Dann gilt

a) $\Gamma(V(A)) = \Gamma(A)$, $\mathrm{Aut}\, V(A) = \pm\, \mathrm{Aut}\, A$, wobei $\Gamma(A)$ bzw. $\mathrm{Aut}\, A$ die Strukturgruppe bzw. die Automorphismengruppe von A bezeichnen.

b) Ist M ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von A, so ist $\pm M$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von $V(A)$.

Beweis. Die erste Aussage von a) ist klar, die zweite wurde in [1o] 4.1 bewiesen. Damit folgt dann leicht b).

1.8. Wir definieren schließlich noch einige in der ganzen Arbeit gültige Bezeichnungen:
Sei $\mathbb{H}$ die Divisions-Quaternionen-Algebra über $\mathbb{R}$. Für einen Körper K der Charakteristik Null oder für $K = \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit $M(p,q;K)$ die $(p\times q)$-Matrizen mit Elementen aus K. Die Einheitsmatrix von $M(p,p;K)$ ist E. Die genaue Zeilenzahl von E ist aus dem Zusammenhang immer klar. Die Gruppe der invertierbaren Elemente aus $M(p,p;K)$ wird mit $GL(p,K)$ abgekürzt. Diejenige Matrix, die nur im Schnittpunkt der j-ten Zeile und k-ten Spalte eine 1 stehen hat und sonst aus Nullen besteht, nennen wir E_{jk}. Einige spezielle Matrizen in $M(p,p;K)$:

$$s(p,j) := \sum_{k=1}^{j} E_{kk} - \sum_{k=j+1}^{p} E_{kk} \qquad (0 \le j \le p) ,$$

für gerades p sei

$$J(p) := \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m = \frac{p}{2} .$$

Die kanonische Involution der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ sei $\bar{\ }$. Für $u = (u_{jk}) \in M(p,q;\mathbb{K})$ setzt man $\kappa u := \bar{u} := (\bar{u}_{jk})$
Schließlich sei

$$H_p(\mathbb{K}) = \{x \in M(p,p;\mathbb{K}) \; ; \; x = \bar{x}^t\} ,$$

$$U(p,\mathbb{K}) = \{x \in M(p,p;\mathbb{K}) \; ; \; x\bar{x}^t = E\} ,$$

wobei $U(p,\mathbb{K})$ abgekürzt wird mit $O(p) = U(p,\mathbb{R})$, $U(p) = U(p,\mathbb{C})$ und $Sp(p) = U(p,\mathbb{H})$.

2. JORDAN-TRIPEL VOM TYP I

In diesem Paragraphen bestimmen wir die Strukturgruppe, die Automorphismengruppe und ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von

I_{pq} und von allen reellen Formen von I_{pq}. Wir verwenden dabei ohne weiteres Zitat die in 1.8. definierten Bezeichnungen.

2.1. Es ist vorteilhaft, zunächst folgendes Beispiel eines Jordan-Tripels über einen Körper K der Charakteristik Null zu betrachten: $M(p,q;K)$ mit dem Tripelprodukt

$$\{xyz\} = xy^tz + zy^tx .$$

In [6] III § 2 wird bewiesen:

a) Die Strukturalgebra des Jordan-Tripels $M(p,q;K)$ operiert irreduzibel auf $M(p,q;K)$, insbesondere ist $M(p,q;K)$ einfach. Wegen $L \otimes M(p,q;K) = M(p,q;L)$ für jeden Erweiterungskörper L von K, ist $M(p,q;K)$ sogar zentral-einfach.

b) Für $u \in GL(p,K)$ und $v \in GL(q,K)$ liegt die durch

$$[u;v](x) = uxv \quad (x \in M(p,q;K))$$

definierte Abbildung $[u;v]$ in $\Gamma(M(p,q;K))$. Die Abbildung

$$GL(p,K) \times GL(q,K)^{op} \longrightarrow \Gamma(M(p,q;K)) : (u,v) \longrightarrow [u;v]$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{(\zeta E, \zeta^{-1}E) ;\ 0 \neq \zeta \in K\}$.

c) Es ist außerdem leicht zu sehen: Für $p = q$ ist die Abbildung

$$\tau : M(p,p;K) \longrightarrow M(p,p;K) : x \longrightarrow x^t$$

ein Automorphismus von $M(p,p;K)$. Für $p > 1$ gibt es kein $(u,v) \in GL(p,K) \times GL(p,K)$ mit $\tau = [u;v]$.

2.2. **SATZ**. _Im Fall_ $p \neq q$ _gilt_ $\Gamma(M(p,q;K)) = \{[u;v] ;\ u \in GL(p,K),\ v \in GL(q,K)\}$, _im Fall_ $p = q$ _hat man_ $\Gamma(M(p,p;K)) = \{\tau^{\varepsilon}[u;v] ;\ \varepsilon \in \{0,1\},\ u,v \in GL(p,K)\}$.

Beweis. Sei $V = M(p,q;K)$, o.E. $p \leq q$. Die rechte Seite der behaupteten Gleichung werde mit G bezeichnet. Da G eine Untergruppe von $\Gamma(V)$ ist, genügt es zu zeigen, daß man jedes $\varphi \in \Gamma(V)$ durch Linksmultiplikationen mit Elementen aus G auf die Identität transformieren kann.

