

EINE DIFFERENTIALTOPOLOGISCHE BERECHNUNG DER
 TOTALEN KRÜMMUNG UND TOTALEN ABSOLUTKRÜMMUNG
 IN DER SPHÄRISCHEN DIFFERENTIALGEOMETRIE

Eberhard TEUFEL

The aim of this article is to compute the total (absolute) curvature, i.e. the mean value of the (absolute) Lipschitz-Killing-curvature, of an immersion $f: M \rightarrow S^n$ of a compact manifold into the unit sphere in a differentialtopological manner. Through a generalization of KUIPERS treatment of immersions in Euclidean spaces it can be computed as the mean value of the number of critical points - weighted by $(-1)^k$ (k =Index) resp. not weighted - of certain functions. These functions are the pullback via f of "level-functions", which are defined almost everywhere on S^n . Such a "level-function" is constructed by taking any oriented great circle as a "leveling-scale" and the orthogonal great $(n-1)$ -spheres as "level-surfaces".

INHALT	Seite
1. Grundlegende Bezeichnungen und Sachverhalte	1
2. Die differentialgeometrische Totale (Absolut-) Krümmung $tk(f)$ bzw. $tak(f)$	5
3. Die differentialtopologische Totale (Absolut-) Krümmung $TK(f)$ bzw. $TAK(f)$	8
4. Existenz von $TK(f)$ bzw. $TAK(f)$ sowie Gleichheit mit $tk(f)$ bzw. $tak(f)$	11
Literatur	28

1. Grundlegende Bezeichnungen und Sachverhalte

A. Zur Terminologie

Wie üblich bezeichnet \mathbb{R}^k einen reellen euklidischen Vektorraum der Dimension k , S^k die Einheitssphäre eines \mathbb{R}^{k+1} , $[\]$ die lineare Hüllenbildung und $|\ |$ die Determinantenbildung

im jeweils betrachteten Vektorraum.

(Eventuell berandete) Mannigfaltigkeiten der Dimension k sind hausdorffsch, von abzählbarer Basis und ansonsten lokal homöomorph zu offenen Teilmengen eines abgeschlossenen Halbraumes des \mathbb{R}^k mit differenzierbaren Kartenwechseln.

Differenzierbar auf einer abgeschlossenen Teilmenge des \mathbb{R}^k heißt dabei: Einschränkung einer differenzierbaren Abbildung, die auf einer offenen Umgebung dieser abgeschlossenen Teilmenge definiert ist.

Wenn nichts anderes erwähnt, heiße "differenzierbar" immer C^∞ -differenzierbar.

Abbildungsverknüpfungen sind stets von rechts nach links auszuführen.

... | ... bedeutet die Einschränkung, etwa einer Abbildung, eines Vektorfeldes, Integrales o.ä.

Maß- und Integrationsbegriffe verstehen wir im Lebesgueschen Sinne.

B. Grundlegendes aus der Differentialgeometrie

Es sei X^k eine Mannigfaltigkeit der Dimension k , mit oder ohne Rand ∂X . Dann ist ∂X eine $(k-1)$ -dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit und $X \setminus \partial X =: \overset{\circ}{X}$ eine offene k -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Tangentialbündel TX von X hat für jedes $x \in X$ eine zu \mathbb{R}^k isomorphe Faser $T_x X$, den Tangentialraum in x .

$CX \subset TX$ ist das Teilbündel der "nicht nach außen weisenden" Tangentialvektoren. Die Fasern sind Tangentialkegel und für $x \in \overset{\circ}{X}$ ist $C_x X = T_x X$, jedoch für $x \in \partial X$ ist $C_x X$ nur ein abgeschlossener Halbraum von $T_x X$.

Ist Y eine weitere Mannigfaltigkeit und $\varphi: X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung, $\varphi_*: TX \rightarrow TY$ die induzierte lineare Abbildung, dann heißt φ Immersion, wenn φ_* überall maximalen Rang besitzt. $\varphi^*: \varphi_*(TX) \rightarrow TX$ bezeichne die Inverse zu φ_* .

Für das Folgende legen wir speziell fest:

- 1) \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 2$) sei orientiert und vermöge seinem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ riemannsche Mannigfaltigkeit, da wir $T_x \mathbb{R}^{n+1}$ mit \mathbb{R}^{n+1} identifizieren. ∇ bezeichne die kovariante Ableitung des (trivialen) Levi-Civita-Zusammenhanges.
- 2) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ = Einheitssphäre des \mathbb{R}^{n+1} ist vermöge der Inklusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ riemannsche, orientierbare Mannigfaltigkeit mit induzierter kovarianter Ableitung $\overset{S}{\nabla}$. Wir betrachten Tangentialvektoren an S^n als Vektoren des \mathbb{R}^{n+1} und bezeichnen daher das induzierte Skalarprodukt in TS^n auch mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- 3) M sei m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m > 0$.
- 4) $f: M \rightarrow S^n$ sei eine Immersion. Vermöge f ist M riemannsch mit induzierter kovarianter Ableitung $\overset{M}{\nabla}$ in $\overset{M}{M}$ beziehungsweise $\overset{M}{\nabla}$ auf ∂M .

C. Grundlegendes aus der Differentialtopologie

Es sei $\varphi: X \rightarrow Y$ differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten mit $\partial Y = \emptyset$.

$x \in X$ heißt kritischer Punkt von φ , wenn dort die induzierte lineare Abbildung $\varphi_*|_{C_x X}: C_x X \rightarrow T_{\varphi(x)} Y$ nicht surjektiv ist ^{*}).

Ist nun speziell $Y = \mathbb{R}$ (oder wenigstens lokal diffeomorph zu \mathbb{R}), dann ist $x \in X$ kritischer Punkt von φ , wenn entweder $\varphi_*(C_x X) = 0$, $\varphi_*(C_x X) = \mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ oder $\varphi_*(C_x X) = \mathbb{R}_- := \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$ ist. In den beiden letzten Fällen, die nur am Rande auftreten können, heißt x ein (+)-kritischer bzw. (-)-kritischer Punkt ^{**}).

Für kritische Punkte $x \in \partial X$ ist $\varphi_*(T_x \partial X) = 0$ und daher x kritischer Punkt von $\varphi|_{\partial X}$.

Im folgenden betrachten wir nur kritische Punkte, in denen $\varphi_*|_{C_x X}$ die Nullabbildung ist oder die (+)-krit. sind.

^{*}) vgl. [8], S. 22
^{**}) vgl. [1]

Die φ -Bilder kritischer Punkte heißen kritische Werte von φ . Ist X riemannsch mit induzierter kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$ in \hat{X} bzw. $\hat{\nabla}$ auf ∂X und betrachten wir das Gradientenfeld $\text{grad}\varphi$ von $\varphi|_{\hat{X}}$ bzw. $\varphi|_{\partial X}$ als Tangentialvektorfeld, dann ist durch die lineare Abbildung $\hat{\nabla}\text{grad}\varphi: T_x X \rightarrow T_x X$ für $x \in \hat{X}$ bzw. $\hat{\nabla}\text{grad}\varphi: T_x \partial X \rightarrow T_x \partial X$ für $x \in \partial X$ der Hessesensor $\text{hess}\varphi(x)$ gegeben ^{*}).

Andererseits ist durch die Matrix der 2-ten partiellen Ableitungen von $\varphi|_{\hat{X}}$ bzw. $\varphi|_{\partial X}$ bezüglich einer lokalen Karte in \hat{X} bzw. ∂X die Hessematrix gegeben ^{**}), die speziell in kritischen Punkten tensorielles Transformationsverhalten zeigt, da ja dort die ersten partiellen Ableitungen der Darstellung von φ verschwinden.

In kritischen Punkten stimmt die Koeffizientenmatrix des Hessesensors und die Hessematrix überein, da dort der Gradient von φ verschwindet und daher Terme mit Zusammenhangskoeffizienten im Hessesensor nicht auftreten.

Der kritische Punkt $x \in X$ heißt nicht-degeneriert, wenn $\text{hess}\varphi(x)$ nicht-degeneriert ist.

Die Dimension des maximalen Unterraumes, auf dem die zu $\text{hess}\varphi(x)$ gehörige quadratische Form negativ definit ist heißt dann der Index des kritischen Punktes x von φ , $\text{Index}\varphi(x)$.

Nach dem Lemma von Morse liegen nicht-degenerierte kritische Punkte isoliert ^{***}).

Jetzt noch einige Bezeichnungen:

$$(1.1) \quad \mathfrak{M}(X) := \{\varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ differenzierbar und } \varphi \text{ besitzt nur nicht-degenerierte kritische Punkte}\} \\ = \text{Menge der MORSE-Funktionen auf } X.$$

(Anstelle von \mathbb{R} kann auch S^1 gesetzt werden, da beide Räume lokal diffeomorph sind.)

^{*}) vgl. [6], S.89
^{**}) vgl. [8], S.143; [1], S.142
^{***}) vgl. [8], Kap.6, 1.1

Weiter sei $\varphi \in \mathfrak{F}(X)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann setzen wir

$$\begin{aligned} & \beta_k^\circ(\varphi) \text{ bzw. } \beta_k^\delta(\varphi) := \text{Anzahl der kritischen Punkte} \\ & \text{von } \varphi \text{ mit Index } k, \text{ die in } \overset{\circ}{X} \text{ bzw. } \delta X \text{ liegen} \\ (1.2) \quad & \beta_k(\varphi) := \beta_k^\circ(\varphi) + \beta_k^\delta(\varphi) \\ & \tilde{\beta}(\varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(\varphi) \quad \beta(\varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(\varphi) \end{aligned}$$

2. Die differentialgeometrische Totale (Absolut-) Krümmung $tk(f)$ bzw. $tak(f)$

Die Determinante der von einer Normalen e abhängenden Zweiten Fundamentalform der Immersion $f: M \rightarrow S^n$ liefert in Verallgemeinerung der Gaußschen Krümmung für Hyperflächen die Lipschitz-Killing-Krümmung $G(e)$ (vgl. [5]).

Das Äußere Normaleneinheitsbündel N der Immersion trägt eine ausgezeichnete Volumenform μ (vgl. [3]), die sich aus dem Volumelement von M und dem gewöhnlichen Volumelement der Faser im Normaleneinheitsbündel zusammensetzt.

Im einzelnen sei $f: M \rightarrow S^n$ Immersion. Das Äußere Normaleneinheitsbündel N der Immersion hat für $p \in M$ die Faser $N_p := \{e \in T_f(p)S^n \mid \langle e, f_*(C_p M) \rangle \leq 0 \text{ und } \langle e, e \rangle = 1\}$. Für $p \in \overset{\circ}{M}$ ist die Faser eine S^{n-m-1} , für $p \in \delta M$ eine abgeschlossene $(n-m)$ dimensionale Halbsphäre.*

Die Nahtstelle zwischen beiden Teilen ist ein Teilbündel $\bar{N} \subset N$ über δM mit der Faser

$$(2.1) \quad \bar{N}_p = \{e \in N_p \mid \langle e, f_*(C_p M) \rangle = 0\}.$$

N ist $(n-1)$ dimensionale, in \bar{N} C^1 -, sonst C^∞ -Mannigfaltigkeit. \bar{N} ist $(n-2)$ dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit.

(2.2) $n: N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne die (in \bar{N} C^1 -, sonst C^∞ -) Abbildung, welche die Normale, als Vektor des \mathbb{R}^{n+1} gesehen, zuweist. Diese Abbildung ist faserweise eine Einbettung. Wir bemerken hier, daß \bar{N} bei späteren Integrationen ausgeschlossen wird, da wir hierauf die Lipschitz-Killing-Krümmung nicht definieren.

*) Für $m=n$ ist die Faser über $\overset{\circ}{M}$ leer; N ist dann das äußere Normaleneinheitsbündel von δM bzgl. M .

Um über $N \setminus \bar{N}$ integrieren zu können, benötigen wir eine Volumenform.

Zunächst ist für jedes $e \in N \setminus \bar{N}$, $X, Y \in T_e N$ durch

$$g_N(X, Y) := \langle (f \circ \pi)_*(X), (f \circ \pi)_*(Y) \rangle + \langle n_*^\perp(X), n_*^\perp(Y) \rangle$$

(\perp ist dabei die nachfolgende orthogonale Projektion auf $T_{n(e)}(n(N_{\pi(e)}))$)

ein Skalarprodukt auf $N \setminus \bar{N}$ gegeben.

Die positive Definitheit gilt wegen: $g_N(X, X) = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker } n_*^\perp$ und $X \in \text{Ker}(f \circ \pi)_* \Rightarrow X \in \text{Ker } n_*^\perp$ und $X \in \text{Ker } \pi_*$, da f Immersion; d.h. X ist tangential zur Faser $N_{\pi(e)}$ und weil n die Faser einbettet folgt $X = 0$.

Da $(f \circ \pi)_*(T_e N) \perp [n(N_{\pi(e)})]$ können wir auch schreiben

$$(2.3) \quad g_N(X, Y) = \langle (f \circ \pi)_*(X) + n_*^\perp(X), (f \circ \pi)_*(Y) + n_*^\perp(Y) \rangle$$

Damit ist $N \setminus \bar{N}$ riemannsche Mannigfaltigkeit und wir erhalten die gewünschte Volumenform μ auf $N \setminus \bar{N}$ für $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in T_e N$ durch

$$(2.4) \quad \mu(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = |n(e), f(\pi(e)), (f \circ \pi)_*(Y_1) + n_*^\perp(Y_1), \dots, (f \circ \pi)_*(Y_{n-1}) + n_*^\perp(Y_{n-1})|,$$

denn die ersten beiden Vektoren sind orthonormiert und stehen senkrecht auf den restlichen, da auf N die Identitäten $\langle n, f \circ \pi \rangle = 0$ bzw. $\langle n, n \rangle = 1$ bestehen.

Da \mathbb{R}^{n+1} orientiert ist, ist durch μ auch $N \setminus \bar{N}$ orientiert.

Für spätere Rechnungen ist es vorteilhaft, eine spezielle Karte einer Umgebung um e zu wählen. Entsprechend der Aufspaltung in (2.3) bestimmen wir Y_1, \dots, Y_{n-1} der Reihe nach in $\text{Ker } n_*^\perp$ und $\text{Ker}(f \circ \pi)_*$. Über \hat{M} bzw. δM ist $\dim \text{Ker } n_*^\perp = (n-1) - (n-m-1)$ bzw. $(n-1) - (n-m)$, da n die Fasern von N einbettet, weiter ist $\dim \text{Ker}(f \circ \pi)_* = n-1-m$ bzw. $n-m$, da f Immersion; außerdem ist $\text{Ker } n_*^\perp \cap \text{Ker}(f \circ \pi)_* = 0$, da g_N definit; nach dem Dimensionssatz können wir demnach Y_1, \dots, Y_{n-1} als Basis von $T_e N$ wählen. Nun ist $\text{Ker } n_*^\perp$ orthogonal zu $\text{Ker}(f \circ \pi)_*$, da $(f \circ \pi)_*(T_e N) \perp [n(N_{\pi(e)})]$; durch Orthonormieren in beiden Teilen erhalten wir also schließlich die folgenden Eigenschaften:

$\mu(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = 1$,
 $\{\pi_*(Y_1), \dots, \pi_*(Y_m)\}$ ist ON-Basis von $T_{\pi(e)}M, \pi(e) \in \dot{M}$
 bzw. $\{\pi_*(Y_1), \dots, \pi_*(Y_{m-1})\}$ ist ON-Basis von $T_{\pi(e)}\partial M,$
 $\pi(e) \in \partial M$,

(2.5) $\{n_*(Y_{m+1}), \dots, n_*(Y_{n-1})\}$ ist ON-Basis von
 $T_{n(e)}(n(N_{\pi(e)})), \pi(e) \in \dot{M}$
 bzw. $\{n_*(Y_m), \dots, n_*(Y_{n-1})\}$ ist ON-Basis von
 $T_{n(e)}(n(N_{\pi(e)})), \pi(e) \in \partial M$.

(2.6) ξ^1, \dots, ξ^{n-1} seien Koordinaten einer solchen Karte einer Umgebung von e in $N \setminus \bar{N}$, daß in e gerade die $\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}}$ den Y_1, \dots, Y_{n-1} entsprechen.

Um die Lipschitz-Killing-Krümmung definieren zu können, betrachten wir für ein festes $e \in N \setminus \bar{N}$ ein Normalenfeld $s: M \rightarrow N$ mit $\pi \circ s = \text{id}_M$ und $s(\pi(e)) = e$. Die kovariante Ableitung von s längs f in S^n mit nachfolgender orthogonaler Projektion auf $T_{\pi(e)}M$ bzw. $T_{\pi(e)}\partial M$ liefert den nur von e abhängenden Zweiten Fundamentaltensor der Immersion als lineare Selbstabbildung

$S(e): T_{\pi(e)}M \rightarrow T_{\pi(e)}M$ für $\pi(e) \in \dot{M}$ bzw.

$S(e): T_{\pi(e)}\partial M \rightarrow T_{\pi(e)}\partial M$ für $\pi(e) \in \partial M$ der Tangentialräume^{*}.

Die Determinante

(2.7) $G(e) := |S(e)|$

heißt Lipschitz-Killing-Krümmung^{**}).

($G(e)$ ist C^∞ -Funktion in $N \setminus \bar{N}$.)

Da $\dim \bar{N} < \dim N$ können wir zusammenfassend definieren:

DEFINITION 2.1: Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann heißen, sofern die Integrale existieren,

$$(i) \quad \text{tk}(f) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{N \setminus \bar{N}} G(e) \mu \quad \text{Totale Krümmung von } f \text{ bzw.}$$

^{*}) vgl. [6], S.103

^{**}) vgl. [5], S.11

$$(ii) \quad \text{tak}(f) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{N \setminus \bar{N}} |G(e)| \mu \quad \text{Totale Absolutkrümmung von } f.$$

($|S^{n-1}|$ ist dabei das gewöhnliche Volumen der Einheitsphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.)

Wenn M kompakt ist, dann ist auch N kompakt. Im Falle $\partial M \neq \emptyset$ kann f nach Vereinbarung über differenzierbare Abbildungen auf berandeten Mannigfaltigkeiten in 1.A über ∂M fortgesetzt werden; daher ist $G(e)$ bzw. $|G(e)|$ auf $\pi^{-1}(\overset{\circ}{M})$ integrierbar. Da $\pi^{-1}(\partial M) \setminus \bar{N}$ Teil des kompakten Normaleneinheitsbündels der Immersion $f|_{\partial M}$ ist, ergibt sich auch hier die Integrierbarkeit. Insgesamt gilt

SATZ 2.1. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, M kompakt, dann existieren die Integrale $\text{tk}(f)$ und $\text{tak}(f)$ und haben endliche Werte.