Sei $\mathcal{V}$ das Jordan-Paar (V,V). Die Abbildung

$\varphi \longrightarrow f = (\varphi, \varphi^{*-1})$ ist ein Isomorphismus von $\Gamma(V)$ auf die Automorphismengruppe von $\mathcal{V}$, der die innere Strukturgruppe von V auf die innere Automorphismengruppe von $\mathcal{V}$ abbildet. Sei e_{jk} das Idempotent (E_{jk}, E_{jk}) von $\mathcal{V}$. Da G die innere Strukturgruppe von V enthält, kann man nach [11] main theorem $fe_{jj} \in \mathcal{V}_{jj}$, $1 \leq j \leq p$, annehmen, wobei $\mathcal{V}_{jk}$ die Peirce-Räume von $\mathcal{V}$ bezüglich des Orthogonalsystems $(e_{11}, \ldots, e_{pp})$ sind. Es folgt $f\mathcal{V}_{jk} = \mathcal{V}_{jk}$.

Für $1 \leq j < k \leq p$ ist $\mathcal{V}_{jk}$ die direkte Paarsumme von $\mathcal{V}_2(e_{jk})$ und $\mathcal{V}_2(e_{kj})$. Da fe_{jk} minimal in $\mathcal{V}$ ist, gilt $fe_{jk} \in \mathcal{V}_2(e_{jk})$ oder $fe_{jk} \in \mathcal{V}_2(e_{kj})$, $1 \leq j < k \leq p$.

Sei $fe_{12} \in \mathcal{V}_2(e_{21})$. Wegen $e_{1j} \in \mathcal{V}_1(e_{12})$ für $2 < j \leq q$ und $fe_{1j} \in \mathcal{V}_{o1} \subset \mathcal{V}_o(e_{21})$ für $p < j \leq q$ folgt $p = q$. Indem man f durch $(\tau, \tau)f$ ersetzt, kann man $fe_{12} \in \mathcal{V}_2(e_{12})$ annehmen. Nun folgt $fe_{1j} \in \mathcal{V}_2(e_{1j})$, $1 \leq j \leq p$, und wie vorher gilt $f\mathcal{V}_{jk} = \mathcal{V}_{jk}$. Da e_{1k} und e_{k1} für $2 \leq k \leq p$ orthogonale Idempotente von $\mathcal{V}$ sind, hat man $fe_{k1} \in \mathcal{V}_2(e_{k1})$.

Sei $d_j \in M(1,q,K)$ die erste Zeile von φE_{1j}, $1 \leq j \leq q$. Da die Matrix φE_{1j} nur in der ersten Zeile von Null verschiedene Elemente hat, sind $d_1, \ldots, d_q$ linear unabhängig. Daher gibt es $v \in GL(q,K)$ mit $(\varphi E_{1j})v = E_{1j}$, $1 \leq j \leq q$. Es gilt $(\varphi E_{k1})v \in KE_{k1}$ für $2 \leq k \leq p$. Wie eben erhält man $u \in GL(p,K)$ mit $u(\varphi E_{k1})v = E_{k1}$, $1 \leq k \leq p$, und $u(\varphi E_{1j})v = E_{1j}$, $1 \leq j \leq q$.

Nun folgt $([u;v]\varphi)^{*-1} E_{1j} = E_{1j}$, $1 \leq j \leq q$, und $([u;v]\varphi)^{*-1} E_{k1} = E_{k1}$, $2 \leq k \leq p$. Da für $m,n \geq 2$ die Gleichung $E_{mn} = \{E_{m1}\, E_{11}\, E_{1n}\}$ gilt, hat man $[u;v]\varphi = \mathrm{Id}$.

2.3. Sei $I_{pq} (1 \leq p \leq q)$ die Hermitefizierung von $M(p,q;\mathbb{R})$. Der I_{pq} zugrunde liegende Vektorraum ist $M(p,q;\mathbb{C})$ und für das Tripelprodukt hat man

$$\{xyz\} = x\bar{y}^t z + z\bar{y}^t x$$

a) Nach [8] 4.14 ist I_{pq} einfach. Es gilt $\langle x,y \rangle = (p+q)\, \mathrm{Spur}\, x\bar{y}^t$, wobei $\langle .,. \rangle$ die in 1.3.d definierte hermitesche Form ist.

b) Mit 1.5 , 1.6 und 2.2 folgt:

Für $p \neq q$ besteht $\Gamma(I_{pq})$ (bzw. Aut I_{pq}) genau aus den Abbildungen $\kappa^{\varepsilon}[u;v]$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $(u,v) \in GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})$ (bzw. $(u,v) \in U(p) \times U(q)$).

Für $p = q$ besteht $\Gamma(I_{pp})$ (bzw. Aut I_{pp}) genau aus den Abbildungen $\tau^{\delta}\kappa^{\varepsilon}[u;v]$ mit $\varepsilon,\delta \in \{0,1\}$ und $u,v \in GL(p,\mathbb{C})$ (bzw. $u,v \in U(p)$).