3. Die differentialtopologische Totale (Absolut-) Krümmung $\text{TK}(f)$ bzw. $\text{TAK}(f)$

$\text{TK}(f)$ bzw. $\text{TAK}(f)$ definieren wir als Mittelwert der Anzahl kritischer Punkte über der Menge der durch $f: M \rightarrow S^n$ definierten Höhenfunktionen - gewichtet mit $(-1)^k$ ($k = \text{Index}$) bzw. nicht gewichtet -.

Eine Höhenfunktion auf S^n ist durch einen orientierten Großkreis als "Höhenmeßplatte" und die dazu senkrechten, totalgeodätischen Hypersphären als "Niveaulächen" gegeben.

Die Niveaulächen einer Höhenfunktion überdecken die S^n nicht einfach, wir müssen den Schnitt aller Niveaulächen untereinander in Form einer totalgeodätischen S^{n-2} als "Ausnahmegebiet" bei der Festlegung des Definitionsbereichs der Höhenfunktion herausnehmen.

Zunächst jedoch parametrisieren wir die Menge der Höhenfunktionen und versehen sie mit einer bewegungsinvarianten Volumenform. Diese ist die Menge der orientierten Großkreise der $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; sie entsprechen den orientierten 2-dimensionalen Unterräumen des \mathbb{R}^{n+1} . Letztere Menge $\tilde{G}(2, n+1)$

fassen wir als 2-fache Überlagerung der Graßmannmannigfaltigkeit $G(2, n+1)$ der unorientierten 2-dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^{n+1} auf.

Mit Hilfe der auf $\tilde{G}(2, n+1)$ existierenden bewegungsinvarianten Metrik (s. [10]) ist dies eine $2(n-1)$ dimensionale kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit.

Wir beschreiben die Metrik in einer uns später ausreichenden Form. Ein beliebiges $s \in \tilde{G}(2, n+1)$ sei durch das orientierte 2-Bein $\{s_1, s_2\}$ des \mathbb{R}^{n+1} gegeben. Wegen $n \geq 2$ finden wir eine positiv orientierte ON-Basis $\{s_1, s_2, e_3, \dots, e_{n+1}\}$ des \mathbb{R}^{n+1} .

Dann liefert die Zuordnung

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & [s_1 + u^{13}e_3 + \dots + u^{1n+1}e_{n+1}, s_2 + u^{23}e_3 + \dots + u^{2n+1}e_{n+1}] \\ & \longleftrightarrow (u^{13}, \dots, u^{1n+1}, u^{23}, \dots, u^{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \end{aligned}$$

$\in \tilde{G}(2, n+1)$

eine Karte einer Umgebung von s in $\tilde{G}(2, n+1)$; s selbst hat verschwindende Koordinaten.

Die Koeffizienten der bewegungsinvarianten Metrik in s bzgl. dieser Karte sind dann

$$(3.2) \quad g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{13, \dots, 1n+1, 23, \dots, 2n+1\} \quad *$$

Die orthogonale Automorphismengruppe $O(n+1)$ des \mathbb{R}^{n+1} operiert differenzierbar und transitiv auf $\tilde{G}(2, n+1)$. Die isotrope Untergruppe bzgl. s liefert alle Darstellungen von s durch orientierte 2-Beine des \mathbb{R}^{n+1} , wobei ihre mit Kartenwechseln nach (3.1) verbundenen Elemente den Tangentialraum von $\tilde{G}(2, n+1)$ in s orientierungserhaltend abbilden. Daher wird $\tilde{G}(2, n+1)$ orientiert, indem wir die natürliche Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^{13}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{2n+1}} \right\}$ bzgl. Karten (3.1) als positiv orientiert festlegen.

In einer solchen Karte ist nun durch die riemannsche Metrik (3.2) eine bewegungsinvariante Volumenform

*) s. [10], Formel (33)

$$(3.3) \quad \eta\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{2n+1}}\right) = 1 \quad \text{in } s \text{ gegeben.}$$

Jetzt beschreiben wir eine Höhenfunktion auf S^n und M :
Ein beliebiges $s \in \tilde{G}(2, n+1)$ sei durch das orientierte
2-Bein $\{s_1, s_2\}$ des \mathbb{R}^{n+1} gegeben; $\{s_1, s_2, e_3, \dots, e_{n+1}\}$ sei
positiv orientierte ON-Basis des \mathbb{R}^{n+1} .

Die "Höhenmeßplatte" $[s_1, s_2] \cap S^n$ werde positiv durchlaufen.

DEFINITION 3.1. (i) Für jedes $h \in [s_1, s_2] \cap S^n$ heißt
 $\bar{N}_s(h) := \{x \in S^n \mid x \in [h, e_3, \dots, e_{n+1}] \cap S^n\}$ erweiterte
Niveauläche von s zur Höhe h;

$$(ii) \quad A_s := [e_3, \dots, e_{n+1}] \cap S^n = \bigcap_{h \in [s_1, s_2] \cap S^n} \bar{N}_s(h)$$

heißt Ausnahmegebiet zu s.

$\bar{N}_s(h)$ ist eine totalgeodätische Hypersphäre durch h , die
senkrecht zum Großkreis $[s_1, s_2] \cap S^n$ liegt und von A_s in 2
Zusammenhangskomponenten zerlegt wird; daher definieren
wir weiter:

$$(iii) \quad N_s(h) := \{x \in \bar{N}_s(h) \mid x \text{ liegt in der gleichen Zu-} \\ \text{sammenhangskomponente von} \\ \bar{N}_s(h) \setminus A_s \text{ wie } h\}$$

heißt Niveauläche von s zur Höhe h.

Die Niveaulächen überdecken zusammen mit dem Aus-
nahmegebiet die S^n einfach.

DEFINITION 3.2. (i) Die durch $x \mapsto h$ mit $x \in N_s(h)$ gege-
bene Abbildung $h_s: S^n \setminus A_s \rightarrow [s_1, s_2] \cap S^n$
heißt Höhenfunktion zu s;

Es ist $h_s(x) = x^{\perp s} \cdot \langle x^{\perp s}, x^{\perp s} \rangle^{-1/2}$, wobei $^{\perp s}$ die orthogona-
le Projektion auf $[s_1, s_2]$ im \mathbb{R}^{n+1} ist. Hieraus ersehen
wir die differenzierbare Abhängigkeit der Höhenfunktion
sowohl von x als auch von s .

(ii) Ist weiter $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann heißt die durch
 $p \mapsto h_s(f(p))$ definierte Abbildung
 $h_s \circ f: M \setminus f^{-1}(A_s) \mapsto [s_1, s_2] \cap S^n$ durch h_s induzierte

Höhenfunktion auf M.

Ist wegen $M \subset f^{-1}(A_S)$ der Definitionsbereich die leere Menge, dann sprechen wir formal auch von einer Funktion $h_S \circ f$, da sich zeigen wird, daß dieser Fall nur in einer Menge vom Maß 0 in $\tilde{G}(2, n+1)$ auftritt.

Die Werte von $h_S \circ f$ liegen auf dem orientierten Großkreis $[s_1, s_2] \cap S^n$, lokal liegt also eine Abbildung in \mathbb{R} vor, und wir können den Begriff des kritischen Punktes verwenden. Dies führt zur

DEFINITION 3.3. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann heißen die Mittelwerte

$$(i) \quad TK(f) := \frac{1}{|\tilde{G}(2, n+1)|} \int_{\tilde{G}(2, n+1)} \tilde{\beta}(h_S \circ f) \eta$$

differentialtopologische Totale Krümmung von f bzw.

$$(ii) \quad TAK(f) := \frac{1}{|\tilde{G}(2, n+1)|} \int_{\tilde{G}(2, n+1)} \beta(h_S \circ f) \eta$$

differentialtopologische Totale Absolutkrümmung von f.

($|\tilde{G}(2, n+1)|$ ist dabei das Volumen von $\tilde{G}(2, n+1)$ bzgl. η .)

Die Definition ist vorerst nur sinnvoll, wenn die Integranden fast überall auf $\tilde{G}(2, n+1)$ definiert und integrierbar sind. Im nächsten Abschnitt sehen wir, daß für kompaktes M beides zutrifft.

4. Existenz von TK(f) bzw. TAK(f) sowie Gleichheit mit tk(f) bzw. tak(f)

Um einen Überblick über alle Höhenfunktionen samt ihren kritischen Punkten zu bekommen, betrachten wir zu jedem Element des Äußeren Normaleneinheitsbündels der Immersion $f: M \rightarrow S^n$ diejenige totalgeodätische S^{n-1} , die im Basispunkt senkrecht zur Normalen verläuft, als Faser eines Sphärenbündels über dem Äußeren Normaleneinheitsbündel.

Nur die Höhenfunktionen, deren "Meßplatten" senkrecht

auf dieser S^{n-1} stehen, besitzen eine erweiterte Niveaufläche (nämlich S^{n-1}), die im Basispunkt senkrecht zur Normalen verläuft. Variieren wir die äußeren Normalen des Basispunktes, dann erfassen wir so alle Höhenfunktionen, die im Basispunkt möglicherweise kritisch sind. Wir müssen dann jedoch noch beachten, daß der Basispunkt degeneriert kritisch sein oder nicht im Definitionsbereich der Höhenfunktion liegen kann.