2.4. SATZ. <u>Sei</u>

$$J_p = \{[s(p,j)\ ;\ s(p,k)]\ ;\ \tfrac{p}{2} \le j \le p\ ,\ p-j \le k \le j\} \cup \{\pm\tau\ ,\kappa,\kappa\tau\}$$ <u>und sei</u>

$$J_{pq} = \{[s(p,j)\ ;\ s(q,k)]\ ;\ \tfrac{p+1}{2} \le j \le p\ ,\ 0 \le k \le q\} \cup \{\kappa\}\ .$$

<u>Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von</u> I_{pq} <u>ist</u>

a) <u>für</u> $p = q$ <u>ungerade</u>: J_p ,

b) <u>für</u> $p = q$ <u>gerade</u>: $J_p \cup \{-\kappa[J(p)\ ;\ J(p)]\}$

c) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>ungerade</u>: J_{pq} ,

d) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>gerade</u>, q <u>ungerade</u>:
$J_{pq} \cup \{[s(p,\tfrac{p}{2})\ ;\ s(q;k)]\ ;\ \tfrac{q}{2} \le k \le q\}$,

e) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>und</u> q <u>gerade</u>:
$J_{pq} \cup \{[s(p,\tfrac{p}{2})\ ;\ s(q,k)]\ ;\ \tfrac{q}{2} \le k \le q\} \cup \{-\kappa[J(p)\ ;\ J(q)]\}$.

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß jeder involutorische Automorphismus zu einem der angegebenen konjugiert ist. Dabei werden die nach 2.3.b existierenden verschiedenen Typen von Automorphismen jeweils einzeln untersucht.

1) Sei $p = q$, $u,v \in U(p)$ und $\kappa\tau[u;v]$ involutorisch. Wegen $Id = (\kappa\tau[u;v])^2 = [\ \bar{v}^t u\ ;\ v\bar{u}^t\ ]$ gibt es $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ mit $\bar{v}^t u = \zeta E$, $v\bar{u}^t = \zeta^{-1}E$ (2.1). Es folgt $u = \zeta v$. Man wählt $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^2 = \zeta$ und berechnet $[v;\xi E]\kappa\tau[u;v][v;\xi E]^{-1} = \kappa\tau$.

2) Sei $p = q$, $u,v \in U(p)$ und $\tau[u;v]$ involutorisch. Wegen $Id = [v^t u\ ;\ vu^t]$ gibt es $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ mit $v^t u = \zeta E$, $vu^t = \zeta^{-1}E$. Also ist $[E;v]\tau[u;v][E;v]^{-1} = \zeta\tau$ involutorisch.

Daher gilt $\zeta = \pm 1$.

3) Sei $(u,v) \in U(p) \times U(q)$ und $\kappa[u;v]$ involutorisch. Wegen $[\bar{u}u;v\bar{v}] = \mathrm{Id}$ gibt es $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ mit $\bar{u}u = \zeta E$, $v\bar{v} = \zeta^{-1}E$. Es folgt $u^t = \zeta u$, also $\zeta = \pm 1$.

3a) $\zeta = 1$. Es existiert $z \in U(p)$, $w \in U(q)$ mit $\bar{z}uz^{-1} = E$, $w^{-1}v\bar{w} = E$. Daher gilt $[z;w]\kappa[u;v][z;w]^{-1} = \kappa$.

3b) $\zeta = -1$. Hier existieren $z \in U(p)$, $w \in U(q)$ mit $\bar{z}uz^{-1} = J(p)$, $w^{-1}v\bar{w} = -J(q)$. Also ist $\kappa[u;v]$ zu $-\kappa[J(p) ; J(q)]$ konjugiert.

4) Sei $(u,v) \in U(p) \times U(q)$ und $[u;v]$ involutorisch. In diesem Fall ist $[u;v]$ zu einem Automorphismus vom Typ $[s(p,j) ; s(q,k)]$ konjugiert.

Daß sich im Fall 4) die angegebenen Nebenbedingungen erreichen lassen und daß alle in der Behauptung angegebenen Automorphismen paarweise nicht konjugiert sind, läßt sich nun leicht zeigen.

2.5. Wir untersuchen nun die kompakten Jordan-Tripel $\mathrm{Fix}\,\Theta = \{x \in I_{pq} ; \Theta x = x\}$, wobei Θ eine Konjugation von I_{pq} ist. Es gilt $H(\mathrm{Fix}\,\Theta) = I_{pq}$. Da I_{pq} einfach ist, ist auch $\mathrm{Fix}\,\Theta$ einfach.

Wir beginnen mit dem Jordan-Tripel $\mathrm{Fix}\,\kappa = M(p,q; \mathbb{R})$:

a) Die Strukturgruppe von $M(p,q; \mathbb{R})$ wurde in 2.2 bestimmt. Für die Spurform gilt $\mathrm{Sp}(x,y) = (p+q)\mathrm{Spur}(xy^t)$.

b) Da die Automorphismen von $M(p,q; \mathbb{R})$ genau aus den bezüglich der Spurform orthogonalen Elementen von $\Gamma(M(p,q; \mathbb{R}))$ besteht, folgt:

Für $p \neq q$ besteht $\mathrm{Aut}\,M(p,q; \mathbb{R})$ aus den Abbildungen $[u;v]$ mit $(u,v) \in O(p) \times O(q)$.

Für $p = q$ besteht $\mathrm{Aut}\,M(p,p; \mathbb{R})$ aus den Abbildungen $\tau^\delta[u;v]$ mit $\delta \in \{0,1\}$ und $u,v \in O(p)$.

2.6. Wie in 2.4 beweist man nun den

SATZ. <u>Sei</u> $J_{pq} = \{[s(p,j) ; s(q,k)] ; \frac{p+1}{2} \leq j \leq p , 0 \leq k \leq q\}$
<u>und</u> $J_p = \{[s(p,j) ; s(p,k)] ; \frac{p}{2} \leq j \leq p , p-j \leq k \leq j\} \cup \{\pm\tau\}$.

<u>Dann ist ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von</u> $M(p,q; \mathbb{R})$

a) <u>für</u> $p = q$ <u>ungerade</u>: J_p,

b) <u>für</u> $p = q$ <u>gerade</u>: $J_p \cup \{-[J(p) ; J(q)]\}$

c) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>ungerade</u>: J_{pq} ,
d) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>gerade</u> , q <u>ungerade</u>:
$J_{pq} \cup \{[s(p,\frac{p}{2}) \; ; \; s(q,k)] \; ; \; \frac{q}{2} \le k \le q\}$
e) <u>für</u> $p \neq q$, p <u>und</u> q <u>gerade</u>:
$J_{pq} \cup \{[s(p,\frac{p}{2}) \; ; \; s(q,k)] \; ; \; \frac{q}{2} \le k \le q\}$
$\cup \{-[J(p) \; ; \; J(q)]\}$.

2.7. Als nächstes untersuchen wir das Jordan-Tripel $\mathrm{Fix}(-\kappa[J(2p) \; ; \; J(2q)] \subset I_{2p,2q}$. Hier ist es zweckmäßig, eine andere Realisierung zu wählen. Dazu betrachten wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $M(p,q;\mathbb{H})$ mit dem Tripel-Produkt

$$\{xyz\} = x\bar{y}^t z + z\bar{y}^t x .$$

a) Die Algebra $\mathbb{H}$ enthält $\mathbb{C}$ als Teilagebra. Wir wählen ein $j_o \in \mathbb{C}^\perp$ mit $j_o^2 = -1$. Dann gilt $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j_o\mathbb{C}$ (direkte Vektorraumsumme) und jedes $x \in M(p,q;\mathbb{H})$ läßt sich eindeutig in der Form $x = x_1 + j_o x_2$ mit $x_1, x_2 \in M(p,q;\mathbb{C})$ darstellen. Man zeigt leicht, daß die Abbildung

$$M(p,q;\mathbb{H}) \longrightarrow M(2p,2q;\mathbb{C})$$
$$x = x_1 + j_o x_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \bar{x}_2 \\ -x_2 & \bar{x}_1 \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus der Tripelsysteme $M(p,q;\mathbb{H})$ und $\mathrm{Fix}(-\kappa[J(2p) \; ; \; J(2q)])$ induziert.

b) Mit a) und 1.4.d beweist man nun:
Für $p \neq q$ besteht $\Gamma(M(p,q;\mathbb{H}))$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, M(p,q;\mathbb{H})$) genau aus den Abbildungen $[u;v]$ mit $(u,v) \in GL(p,\mathbb{H}) \times GL(q,\mathbb{H})$ (bzw. $(u,v) \in Sp(p) \times Sp(q)$) , wobei $[u;v](x) = uxv$ gilt.
Für $x \in M(p,p;\mathbb{H})$ sei $\nu(x) = \bar{x}^t$. Dann besteht $\Gamma(M(p,p;\mathbb{H}))$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, M(p,p;\mathbb{H})$) genau aus den Abbildungen $\nu^\varepsilon[u;v]$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $u,v \in Sp(p)$.

2.8. Mit 2.7. beweist man nun wie in 2.4. den

SATZ. <u>Sei</u>

$$J_p = \{[s(p,j) \; ; \; s(p,k)] \; ; \; \tfrac{p}{2} \le j \le p \, , \, p-j \le k \le j\} \cup$$
$$\cup \{[iE;iE] \, , \, \pm\nu\}$$ <u>und</u>
$$J_{pq} = \{[s(p,j) \; ; \; s(q,k)] \; ; \; \tfrac{p+1}{2} \le j \le p \, , \, 0 \le k \le q\} \cup$$
$$\cup \{[iE;iE]\} .$$

Dann ist ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von $M(p,q;\mathbb{H})$

a) für $p = q$: J_p ,

b) für $p \neq q$, p ungerade: J_{pq} ,

c) für $p \neq q$, p gerade:

$J_{pq} \cup \{[s(p,\frac{p}{2});s(q,k)] \; ; \; \frac{q}{2} \leq k \leq q\}$.

2.9. Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch die Ergebnisse über $\mathrm{Fix}\,\kappa\tau = V(H_p(\mathbb{C})) \subset I_{pp}$, die im wesentlichen bekannt sind. Hier ist $H_p(\mathbb{C})$ die formal-reelle Jordan-Algebra der hermiteschen Matrizen über $\mathbb{C}$ und $V(H_p(\mathbb{C}))$ das zugehörige Jordan-Tripel. Es gilt:

a) Aus 1.7.a, [1] XI Korollar zu Satz 4.6 und [3] III Satz 4.6 folgt

$$\Gamma(V(H_p(\mathbb{C}))) = \{\pm\tau^{\varepsilon}[u;\bar{u}^t] \; ; \; \varepsilon \in \{0,1\}, \; u \in GL(p,\mathbb{C})\}$$

$$\mathrm{Aut}\,V(H_p(\mathbb{C})) = \{\pm\tau^{\varepsilon}[u;\bar{u}^t] \; ; \; \varepsilon \in \{0,1\}, \; u \in U(p)\} \; .$$

b) Schließlich erhält man aus 1.7.b und [2] Anhang:

Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von $V(H_p(\mathbb{C}))$ ist

1) für p gerade: $\{\pm[s(p,j);s(p,j)] \; ; \; 0 \leq j \leq \frac{p}{2}\}$
$\cup\{\pm\tau \; , \; \pm\tau[J(p),J(p)]\}$

2) für p ungerade: $\{\pm[s(p,j);s(p,j)] \; ; \; 0 \leq j \leq \frac{p}{2}\}$
$\cup\{\pm\tau\}$.