Im einzelnen sei $f: M \rightarrow S^n$ Immersion. Für alle $e \in N$ ist durch den Schnitt des orthogonalen Komplementes von $n(e)$ im \mathbb{R}^{n+1} mit S^n eine totalgeodätische S^{n-1} gegeben, die wir mittels lokalen Darstellungen zu einem Sphärenbündel SN über N verkleben.

Wir gehen dazu von einer offenen Kartenüberdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von N aus, wobei für jedes $\alpha \in A$ eine in U_α differenzierbare, positiv orientierte Orthonormalbasis $\{n(e), e_2^\alpha(e), \dots, e_{n+1}^\alpha(e)\}$, $e \in U_\alpha$ gegeben ist. (Eine derartige Überdeckung existiert wegen der Differenzierbarkeit der Abbildung n und der Differenzierbarkeit des E. Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.) (Bei der Differenzierbarkeit ist zu beachten, daß in $\bar{N} \subset N$ nur C^1 -Differenzierbarkeit vorliegt. Dies ist jedoch für das Folgende nicht wesentlich.)

Weiter sei eine Einheitssphäre $S_0^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ durch ihre Punkte mit den Koordinaten (s^2, \dots, s_{n+1}^2) bzgl. einer Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n gegeben.

Für jedes $\alpha \in A$ betrachten wir die Kartenabbildungen

$$\delta_\alpha: U_\alpha \times S_0^{n-1} \rightarrow SN, \text{ die durch}$$

$$(e, (s_\alpha^2, \dots, s_\alpha^{n+1})) \mapsto s_\alpha^2 e_2^\alpha(e) + \dots + s_\alpha^{n+1} e_{n+1}^\alpha(e)$$

gegeben sind.

Für jedes Indexpaar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ist nämlich

$$\delta_\beta^{-1} \circ \delta_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times S_0^{n-1} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times S_0^{n-1}$$

differenzierbarer Kartenwechsel mit der Darstellung

$$s_{\beta}^i = \sum_{j=2}^{n+1} c_{\beta}^{\alpha}(e)_j^i s_{\alpha}^j, \quad i=2, \dots, n+1, \text{ wobei gilt:}$$

$$e_i^{\alpha}(e) = \sum_{j=2}^{n+1} c_{\beta}^{\alpha}(e)_i^j e_j^{\beta}(e), \quad i=2, \dots, n+1.$$

$\delta_{\beta}^{-1} \circ \delta_{\alpha}$ ist Isometrie des 2-ten Faktors.

Für jedes Indextripel $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \times A \times A$ mit $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma} \neq \emptyset$ gilt in $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$: $(\delta_{\gamma}^{-1} \circ \delta_{\beta}) \circ (\delta_{\beta}^{-1} \circ \delta_{\alpha}) = \delta_{\gamma}^{-1} \circ \delta_{\alpha}$.

Dadurch ist das Sphärenbündel SN über N mit Projektion $\psi: SN \rightarrow N$ definiert, denn das lokal triviale Bündel $\{U_{\alpha} \times S_{\mathbb{O}}^{n-1}\}_{\alpha \in A}$ fügt sich zu dem globalen Bündel SN zusammen. *)

Bezeichnet für jedes $\alpha \in A$

$$(4.1) \quad t_{\alpha}: U_{\alpha} \times S_{\mathbb{O}}^{n-1} \rightarrow S^n \quad \text{die durch} \\ (e, (s_{\alpha}^2, \dots, s_{\alpha}^{n+1})) \mapsto s_{\alpha}^2 e_{\alpha}^2(e) + \dots + s_{\alpha}^{n+1} e_{\alpha}^{n+1}(e)$$

definierte, differenzierbare Abbildung, welche für jedes $e \in U_{\alpha}$ eine Isometrie des 2-ten Faktors ist, dann fügt sich $\{t_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ zu einer globalen differenzierbaren Abbildung $t: SN \rightarrow S^n$ zusammen, welche fasernweise eine Einbettung ist.

Nach Konstruktion ist für beliebiges $e \in N$

$n(e) \perp t(SN_e)$, daher ist $t(SN_e)$ diejenige totalgeodätische $S^{n-1} \subset S^n$, die $f(M)$ in $f(\pi(e))$ senkrecht zu $n(e)$ berührt.

SN ist $2(n-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit (über \bar{N} nur C^1 -, sonst C^{∞} -differenzierbar).

(4.2) $S\bar{N} := \psi^{-1}(\bar{N})$ ist $(2n-3)$ dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von SN (vgl. (2.1)).

Für spätere Integration benötigen wir eine Volumenform auf $SN \setminus S\bar{N}$; diese erhalten wir längs den Fasern aus der gewöhnlichen Volumenform der durch t eingebetteten $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und mittels der ausgezeichneten Volumenform μ auf der Basis $N \setminus \bar{N}$ (vgl. (2.5)).

Für $x \in SN \setminus S\bar{N}$, $A_1, \dots, A_{n-1} \in T_{t(x)}(t(SN_{\psi(x)}))$ ist

*) vgl. [4], S.94

σ durch

$$(4.3) \quad \sigma(A_1, \dots, A_{n-1}) := |\mathbf{n}(\psi(x)), t(x), A_1, \dots, A_{n-1}|$$

gegeben, womit dann $t(SN_{\psi(x)})$ orientiert ist.

Damit erhalten wir die gewünschte Volumenform $\mu\sigma$ auf $SN \setminus S\bar{N}$ für $x \in SN \setminus S\bar{N}$ und $Z_1, \dots, Z_{2(n-1)} \in T_x SN$ durch

$$(4.4) \quad \mu\sigma(Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}) := \frac{1}{((n-1)!)^2} \sum \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 2(n-1) \\ i_1 & \dots & i_{2(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \mu(\psi_*(Z_{i_1}), \dots, \psi_*(Z_{i_{n-1}})) \cdot \sigma(t_*^\perp(Z_{i_n}), \dots, t_*^\perp(Z_{i_{2(n-1)}}))$$

(\perp ist dabei die nachfolgende orthogonale Projektion auf $T_{t(x)}(t(SN_{\psi(x)}))$ im \mathbb{R}^{n+1}).

Für spätere Rechnungen wählen wir wieder eine spezielle Karte einer Umgebung von x in $SN \setminus S\bar{N}$:

Entsprechend (4.4) wählen wir $Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}$ der Reihe nach in $\text{Ker } t_*^\perp$ und $\text{Ker } \psi_*$. Dies liefert eine Basis, denn $\dim \text{Ker } \psi_* = n-1 = \dim \text{Ker } t_*^\perp$ und $\text{Ker } t_*^\perp \cap \text{Ker } \psi_* = 0$, da für $X \in \text{Ker } \psi_*$ gilt: X ist tangential zur Faser, also $t_*^\perp(X) = t_*(X)$ und da t Fasern einbettet ist $t_*^\perp(X) = 0$ genau für $X = 0$. Da die Kerne 0-dimensionalen Schnitt haben können wir in den einzelnen Teilen die Basis dann so bestimmen, daß gilt:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} t_*^\perp(Z_1) &= 0, \dots, t_*^\perp(Z_{n-1}) = 0 \quad \text{und} \\ \psi_*(Z_1) &=: Y_1, \dots, \psi_*(Z_{n-1}) =: Y_{n-1} \quad \text{wie in (2.5) sowie} \\ \psi_*(Z_n) &= 0, \dots, \psi_*(Z_{2(n-1)}) = 0 \quad \text{und} \\ \sigma(t_*^\perp(Z_n), \dots, t_*^\perp(Z_{2(n-1)})) &= 1. \end{aligned}$$

Aus (4.4) ergibt sich jetzt $\mu\sigma(Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}) = 1$, daher ist $\mu\sigma$ nicht die Nullform und $SN \setminus S\bar{N}$ ist damit orientiert.

(4.6) $\xi^1, \dots, \xi^{2(n-1)}$ seien schließlich Koordinaten einer solchen Bündelkarte einer Umgebung von x in $SN \setminus S\bar{N}$, daß in x die $\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{2(n-1)}}$ den $Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}$ entsprechen.

x selbst habe dabei verschwindende Koordinaten.

Um den Zusammenhang zwischen Höhenfunktionen und ihren

kritischen Punkten zu studieren, machen wir die

DEFINITION 4.1. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann ist eine Abbildung $\nu: SN \rightarrow \tilde{G}(2, n+1)$ durch

$$x \mapsto [n(\psi(x)), t(x)] \text{ definiert;}$$

der Großkreis $[n(\psi(x)), t(x)] \cap S^n$ werde in positivem Sinn durchlaufen.

Bezeichnet $SN^+ := \{x \in SN \mid \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle > 0\} \subset SN$, dann beschreibt $\nu|_{SN^+}$ den Zusammenhang zwischen den Höhenfunktionen und ihren kritischen Punkten:

SATZ 4.1. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann gelten:

- (i) Zu jedem kritischen Punkt p von $h_s \circ f$, $s \in \tilde{G}(2, n+1)$ gibt es genau ein $x \in SN^+$ mit $\pi(\psi(x)) = p$ und $\nu(x) = s$.
- (ii) Für jedes $x \in SN^+$ ist $\pi(\psi(x)) =: p$ kritischer Punkt von $h_s \circ f$, $s := \nu(x)$.