3. JORDAN-TRIPEL VOM TYP III

In diesem Paragraphen behandeln wir die kompakten Jordan-Tripel vom Typ III. Wir verwenden weiterhin die in § 1, insbesondere in 1.8 definierten Bezeichnungen.

3.1. Wie in § 2 betrachten wir zunächst ein Beispiel eines Jordan-Tripels über einem Körper K der Charakteristik Null:

$$\mathrm{Sym}(p,K) = \{x \in M(p,p;K) \; ; \; x^t = x\} \qquad (p \geq 2) \quad .$$

Offenbar ist $\mathrm{Sym}(p,K)$ ein Teilsystem von $M(p,p;K)$.

In [6] III § 1 wird bewiesen:

a) Die Strukturalgebra von $\mathrm{Sym}(p,K)$ operiert irreduzibel auf $\mathrm{Sym}(p,K)$, so daß wie in 2.1.a folgt: $\mathrm{Sym}(p,K)$ ist zentral-einfach.

b) Die Spurform von $\mathrm{Sym}(p,K)$ ist $\mathrm{Sp}(x,y) =$

$= (p+1)\mathrm{Spur}(xy^t)$.

c) Für $u \in GL(p,K)$, $x \in M(p,p;K)$ sei die Abbildung $[u]$ durch $[u](x) = u^t x u$ definiert. Dann besteht $\Gamma(\mathrm{Sym}(p,K))$ genau aus den Abbildungen $\zeta[u]$ mit $\zeta \in K \setminus \{0\}$, $u \in GL(p,K)$.

Wir bemerken außerdem noch:

d) $\zeta[u] = \mathrm{Id}$ ist äquivalent mit $u = \xi E$, $\zeta = \xi^{-2}$ für ein $\xi \in K \setminus \{0\}$.

3.2. Für $p \geq 2$ sei III_p die Hermitefizierung des kompakten Jordan-Tripels $\mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}) = V(H_p(\mathbb{R}))$. Nach [8] 4.14 ist III_p einfach. Wir fassen III_p als Teilsystem von I_{pp} auf:

$$III_p = \{x \in I_{pp} \ ; \ x^t = x\}.$$

a) Für die in $\langle .,. \rangle$ definierte hermitesche Form $\langle .,. \rangle$ gilt $\langle x,y \rangle = (p+1)\mathrm{Spur}(x\bar{y}^t)$. Daher ist $[u] \in \Gamma(\mathrm{Sym}(p,\mathbb{C}))$ genau dann unitär bezüglich $\langle .,. \rangle$, wenn $u \in U(p)$ gilt.

b) Mit 1.5, 1.6, 3.1.c und a) folgt:

$\Gamma(III_p)$ (bzw. $\mathrm{Aut}\ III_p$) besteht genau aus den Abbildungen $\kappa^\varepsilon[u]$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $u \in GL(p,\mathbb{C})$ (bzw. $u \in U(p)$).

c) Mit b) beweist man wie in 2.4:

Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von III_p ist

1) für p gerade: $\{\pm[s(p,j)] \ ; \ \frac{p}{2} \leq j \leq p\} \cup \{\kappa, \kappa[J(p)]\}$,

2) für p ungerade: $\{\pm[s(p,j)] \ ; \ \frac{p+1}{2} \leq j \leq p\} \cup \{\kappa\}$.

3.3. Wir untersuchen nun die reellen Formen von III_p und beginnen mit dem einfachen kompakten Jordan-Tripel $\mathrm{Fix}\ \kappa = \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}) = V(H_p(\mathbb{R}))$.

a) Nach 3.1.a besteht $\Gamma(\mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}))$ aus den Abbildungen $\pm[u]$ mit $u \in GL(p, \mathbb{R})$.

b) Für $[u] \in \Gamma(\mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}))$ ist $[u^t]$ die bezüglich der Spurform adjungierte Abbildung. Damit folgt: $\mathrm{Aut}\ \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R})$ besteht aus den Abbildungen $\pm[u]$ mit $u \in O(p)$ ([3]Satz 3.1).

c) Mit b) beweist man (oder folgert es aus [2] Anhang und 1.7.b):

Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der invo-

lutorischen Automorphismen von $\mathrm{Sym}(p,\mathbb{R})$ ist
1) für p gerade: $\{\pm[s(p,j)];\ \frac{p}{2} \le j \le p\} \cup \{\pm[J(p)]\}$,
2) für p ungerade: $\{\pm[s(p,j)];\ \frac{p+1}{2} \le j \le p\}$.