Beweis:

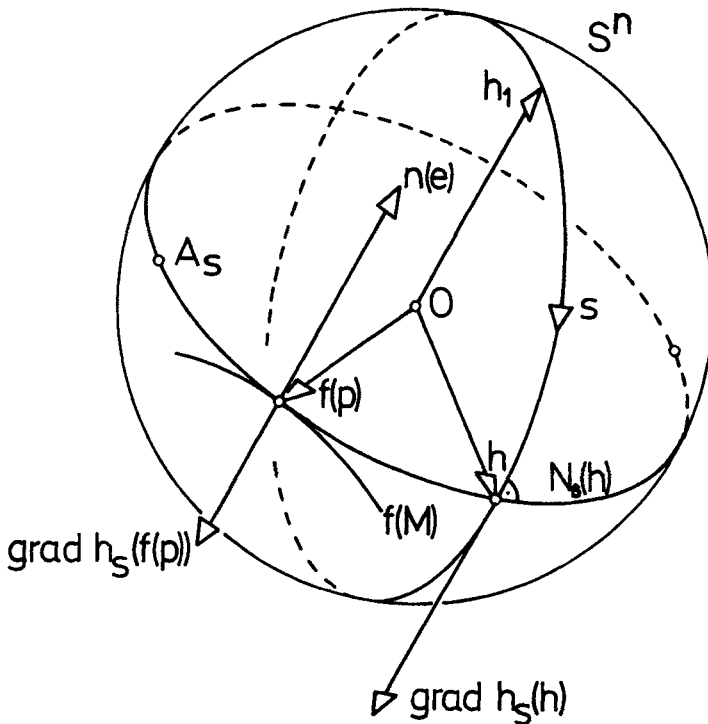
zu(i): p sei kritischer Punkt von $h_s \circ f$ mit kritischer Höhe $h := h_s(f(p))$ und berührender Niveauläche $N_s(h)$. Es existiert ein eindeutiges $h_1 \in S^n$ so, daß $[h_1, h] \cap S^n$ die Höhenmeßplatte von s darstellt.

Wir betrachten das Gradientenfeld $\text{grad } h_s$ längs $N_s(h)$. $\text{grad } h_s(h)$ ist negatives Vielfaches von h_1 und dies gilt auch in $f(p)$ für $\text{grad } h_s(f(p))$. Da $N_s(h)$ $f(M)$ in $f(p)$ berührt, existiert für $p \in \overset{\circ}{M}$ $e \in N_p$ eindeutig mit $n(e) = h_1$. Für $p \in \partial M$ gilt $\langle \text{grad } h_s(f(p)), C_p M \rangle \geq 0$, weil p nicht $(-)$ -kritisch ist (vgl. 1.C.), also ist $\langle h_1, C_p M \rangle \leq 0$; damit ist h_1 äußere Normale und es existiert auch hier $e \in N_p$ eindeutig mit $n(e) = h_1$.

Nach Konstruktion von t existiert weiter $x \in SN_e^+$ eindeutig mit $t(x) = h$.

Damit gilt (i), denn es ist $\pi(\psi(x)) = p$ und $\nu(x) = [h_1, h] = s$.

(ii) folgt direkt durch Umkehrung obiger Schlüsse.



□

Bezeichnet $AS(f)_1 := \{s \in \tilde{G}(2, n+1) \mid h_s \circ f \notin \mathfrak{z}(M \setminus f^{-1}(A_s))\}$ (vgl. (1.1)), dann ist nach Satz 4.1 für jedes $s \in \tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f)_1$ die Anzahl Urbilder $v^{-1}(s) \cap SN^+$ gerade die Anzahl kritischer Punkte von $h_s \circ f$.

Das Verhalten dieser Anzahl in Abhängigkeit von s ergibt sich mit folgender Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.

Es bezeichne $AS(f)_2 := v(S\bar{N})$.

HILFSSATZ 4.1. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann gilt für jedes $s \in \tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f)_2$:
Ist $p \in M$ nicht-degenerierter kritischer Punkt von $h_s \circ f$

vom Index k , dann gibt es Umgebungen U von p in \mathring{M} für $p \in \mathring{M}$ bzw. in ∂M für $p \in \partial M, V$ von s in $\tilde{G}(2, n+1)$ so, daß für alle $s' \in V$ $h_{s'} \circ f$ in U genau einen kritischen Punkt besitzt und dieser ist nicht-degeneriert vom Index k .

Beweis: Im kartesischen Produkt $U \times V$ zweier Kartenumgebungen U von p in \mathring{M} bzw. in ∂M und V von s in $\tilde{G}(2, n+1)$ betrachten wir den Gradienten von $h_{s'} \circ f$ in seiner differenzierbaren Abhängigkeit (vgl. Definition 3.2) von den m bzw. $m-1$ Koordinaten von \mathring{M} bzw. ∂M und von den $2(n-1)$ Koordinaten von $\tilde{G}(2, n+1)$. Dabei seien U und V bereits so eingeschränkt, daß U für alle $s' \in V$ im Definitionsbereich von $h_{s'} \circ f$ liegt. In (p, s) selbst verschwindet der Gradient. Die Matrix der partiellen Ableitungen des Gradienten nach den Koordinaten von \mathring{M} bzw. ∂M ist gerade die Hessematrix von $h_{s'} \circ f$ und in p daher regulär, da p nicht-degeneriert ist.

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert, evtl. nach Einschränkung der Umgebungen eine differenzierbare Funktion $\rho: V \rightarrow U$ wobei für alle $s' \in V$ der Gradient von $h_{s'} \circ f$ in U genau im Punkt $\rho(s')$ verschwindet.

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte der Hessematrix *) erreichen wir durch erneutes Einschränken der Umgebungen, daß die Punkte $\rho(s')$ nicht-degeneriert und vom Index k sind sowie im Falle $p \in \partial M$ nicht (-)-kritisch werden, da p nicht (-)-kritisch und $s \notin AS(f)_2$ ist. \square

Wir setzen $AS(f)_3 := \{s \in \tilde{G}(2, n+1) \mid \text{es gibt mindestens eine erweiterte Niveauläche } \bar{N}_s(h), \text{ die } f(\mathring{M}) \text{ oder } f(\partial M) \text{ in einem Punkt aus } f(M) \cap A_s \text{ berührt}\}.$

(Bemerkung zu Definition 3.2 (ii): Für $M \setminus f^{-1}(A_s) = \emptyset$ ist $s \in AS(f)_3$, da jede erweiterte Niveauläche von $s \in A_s$ und somit $f(M)$ enthält.)

Weiter bezeichne $AS(f) := AS(f)_1 \cup AS(f)_2 \cup AS(f)_3$, dann folgt mit Hilfssatz 4.1:

*) vgl. [12], S.120

HILFSSATZ 4.2. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, M kompakt, dann gilt:
Die Funktionen β (vgl. (1.2)): $\tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f) \rightarrow Z \cup \{\pm \infty\}$
haben endliche Werte und sind lokal konstant.

Beweis: Für ein beliebiges $s \in \tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f)$ zeigen wir zunächst, daß $h_s \circ f|_{\overset{\circ}{M} \setminus f^{-1}(A_s)}$ nur endlich viele kritische Punkte besitzt.

Durch indirekten Beweis erhalten wir die Existenz einer offenen Umgebung U von $f^{-1}(A_s) \cup \partial M$ in M , so daß in U keine kritischen Punkte von $h_s \circ f|_{\overset{\circ}{M} \setminus f^{-1}(A_s)}$ liegen: Denn andernfalls gäbe es eine gegen $f^{-1}(A_s) \cup \partial M$ konvergierende Folge $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, wobei jedes U_i einen kritischen Punkt $p_i \in \overset{\circ}{M}$ der betrachteten Funktion enthält. Die Höhe von p_i sei h_i und $\bar{N}_s(h_i)$ berühre $f(M)$ in $f(p_i)$ senkrecht zu $n(e_i)$, $e_i \in \bar{N}_{p_i}$. Wegen der Kompaktheit von N und der Höhenmeßplatte seien diese Folgen o.B.d.A. konvergent, also $e_i \rightarrow e$, $\pi(e_i) = p_i \rightarrow \pi(e) =: p \in f^{-1}(A_s) \cup \partial M$ und $h_i \rightarrow h$. Wegen der stetigen Abhängigkeit der erweiterten Niveauflächen von der Höhe, berührt $\bar{N}_s(h)$ $f(M)$ in $f(p)$ senkrecht zu $n(e)$. Dies wäre ein Widerspruch zu $s \in AS(f)$, denn für $p \in f^{-1}(A_s)$ wäre $s \in AS(f)_3$ und für $p \in \partial M$ wäre wegen $e \in \bar{N}_p$ $s \in AS(f)_2$.

Es existiert also eine solche offene Umgebung U , und alle kritischen Punkte von $h_s \circ f|_{\overset{\circ}{M} \setminus f^{-1}(A_s)}$ liegen in der kompakten Menge $M \setminus U$; sie sind im übrigen wegen $s \notin AS(f)_1$ nicht-degeneriert, also isoliert, und insgesamt ist daher ihre Anzahl endlich.

Dieselbe Argumentation auf dem Rand ∂M liefert die endliche Anzahl kritischer Punkte von $h_s \circ f$ auf $\partial M \setminus f^{-1}(A_s)$ und damit die Endlichkeit der Werte der Funktionen β .

Zum Beweis der lokalen Konstanz betrachten wir zu den endlich vielen kritischen Punkten von $h_s \circ f|_{\overset{\circ}{M} \setminus f^{-1}(A_s)}$ (o.B.d.A. disjunkte) Umgebungen, die nach Hilfssatz 4.1 zu einer (o.B.d.A. gemeinsamen) Umgebung V von s in $\tilde{G}(2, n+1)$ gehören. Das Komplement W dieser Umgebungen in $\overset{\circ}{M}$ enthält

nach Konstruktion keinen kritischen Punkt von $h_s \circ f|_{M \setminus f^{-1}(A_s)}$ und auch keinen von $h_{s'} \circ f|_{M \setminus f^{-1}(A_{s'})}$ für alle $s' \in V$ nach evtl. Einschränkung von V : Sonst hätte man eine Folge $s_i \rightarrow s$ mit zugehörigen kritischen Punkten $p_i \in W$ mit Höhe h_i und $f(M)$ in $f(p_i)$ senkrecht $n(e_i), e_i \in N_{p_i}$, berührende $\bar{N}_{s_i}(h_i)$. Wegen der Kompaktheit von N und S^n seien diese Folgen o.B.d.A. konvergent, also $e_i \rightarrow e, \pi(e_i) = p_i \rightarrow \pi(e) =: p, h_i \rightarrow h$ und $\bar{N}_s(h)$ berührt dann $f(M)$ in $f(p)$ senkrecht zu $n(e)$. Die kritischen Punkte von $h_s \circ f|_{M \setminus f^{-1}(A_s)}$ liegen ^(desh) in obigen Umgebungen, also wäre $p \in f^{-1}(A_s) \cup \partial M$ und dies ist im Widerspruch zu $s \notin AS(f)$ (vgl. 1-ter Teil des Beweises).

Für alle $s' \in V$ liegen somit alle kritischen Punkte von $h_{s'} \circ f|_{M \setminus f^{-1}(A_{s'})}$ in den Umgebungen nach Hilfssatz 4.1 und daher sind die Funktionen β_k° lokal konstant.

Die gleiche Argumentation gilt für β_k° und daher sind alle Funktionen β lokal konstant. \square

Die Abbildung ν (vgl. Definition 4.1) wird uns -ähnlich wie die Gaußsche Normalenabbildung im Falle von Immersionen in \mathbb{R}^n - ermöglichen, durch Substitution in den Integralen $tk(f)$ bzw. $tak(f)$ die Gleichheit mit $TK(f)$ bzw. $TAK(f)$ zu beweisen. Wir berechnen daher die Volumenverzerrung von ν :

SATZ 4.2. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, dann ist ν in $S\bar{N}$ nur C^1 -sonst C^∞ -differenzierbar und für die Volumenverzerrung in $x \in SN \setminus S\bar{N}$ gilt:

$$\nu^* \eta = \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle \cdot |G(\psi(x))| \mu_\sigma$$

bzw. für die Beträge:

$$|\nu^* \eta| = |\langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle| \cdot |G(\psi(x))| \mu_\sigma$$

(vgl. (3.3), (2.7), (4.4)).

Beweis: Für ein festes $x_0 \in SN$ sei

(4.7) $\{n(\psi(x_0)), t(x_0), e_3, \dots, e_{n+1}\}$ eine positiv orien-

tierte ON-Basis des \mathbb{R}^{n+1} .

Wir wählen eine Karte einer Umgebung von $\nu(x_0)$ in $\tilde{G}(2, n+1)$ gemäß (3.1) mit der Basis (4.7) sowie eine Bündelkarte x einer Umgebung von x_0 in SN gemäß (4.6).

In diesen Karten bestimmen wir die explizite Darstellung von ν .

In einer Umgebung von $0 = x(x_0)$ wird $\nu(x^{-1}(\xi))$ durch das Vektorpaar $\{n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x^{-1}(\xi))\}$ bestimmt.

Um die Koordinaten von $\nu(x^{-1}(\xi))$ zu bekommen, berechnen wir das dazu äquivalente Vektorpaar, dessen erste beiden Komponenten wechselseitig 1 und 0 sind. Dies geschieht durch lineares kombinieren und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 u^{1i}(\xi) &= \frac{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), e_i \rangle - \langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), n(\psi(x_0)) \rangle}{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x_0) \rangle} \cdot \langle t(x^{-1}(\xi)), e_i \rangle \\
 &\quad - \frac{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x_0) \rangle}{\langle t(x^{-1}(\xi)), t(x_0) \rangle} \cdot \langle t(x^{-1}(\xi)), n(\psi(x_0)) \rangle \\
 &\quad \dots \\
 &\quad - \frac{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x_0) \rangle}{\langle t(x^{-1}(\xi)), t(x_0) \rangle} \cdot \langle t(x^{-1}(\xi)), n(\psi(x_0)) \rangle \\
 (4.8) \quad u^{2i}(\xi) &= \frac{\langle t(x^{-1}(\xi)), e_i \rangle - \langle t(x^{-1}(\xi)), n(\psi(x_0)) \rangle}{\langle t(x^{-1}(\xi)), t(x_0) \rangle} \cdot \langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), e_i \rangle \\
 &\quad - \frac{\langle t(x^{-1}(\xi)), n(\psi(x_0)) \rangle}{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), n(\psi(x_0)) \rangle} \cdot \langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x_0) \rangle \\
 &\quad \dots \\
 &\quad - \frac{\langle t(x^{-1}(\xi)), n(\psi(x_0)) \rangle}{\langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), n(\psi(x_0)) \rangle} \cdot \langle n(\psi(x^{-1}(\xi))), t(x_0) \rangle
 \end{aligned}$$

für jeweils $i = 3, \dots, n+1$

Aus dieser lokalen Darstellung ergibt sich zunächst die Behauptung über die Differenzierbarkeit von ν .

Für die Berechnung der Volumenverzerrung sei nun speziell $x_0 \in SN \setminus \bar{SN}$:

Wir berechnen mit (4.6) $\mu\sigma(Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}) = 1$ und mit (3.3) $\nu^* \eta(Z_1, \dots, Z_{2(n-1)}) = \eta(\nu_*(Z_1), \dots, \nu_*(Z_{2(n-1)})) =$

$$= \frac{\delta(u^{1i}, u^{2i})}{\delta(\xi^1, \dots, \xi^{2(n-1)})} \cdot \eta\left(\frac{\delta}{\delta u^{13}}, \dots, \frac{\delta}{\delta u^{2(n-1)}}\right) =$$

$$= \frac{\delta(u^{1i}, u^{2i})}{\delta(\xi^1, \dots, \xi^{2(n-1)})}, \quad i = 3, \dots, n+1.$$

Es genügt also, die Funktionaldeterminante von (4.8) im Punkte $\xi = 0$ zu bestimmen. Dies tun wir in zwei Schritten.

Zunächst sei $\xi = (0, \dots, 0, \xi^n, \dots, \xi^{2(n-1)})$, wir variieren also nur die letzten $(n-1)$ Koordinaten. Wegen der Bündeleigenschaft der Karte (vgl. (4.6)) ist $n(\psi(x^{-1}(\xi))) = n(\psi(x_0))$ und daher vereinfacht sich (4.8) zu

$$u^{1i}(\xi) = 0$$

$$u^{2i}(\xi) = \frac{\langle t(x^{-1}(\xi)), e_i \rangle}{\langle t(x^{-1}(\xi)), t(x_0) \rangle} \quad i=3, \dots, n+1$$

Dann sind die partiellen Ableitungen nach den letzten $(n-1)$ Koordinaten in O :

$$\frac{\partial u^{1i}}{\partial \xi^1}(0) = 0 \quad i=3, \dots, n+1$$

$$\frac{\partial u^{2i}}{\partial \xi^1}(0) = \left\langle \frac{\partial(t \circ x^{-1})}{\partial \xi^1}(0), e_i \right\rangle \quad i=n, \dots, 2(n-1)$$

Aus den ersten Gleichungen folgt, daß im oberen rechten $(n-1) \times (n-1)$ -Kasten der Funktionalmatrix in O die Nullmatrix steht.

Die letzten Gleichungen können auch in der Form

$$\frac{\partial u^{2i}}{\partial \xi^1}(0) = \langle t_*(Z_1), e_i \rangle = \langle t_*^\perp(Z_1), e_i \rangle \quad (i=3, \dots, n+1; l=n, \dots,$$

$\dots, 2(n-1))$ geschrieben werden und mit (4.7) ist dann die Determinante des unteren rechten $(n-1) \times (n-1)$ -Kastens der Funktionalmatrix in O gleich

$$|n(\psi(x_0)), t(x_0), t_*^\perp(Z_n), \dots, t_*^\perp(Z_{2(n-1)})| \quad \text{und damit}$$

gleich +1 nach (4.5) und (4.3).

Im zweiten Schritt genügt es demnach, die Determinante des oberen linken $(n-1) \times (n-1)$ -Kastens der Funktionalmatrix in 0 zu berechnen.

Dazu sei $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-1}, 0, \dots, 0)$, wir variieren also nur die ersten $(n-1)$ Koordinaten.