3.4. Mit der Darstellung von $M(p,p;\mathbb{H})$ aus 2.7.a zeigt man, daß die reelle Form $\mathrm{Fix}\ \kappa[J(2p)]$ von III_{2p} zum Teilsystem

$$u(p,\mathbb{H}) := \{x \in M(p,p;\mathbb{H});\ \bar{x}^t = -x\} \quad (p \ge 1)$$

des Jordan-Tripels $M(p,p;\mathbb{H})$ isomorph ist. Insbesondere ist $u(p,\mathbb{H})$ einfach und kompakt.
Aus 4.4.c und 1.4.d folgt, daß die Struktur- und Automorphismengruppe von $u(p,\mathbb{H})$ zu der entsprechenden Gruppe von $V(H_p(\mathbb{H}))$ (4.6) isomorph sind. Damit erhält man:
a) Für $v \in GL(p,\mathbb{H})$, $x \in u(p,\mathbb{H})$ sei $\chi_v(x) = vx\bar{v}^t$. Dann besteht $\Gamma(u(p,\mathbb{H}))$ (bzw. $\mathrm{Aut}\ u(p,\mathbb{H})$) genau aus den Abbildungen $\pm\chi_v$ mit $v \in GL(p,\mathbb{H})$ (bzw. $v \in Sp(p)$).
b) Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von $u(p,\mathbb{H})$ ist

$$\{\pm\chi_{s(p,j)};\ \tfrac{p}{2} \le j \le p\} \cup \{\pm\chi_{iE}\} .$$

4. JORDAN-TRIPEL VOM TYP II

Analog zu den vorherigen Paragraphen behandeln wir in diesem Paragraphen kompakte Jordan-Tripel vom Typ II .

4.1. Für einen Körper K der Charakteristik Null ist

$$o(p,K) = \{x \in M(p,p;K);\ x^t = -x\}$$

ein Teilsystem des Jordan-Tripels $M(p,p;K)$ (2.1). Wir setzen <u>stets $p \ge 5$</u> voraus, da wir später ohnehin nur diesen Fall benötigen (vgl. Einleitung).
In [6] III § 1 wird gezeigt:
a) Für $x \in M(p,p;K)$ liegt

$$T_x : o(p,K) \longrightarrow o(p,K) : y \longrightarrow x^t y + yx$$

in der Strukturalgebra $T(o(p,K))$. Die Abbildung

$$M(p,p;K)^- \longrightarrow T(o(p,K)) : x \longrightarrow T_x$$

ist ein Isomorphismus der Lie-Algebren, wobei $M(p,p;K)^-$ die durch $[x,y] := xy - yx$ auf $M(p,p;K)$ definierte Lie-Algebra ist.
b) Die Strukturalgebra $T(o(p,K))$ operiert irreduzibel auf $o(p,K)$. Damit folgt wie in 2.1.a, daß $o(p,K)$ zentral-

einfach ist.

c) Die Spurform von $o(p,K)$ ist $Sp(x,y) = (p-1)\,Spur(xy^t)$.

d) Für $u \in GL(p,K)$ liegt

$$[u] : o(p,K) \longrightarrow o(p,K) : x \longrightarrow u^t xu$$

in der Strukturgruppe $\Gamma(o(p,K))$.

4.2 SATZ. <u>Für</u> $p \geq 5$ <u>gilt</u>

a) $\Gamma(o(p,K)) = \{\zeta[u]; \zeta \in K \setminus \{0\},\ u \in GL(p,K)\}$

b) $\zeta[u] = \mathrm{Id}$ <u>ist äquivalent mit</u> $\zeta = \xi^{-2}$, $u = \xi E$ <u>für ein</u> $\xi \in K \setminus \{0\}$.

Beweis. a) Nach 4.1.d liegt $\zeta[u]$ für $\zeta \in K \setminus \{0\}$, $u \in GL(p,K)$ in der Strukturgruppe. Nun zur Umkehrung:

1) Für $\psi \in \Gamma(o(p,K))$ ist $T \longrightarrow \psi T \psi^{-1}$ ein Lie-Algebrenautomorphismus. Nach 4.1.a kann man daher eine Abbildung $\tilde{\psi} : M(p,p;K) \longrightarrow M(p,p;K)$ durch $T_{\tilde{\psi}(u)} = \psi T_u \psi^{-1}$ definieren. Dann ist $\tilde{\psi}$ ein Lie-Algebrenautomorphismus von $M(p,p;K)^-$. Wegen $\tilde{\psi}(E) = E$ ist $\tilde{\psi}$ eindeutig durch $\tilde{\psi}|s\ell(p,K)$ mit $s\ell(p,K) = \{x \in M(p,p;K); \mathrm{Spur}\ x = 0\}$ bestimmt.

2) Für $x \in M(p,p;K)$ sei $\tau(x) = x^t$ und $I(u)x = u^{-1}xu$ $(u \in GL(p,K))$. Dann gilt ([4]S.306):

$\mathrm{Aut}\ s\ell(p,K) = \{I(u)(-\tau)^{\varepsilon}; \varepsilon \in \{0,1\},\ u \in GL(p,K)\}$.

Wir untersuchen nun die beiden Möglichkeiten für $\tilde{\psi}$:

3) Sei $\tilde{\psi}|s\ell(p,K) = I(u)$ für ein $u \in GL(p,K)$. Für jedes $x \in M(p,p;K)$ gilt dann $\psi T_x \psi^{-1} = T_{\tilde{\psi}(x)} = [u]T_x[u]^{-1}$. Daher vertauscht $[u]^{-1}\psi$ mit jedem T_x, so daß mit 4.1.a,b folgt $[u]^{-1}\psi \in K\mathrm{Id}$.

4) Sei $\tilde{\psi}|s\ell(p,K) = -I(u)\tau$ für ein $u \in GL(p,K)$. Für $\varphi = [u]^{-1}\psi \in \Gamma(o(p,K))$ berechnet man $\varphi T_x \varphi^{-1} = T_{-x^t}$ für alle $x \in s\ell(p,K)$. Sei nun $x \in o(p,K)$. Dann gilt $\varphi T_x = T_x \varphi$ und $T_x = \mathrm{ad}\ x$, wobei $\mathrm{ad}\ x$ die adjungierte Darstellung der Teilalgebra $o(p,K)^-$ von $M(p,p;K)^-$ ist. Folglich liegt φ im Zentroid der Lie-Algebra $o(p,K)^-$. Wegen $p \geq 5$ ist $o(p,K)^-$ eine zentral-einfache Lie-Algebra ([4]X Satz 9). Daher gibt es $\xi \in K$ mit $\varphi = \xi\mathrm{Id}$. Es folgt $T_x = T_{-x^t}$ für alle $x \in s\ell(p,K)$, also $x = -x^t$. Demnach kommt der Fall 4) nicht vor.

b) Sei $\zeta[u] = \mathrm{Id}$. Für jedes $x \in M(p,p;K)$ hat man dann $T_x = \zeta[u]T_x(\zeta[u])^{-1} = T_{u^{-1}xu}$, also $x = u^{-1}xu$. Es gibt demnach $\xi \in K$ mit $u = \xi E$ und folglich $\zeta = \xi^{-2}$.

4.3. Vergleicht man 3.1 mit 4.1.c, 4.2, so folgt das KOROLLAR. Für $p \geq 5$ sind die Struktur- und Automorphismengruppen von $\mathrm{Sym}(p,K)$ und $o(p,K)$ isomorph.

4.4. Für $p \geq 5$ sei II_p die Hermitefizierung des kompakten Jordan-Tripels $o(p,\mathbb{R})$. Nach [8] 4.14 ist II_p einfach. Wir fassen II_p als Teilsystem von I_{pp} auf:

$$II_p = \{x \in I_{pp}; x^t = -x\}.$$

a) Für die in 1.3.d definierte Form $\langle .,. \rangle$ gilt $\langle x,y \rangle = (p-1)\mathrm{Spur}(x\bar{y}^t)$.

b) Mit 1.5, 1.6 und 4.2 folgt nun:

$\Gamma(II_p)$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, II_p$) besteht genau aus den Abbildungen $\kappa^\varepsilon[u]$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $u \in GL(p,\mathbb{C})$ (bzw. $u \in U(p)$).

c) Ein Vergleich mit 3.2.b zeigt:

$\Gamma(II_p)$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, II_p$) und $\Gamma(III_p)$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, III_p$) sind isomorphe Gruppen.

d) Mit c) folgt aus 3.2.c:

Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von II_p $(p \geq 5)$ ist

1) für p gerade: $\{\pm[s(p,j)]; \frac{p}{2} \leq j \leq p\} \cup \{\kappa, \kappa[J(p)]\}$

2) für p ungerade: $\{\pm[s(p,j)]; \frac{p+1}{2} \leq j \leq p\} \cup \{\kappa\}$.

4.5. Wir untersuchen nun die reellen Formen von II_p und beginnen mit dem einfachen kompakten Jordan-Tripel $\mathrm{Fix}\,\kappa = o(p,\mathbb{R})$, $p \geq 5$. Mit 4.3 und 3.3 folgt:

$\Gamma(o(p,\mathbb{R}))$ (bzw. $\mathrm{Aut}\, o(p,\mathbb{R})$) besteht aus den Abbildungen $\pm[u]$ mit $u \in GL(p,\mathbb{R})$ (bzw. $u \in O(p)$).

Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der involutorischen Automorphismen von $o(p,\mathbb{R})$ ist

1) für p gerade: $\{\pm[s(p,j)]; \frac{p}{2} \leq j \leq p\} \cup \{\pm[J(p)]\}$.

2) für p ungerade: $\{\pm[s(p,j)]; \frac{p+1}{2} \leq j \leq p\}$.

4.6. Mit der Darstellung von $M(p,p;\mathbb{H})$ aus 2.7.a zeigt man, daß die reelle Form $\mathrm{Fix}\,\kappa[J(2p)]$ von II_{2p}

zum Jordan-Tripel der formal-reellen Jordan-Algebra $\mathcal{H}_p(\mathbb{H})$, also zu $V(\mathcal{H}_p(\mathbb{H}))$ isomorph ist.
Für $u \in GL(p,\mathbb{H})$ sei χ_u definiert durch $\chi_u(x) = ux\bar{u}^t$.

a) Wie in 2.9.a folgt mit [3] III Satz 5.1

$$\Gamma(V(\mathcal{H}_p(\mathbb{H}))) = \{\pm\chi_u; u \in GL(p,\mathbb{H})\}$$
$$\mathrm{Aut}\, V(\mathcal{H}_p(\mathbb{H})) = \{\pm\chi_u; u \in Sp(p)\}$$

b) Ein Repräsentantensystem der involutorischen Automorphismen von $V(\mathcal{H}_p(\mathbb{H}))$ ist

$$\{\pm\chi_{s(p,j)}; \tfrac{p}{2} \le j \le p\} \cup \{\pm\chi_{iE}\}$$

([2] Anhang und 1.7.b)

5. JORDAN-TRIPEL VOM TYP IV

In diesem Paragraphen werden das kompakte und hermitesche Jordan-Tripel IV_n und seine reellen Formen behandelt.