Für die interessierenden partiellen Ableitungen von (4.8) erhalten wir mit (4.7)

$$\frac{\partial u^{li}}{\partial \xi^l}(0) = \left\langle \frac{\partial (n \circ \psi \circ x^{-1})}{\partial \xi^l}(0), e_i \right\rangle \quad \begin{array}{l} i=3, \dots, n+1 \\ l=1, \dots, n-1 \end{array}$$

und nach (4.5) weiter

$$\frac{\partial u^{li}}{\partial \xi^l}(0) = \langle n_*(Y_1), e_i \rangle \quad \begin{array}{l} i=3, \dots, n+1 \\ l=1, \dots, n-1 \end{array}$$

Mit (4.7) ist daher die Determinante dieses Kastens und damit die Volumenverzerrung gleich

$$|n(\psi(x_0)), t(x_0), n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1})|,$$

und dies ist weiter gleich

$$(4.9) \quad \langle f(\pi(\psi(x_0))), t(x_0) \rangle \cdot |n(\psi(x_0)), f(\pi(\psi(x_0))), n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1})|,$$

denn für $\dim[n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1})] < n-1$ verschwinden beide Ausdrücke und für $\dim[n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1})] = n-1$ folgt dies aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} & | \{ n(\psi(x_0)), t(x_0), n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1}) \} \cdot \{ n(\psi(x_0)), \\ & f(\pi(\psi(x_0))), n_*(Y_1), \dots, n_*(Y_{n-1}) \} | = \langle f(\pi(\psi(x_0))), t(x_0) \rangle \cdot \\ & \cdot | \langle n_*(Y_i), n_*(Y_j) \rangle | \quad (i, j=1, \dots, n-1) = \\ & \langle f(\pi(\psi(x_0))), t(x_0) \rangle \cdot | n(\psi(x_0)), f(\pi(\psi(x_0))), n_*(Y_1), \dots \\ & \dots, n_*(Y_{n-1}) |^2 \quad *) \quad , \text{ die wegen der Identität } \langle f \circ \pi, n \rangle = 0 \\ & \text{ auf } N \text{ und daraus folgend } \langle f(\pi(e)), n_*(T_e N) \rangle = 0 \text{ für alle} \\ & e \in N, \text{ gelten.} \end{aligned}$$

Nun sei $\pi(\psi(x_0)) \in \overset{\circ}{M}$ (für $\pi(\psi(x_0)) \in \partial M$ gilt die analoge Argumentation).

Es gibt in einer gewissen Umgebung von $\pi(\psi(x_0))$ ein Ein-

*) $\{ \} \cdot \{ \}$ ist die Matrizenmultiplikation bzgl. \langle , \rangle

heitsnormalenfeld γ durch $\psi(x_0)$ mit

$$\gamma_*(\pi_*(Y_1)) = Y_1, \dots, \gamma_*(\pi_*(Y_m)) = Y_m.$$

Dies setzen wir in (4.9) ein und erhalten

$$(4.10) \quad \langle f(\pi(\psi(x_0))), t(x_0) \rangle \cdot |n(\psi(x_0)), f(\pi(\psi(x_0))), (n \circ \gamma)_*(\pi_*(Y_1)), \dots, (n \circ \gamma)_*(\pi_*(Y_m)), n_*(Y_{m+1}), \dots, n_*(Y_{n-1})|.$$

Nun ist nach (2.5) $\{n(\psi(x_0)), f(\pi(\psi(x_0))), f_*(\pi_*(Y_1)), \dots, f_*(\pi_*(Y_m)), n_*(Y_{m+1}), \dots, n_*(Y_{n-1})\}$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^{n+1} , die nach (2.4) positiv orientiert ist.

Die Determinante in (4.10) ist also gerade die Lipschitz-Killing-Krümmung $G(\psi(x_0))$ (vgl. (2.7)).

Daher ist (4.10) und damit die Volumenverzerrung von ν gleich

$$(4.11) \quad \langle f(\pi(\psi(x_0))), t(x_0) \rangle \cdot G(\psi(x_0))$$

und dies ist die erste Formel des Satzes.

Die zweite folgt aus der ersten. \square

SATZ 4.3. Es sei $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, $x \in SN^+$, $\nu(x) =: s \notin \mathbb{A}S(f)_2 \cup \mathbb{A}S(f)_3$ und $e := \psi(x)$, $p := \pi(\psi(x))$, dann ist

(i) $\text{hess}(h_S \circ f)(p) = \lambda \cdot S(e)$, $\lambda > 0$, d.h. der Zweite Fundamentaltensor ist positiv proportional zum Hessesetensor

(ii) für $G(e) \neq 0$: $\text{sign } G(e) = (-1)^{\text{Index}(h_S \circ f)(p)}$

(vgl. Satz 4.1 (ii)).

Beweis: Sei $p \in \mathring{M}$ (für $p \in \partial M$ gilt die analoge Argumentation). Wegen der Beschränkung von s ist $p \notin f^{-1}(A_S)$ und $e \notin \bar{N}$.

Für die Gradienten von $h_S \circ f$ bzw. h_S gilt in beliebigem

Punkt $q \in \mathring{M} \setminus f^{-1}(A_S)$ bzw. $f(q)$ für alle $X \in T_q M$:

$$\langle X, \text{grad}(h_S \circ f)(q) \rangle = \langle f_*(X), f_*(\text{grad}(h_S \circ f)(q)) \rangle = \langle f_*(X), \text{grad } h_S(f(q)) \rangle, \text{ also}$$

$f_*(\text{grad}(h_S \circ f)(q)) = \text{grad } h_S(f(q))^\perp = \text{grad } h_S(f(q)) + v(f(q))$, wobei $^\perp$ die orthogonale Projektion auf $f_*(TM)$ in TS^n bedeutet und v der negative Normalanteil von

grad h_s bzgl. $f_*(TM)$ ist.

Damit berechnen wir in p für $X \in T_p M$:

$$\begin{aligned} \text{hess}(h_s \circ f)(p) &= \overset{\circ}{\nabla}_X \text{grad}(h_s \circ f)(p) = \\ f^* \left(\left(\overset{\circ}{\nabla}_{f_*(X)} f_*(\text{grad}(h_s \circ f))(f(p)) \right)^\perp \right) &= \\ = f^* \left(\left(\overset{\circ}{\nabla}_{f_*(X)} \text{grad } h_s(f(p)) \right)^\perp + f^* \left(\left(\overset{\circ}{\nabla}_{f_*(X)} v(f(p)) \right)^\perp \right) \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1 (ii) ist p kritisch, $f_*(X)$ berührt also die kritische Niveaufläche und damit verschwindet der erste Summand bei der orthogonalen Projektion, da $\text{grad } h_s$ und damit $\overset{\circ}{\nabla} \text{grad } h_s$ immer senkrecht zu den Niveauflächen sind. Weiter ist $f_*(\text{grad}(h_s \circ f)(p)) = 0$, also $v(f(p)) = -\text{grad } h_s(f(p)) = \lambda \cdot n(e)$, $\lambda > 0$ (vgl. Beweis zu Satz 4.1); der zweite Summand ist daher $\lambda \cdot S(e)(X)$. Damit gilt (i), (ii) ist direkte Folge von (i). \square

HILFSSATZ 4.3. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, M kompakt, dann hat die Menge $AS(f)$ das Maß 0 in $\tilde{G}(2, n+1)$.

Beweis: Wegen $AS(f)_2 = v(S\bar{N})$ und $AS(f)_3 = v(\{x \in SN \mid \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle = 0\})$ haben beide Mengen Maß 0, denn v ist differenzierbar, $\dim SN = \dim \tilde{G}(2, n+1)$ und $\dim S\bar{N} < \dim SN$, $\dim\{x \in SN \mid \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle = 0\} < \dim SN$.

Weiter ist $AS(f)_1 \setminus \{AS(f)_2 \cup AS(f)_3\}$ in der Menge der kritischen Werte von v enthalten, denn der jeweils existierende kritische Punkt jener Höhenfunktionen impliziert mit Satz 4.3 (i) und Satz 4.2 die Degeneriertheit von v in dem nach Satz 4.1 dazugehörigen Punkt $x \in SN^+$.

Nach dem Satz von SARD^{*}) haben die kritischen Werte von v Maß 0 in $\tilde{G}(2, n+1)$. \square

Jetzt sind wir in der Lage, durch Substitution mittels $v|_{SN^+}$ Folgendes zu beweisen:

^{*}) vgl. [8], S. 69; [2], S. 58

SATZ 4.4. Ist $f: M \rightarrow S^n$ Immersion, M kompakt, dann existieren $TK(f)$ und $TAK(f)$ und es gilt:

$$tk(f) = TK(f) \quad \text{und} \quad tak(f) = TAK(f).$$

Beweis: Mit $K := \{x \in SN^+ \setminus S\bar{N} \mid G(\psi(x)) = 0\}$ ist

$$(4.12) \quad SN^+ = (SN^+ \setminus \nu^{-1}(AS(f))) \cup ((\nu^{-1}(AS(f)) \setminus K) \cap SN^+) \cup K.$$

Die mittlere Menge hat wegen Hilfssatz 4.3 das Maß 0, denn entweder liegen ihre Punkte in $S\bar{N}$ oder ν ist auf $(SN^+ \setminus (S\bar{N} \cup K)) \cap \nu^{-1}(AS(f))$ nach Satz 4.2 regulär.

Für die folgende Rechnung wird die erste Menge mit $\tilde{S\bar{N}}$ bezeichnet.