5.1. Sei K ein Körper der Charakteristik Null. Für $x,y \in K^n = M(n,1;K)$ sei $(x,y) = x^ty$. Ist s eine bezüglich $(.,.)$ orthogonale Spiegelung, so wird durch

$$\{xyz\} = 2[(x,y)z + (z,y)x - (x,sz)sy]$$

auf K^n ein Jordan-Tripel definiert, das wir mit $(K^n;s)$ bezeichnen.

Man überlegt sich leicht:

a) $(K^n;s)$ ist zentral-einfach.

b) Die Spurform von $(K^n;s)$ ist $Sp(x,y) = n(x,y)$.

c) $\Gamma((K^n;s))$ besteht aus den Abbildungen $u \in GL(n,K)$ mit $usu^ts = \zeta E$ für ein $\zeta \in K \setminus \{0\}$.

5.2. Das einfache kompakte und hermitesche Jordan-Tripel IV_n ist die Hermitefizierung des kompakten Jordan-Tripels $(\mathbb{R}^n;E)$ ([8] 4.14). Der IV_n zugrunde liegende Vektorraum ist also der $\mathbb{C}^n$, und für das Produkt gilt:

$$\{xyz\} = 2[(x,\bar{y})z + (z,\bar{y})x - (x,z)\bar{y}] .$$

a) Wegen 1.5 und 5.1.c besteht $\Gamma(IV_n)$ aus den Abbildungen $\kappa^\varepsilon u$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $u \in GL(n,\mathbb{C})$ mit $uu^t = \zeta E$ für ein $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Mit 1.6 folgt: $\mathrm{Aut}\, IV_n$ besteht aus den Abbildungen $\kappa^\varepsilon u$ mit $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $u \in U(n)$ mit $uu^t = \zeta E$ für ein $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$.

c) Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der nvolutorische Automorphismen von IV_n ist

$$\{s(n,j); 0 \leq j \leq n\} \cup \{\kappa s(n,j); \tfrac{n}{2} \leq j \leq n\} \cup \{iJ(n)\} ,$$

obei $iJ(n)$ natürlich nur für gerades n vorkommt.

5.3. Die reellen Formen von IV_n sind nach 5.2.c die
ompakten Jordan-Tripel Fix $\kappa s(n,j)$, $\frac{n}{2} \leq j \leq n$. Sie
ind zu $(\mathbb{R}^n; s(n,j))$ isomorph.

) Nach 5.1.c ist $\Gamma((\mathbb{R}^n; s(n,j)))$ bekannt.

) Für $j \neq \frac{n}{2}$ gilt

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n; s(n,j)) = \{u \in O(n); us(n,j) = s(n,j)u\}$$

nd im Fall $j = \frac{n}{2}$ (also n gerade) hat man

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n; s(n,\tfrac{n}{2})) = \{u \in O(n); us(n,\tfrac{n}{2}) = s(n,\tfrac{n}{2})u\} .$$

) Ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der
nvolutorischen Automorphismen von $(\mathbb{R}^n; s(n,j))$ ist

) für $j \neq \frac{n}{2}$

$$\{\begin{pmatrix} s(j,p) & O \\ O & s(n-j,q) \end{pmatrix} ; 0 \leq p \leq j , 0 \leq q \leq n-j\} .$$

) für $j = \frac{n}{2}$

$$\{\begin{pmatrix} s(\frac{n}{2},p) & O \\ O & s(\frac{n}{2},q) \end{pmatrix} ; 0 \leq p \leq q \leq \tfrac{n}{2}\}$$

$$\cup \{\begin{pmatrix} O & E_j \\ E_j & O \end{pmatrix}\} .$$

ITERATUR

1] BRAUN, H. und KOECHER, M.: Jordan-Algebren. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966

2] HELWIG,K.-H.: Halbeinfache reelle Jordan-Algebren. Habilitationsschrift, München 1967

3] HERNTECK, C.: Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen. Dissertation, Münster 1959

[4] JACOBSON, N.: Lie algebras. New York-London-Sydney: Interscience Publishers 1962

[5] JAFFE, H.: Real forms of hermitian symmetric spaces. Bull. of Amer. Math. Soc. 81, 456-458,(1975)

[6] KOECHER, M.: An elementary approach to bounded symmetric domains. Lecture notes, Rice University, Houston 1969

[7] LOOS, O.: Lectures on Jordan triples. Lecture notes, University of British Columbia, Vancouver 1971

[8] LOOS, O.: Bounded symmetric domains and Jordan pairs. Lecture notes, University of California at Irvine 1977

[9] MEYBERG, K.: Lectures on algebras and triple systems. Lecture notes, University of Virginia, Charlottesville 1972

[1o] NEHER. E.: Cartan-Involutionen von halbeinfachen reellen Jordan-Tripelsystemen. Math. Z. 169, 271-292, (1979)

[11] PETERSSON, H.P.: Conjugacy of idempotents in Jordan pairs. Comm. Algebra 6, 673-715 (1978)

Erhard Neher
Mathematisches Institut der
Universität Münster
Roxeler Straße 64/IV
44oo Münster
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 30. Januar 1980)