Nach Satz 4.2 gilt dann, falls das Integral der linken Seite existiert:

$$(4.13) \quad \int_{\tilde{S\bar{N}}} \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle \cdot G(\psi(x)) \mu \sigma = \int_{\tilde{S\bar{N}}} \nu^* \eta \quad .$$

Wir betrachten zunächst die linke Seite:

Da der Integrand auf K verschwindet und die mittlere Menge von (4.12) Maß 0 hat ist dieses Integral gleich

$$\int_{SN^+} \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle \cdot G(\psi(x)) \mu \sigma \quad .$$

Wir integrieren mit dem Satz von Fubini zuerst über die Fasern und dann über N und erhalten

$$\int_N G(e) \left(\int_{\psi^{-1}(e) \cap SN^+} \langle f(\pi(\psi(x))), t(x) \rangle \sigma \right) \mu \quad .$$

Das innere Integral ist unabhängig von $\psi(x) = e$ das Volumen $|S^{n-2}|/(n-1)$ der $(n-1)$ dimensionalen Einheitsvollkugel. Die linke Seite von (4.13) ist also mit Definition 2.1 insgesamt

$$(4.14) \quad \frac{|S^{n-1}| \cdot |S^{n-2}|}{n-1} \quad tk(f)$$

und existiert hiermit nach Satz 2.1.

Jetzt betrachten wir das rechte Integral in (4.13):

Für $r = (r_0, r_1, \dots, r_m) \in N_0 \times \dots \times N_0$ setzen wir

$W_r := \{s \in \tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f) \mid \beta_0(h_s \circ f) = r_0, \dots, \beta_m(h_s \circ f) = r_m\}$.

Die Menge $R := N_0 \times \dots \times N_0$ ($(m+1)$ Faktoren) ist abzählbar, sie sei abzählbar angeordnet.

Nach Hilfssatz 4.2 ist $\{W_r\}_{r \in R}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{G}(2, n+1) \setminus AS(f)$ mit paarweise disjunkten Mengen.

Weiter sei $U_r := (\nu|_{\tilde{SN}})^{-1}(W_r)$.

$\{U_r\}_{r \in R}$ ist eine offene Überdeckung von \tilde{SN} mit paarweise disjunkten Mengen.

Für $r \in R$ bezeichne U_r^+ bzw. U_r^- jene offenen Teile von U_r , auf denen ν orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend ist (vgl. Satz 4.2).

Mit (4.14) existiert auch das Integral der rechten Seite von (4.13) und ist nach dem Satz von B. Levi ^{*} gleich

$$(4.15) \quad \sum_{r \in R} \left(\int_{U_r^+} \nu^* \eta + \int_{U_r^-} \nu^* \eta \right).$$

Mit Satz 4.3 haben die kritischen Punkte von $h_{\nu(x)} \circ f$, die zu $x \in U_r^+$ gehören geraden Index und jene, die zu U_r^- gehören ungeraden Index.

Mit Satz 4.1 ist demnach $\nu|_{U_r^+}$ Überlagerung von W_r mit derjenigen Anzahl Blätter wie kritische Punkte von $h_{\nu(x)} \circ f$ von geradem Index vorhanden sind und $\nu|_{U_r^-}$ ist Überlagerung von W_r mit derjenigen Anzahl Blätter wie kritische Punkte von $h_{\nu(x)} \circ f$ von ungeradem Index vorhanden sind ^{**}).

Daher erhalten wir aus (4.15) durch Substitution

$$(4.16) \quad \sum_{r \in R} \int_{W_r} \tilde{\beta}(h_s \circ f) \eta \quad (, \text{vgl. Definition von } \tilde{\beta} \text{ in (1.2)}).$$

Die gleiche Argumentation unter Verwendung der Be-

^{*}) vgl. [11], S. 204

^{**}) Es ist möglich, daß U_r^+ oder U_r^- für gewisse $r \in R$ die leere Menge ist; dann sprechen wir formal auch von einer Überlagerung $\nu|_{U_r^+}$ oder $\nu|_{U_r^-}$. Die Blätterzahl ist dann 0.

tragsmaße des Satzes 4.2 liefert an Stelle von (4.14)

$$\frac{|S^{n-1}| \cdot |S^{n-2}|}{n-1} \text{tak}(f) \quad \text{und an Stelle von (4.16)}$$

$$(4.17) \quad \sum_{r \in \mathbb{R}} \int_{W_r} \beta(h_S \circ f) \eta .$$

Nach Definition der W_r sind die Integranden in (4.17) positiv konstant; damit erhalten wir mit dem Satz von B. Levi aus (4.17) unter Beachtung von Hilfssatz 4.3

$$\int \beta(h_S \circ f) \eta = |\tilde{G}(2, n+1)| \cdot \text{TAK}(f) \quad (\text{vgl. Def. 3.3}).$$

$$\tilde{G}(2, n+1)$$

Nach Satz 2.1 existiert $\text{tak}(f)$ und ist endlich, nach dem Bisherigen ist also auch $\text{TAK}(f)$ endlich, die Reihe (4.17) also endlich konvergent. (4.17) ist wegen $|\tilde{\beta}| \leq \beta$ konvergente Majorante von (4.16), daher ist (4.16) konvergent und mit dem Satz von B. Levi gleich

$$\int \tilde{\beta}(h_S \circ f) \eta = |\tilde{G}(2, n+1)| \cdot \text{TK}(f) \quad (\text{vgl. Def. 3.3}).$$

$$\tilde{G}(2, n+1)$$

Insgesamt gilt also mit (4.13)

$$\text{tk}(f) = \frac{(n-1) \cdot |\tilde{G}(2, n+1)|}{|S^{n-1}| \cdot |S^{n-2}|} \text{TK}(f) \quad \text{und}$$

$$\text{tak}(f) = \frac{(n-1) \cdot |\tilde{G}(2, n+1)|}{|S^{n-1}| \cdot |S^{n-2}|} \text{TAK}(f).$$

Der gemeinsame Faktor ist gerade 1, wenn wir $|\tilde{G}(2, n+1)|$ als Integral der Bewegungsdichte eines 2-dimensionalen orientierten Unterraumes des \mathbb{R}^{n+1} berechnen. *) \square

BEMERKUNGEN: 1) Nachdem auf \mathbb{R}^{n+1} eine Orientierung gegeben war, wählten wir Orientierungen auf $N \setminus \bar{N}$ durch (2.5), auf $SN \setminus S\bar{N}$ durch (4.4) in Verbindung mit (4.3) und auf $\tilde{G}(2, n+1)$ durch (3.3); dies und die Orientierung der Bilder von ν in Definition 4.1 sowie die Beschränkung auf SN^+

*) s. [7], S. 227; [13], Formel (12.35), S. 203

sind willkürlich bzgl. des Vorzeichens.

2) Lassen wir die Streckung $r \cdot \text{id}$ des \mathbb{R}^{n+1} mit dem Faktor $r > 0$ nach einer Immersion $f: M \rightarrow S^n$ wirken, dann erhalten wir eine Immersion $r \cdot \text{id} \circ f: M \rightarrow S_r^n$ in die Sphäre vom Radius r . Die "differentialtopologischen" Integrale ändern sich bei der Streckung $r \cdot \text{id}$ offensichtlich nicht, es gilt $\text{TK}(f) = \text{TK}(r \cdot \text{id} \circ f)$ bzw. $\text{TAK}(f) = \text{TAK}(r \cdot \text{id} \circ f)$.

In den "differentialgeometrischen" Integralen verändern sich das Volumenelement des Normaleneinheitsbündels mit dem Faktor r^m über \mathring{M} bzw. r^{m-1} über ∂M , jedoch die Lipschitz-Killing-Krümmung mit r^{-m} über \mathring{M} bzw. $r^{-(m-1)}$ über ∂M ; demnach gilt $\text{tk}(f) = \text{tk}(r \cdot \text{id} \circ f)$ bzw. $\text{tak}(f) = \text{tak}(r \cdot \text{id} \circ f)$.

Die bisherigen Resultate gelten also auch im Falle von Immersionen in Sphären mit beliebigem Radius.

3) Immersionen in vollständige, einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter positiver Krümmung werden mit den bisherigen Resultaten erfaßt, da diese Mannigfaltigkeiten zu Sphären mit geeignetem Radius isometrisch diffeomorph sind (vgl. [6], S. 216).

4) Das bisherige Ergebnis beinhaltet eine Beantwortung des Problems 15 bei KUIPER [9].

LITERATUR

- [1] BRAESS, D.: Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 208, 133 - 148 (1974)
- [2] BRÖCKER, Th., JÄNICH, K.: Einführung in die Differentialtopologie, 1. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
- [3] CHERN, S. S., LASHOF, R. K.: On the total curvature of immersed manifolds I. Amer. J. Math. 79, 306 - 318 (1957)
- [4] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Band 3. 1. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1976
- [5] FERUS, D.: Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie. Lecture Notes in Math. 66, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
- [6] GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., MEYER, W.: Riemannsche Geometrie im Großen, Lecture Notes in Math. 55, 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975

- [7] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, 1. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957
- [8] HIRSCH, M. W.: Differential Topology, Grad. Texts in Math. 33, 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1957
- [9] KUIPER, N. H.: Der Satz von Gauß-Bonnet für Abbildungen in E^n und damit verwandte Probleme. DMV-Bericht 69, 77 - 88 (1966/67)
- [10] LEICHTWEISS, K.: Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Zeitschr. 76, 334 - 366 (1961)
- [11] v. MANGOLDT, KNOPP: Einführung in die Höhere Mathematik, Band 4. 1. Aufl. Stuttgart: Hirzel 1973
- [12] MILNOR, J.: Morse-Theory. Annals of Math. Stud. 51. 5. Aufl. Princeton: Princeton University Press 1973
- [13] SANTALÓ, L. A.: Integral Geometry and Geometric Probability. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1. Aufl. Vol. 1, 1976

Eberhard Teufel

Mathematisches Institut B|1 der Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 57

D - 7000 Stuttgart 80

Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 8. November 1979)