manuscripta math. 31, 1 - 16 (1980)

manuscripta mathematica

UEBER DISTRIBUTIVE PAARE VON RINGEN UND ARITHMETISCHE, NILPOTENTE RINGE

Frank Roehl

This work gives a characterization of distributive pairs of nilrings and of arithmetic, nilpotent rings by means of a method analogous to that one developed by Stephenson for the discussion of distributively representable rings. The results are nearly the same as Suzuki's on distributive pairs of subgroups of a group and on distributive groups. Further on a criterion is given for ideals of a given ring to be a distributive pair of subrings.

1. Einleitung

Stephenson gab in [10] (Prop. 1.1, p. 293) eine Charakterisierung der Moduln mit distributivem Untermodulverband und vermittelte damit der Theorie der distributiv darstellbaren Ringe im Sinne Behrens' ([1], p. 92) wichtige Impulse. Der Beweis dieses Satzes läßt sich auf eine Weise führen, die den dahinterstehenden Grundgedanken besser sichtbar werden läßt und es gestattet, eine entsprechende Aussage für Unterringverbände abzuleiten (s. Satz 2.5 und Corollar 2.6).

Vermöge einer sehr schwachen Version dieses Ansatzes war es dann nicht mehr schwer, die Klassifikation der arithmetischen (d.h. der Verband der zweiseitigen Ideale ist distributiv), nilpotenten Ringe auf diejenige der nilpotenten Ringe mit distributivem Unterringverband zurückzuführen und darüberhinaus die Rechnungen Freĭdmans in [3], die zur vollständigen Klassifikation

0025-2611/80/0031/0001/$03.20

der nilpotenten Ringe mit distributivem Unterringverband führten, durchsichtiger zu gestalten (s. hierzu [9], 3.3). Abgesehen von wenigen (leicht klassifizierbaren) Ausnahmen zeigte sich, daß die Distributivitätsbedingung für den Verband der zweiseitigen Ideale eines nilpotenten Ringes R äquivalent zur Distributivitätsbedingung an den Untergruppenverband von R^+ ist (Thm. 4.1)! Damit ist Problem 40 bei Szasz ([12], p. 129) zu einem Teil gelöst.

Da man häufig vor die Frage gestellt ist, wann etwa die Unterringe eines Ringes nach zwei vorgegebenen Unterringen zerlegbar bzw. direkt zerlegbar sind und die Forderung nach Distributivität des Unterringverbandes bzw. Idealverbandes in dieser Situation zu stark ist, hatte Ore bereits 1938 den Begriff des "distributiven Paares" eingeführt. Angesichts der schönen Ergebnisse Suzukis über distributive Paare von Gruppen (s. [11], p. 3-5) lagen eine Übertragung dieses Konzeptes auf Ringe und der Versuch der Charakterisierung solcher Paare vermögen des genannten Ansatzes nahe. Einen Beitrag zur Lösung dieses Problems liefert Corollar 2.6, und darüberhinaus zeigte sich bei Nilringen sogar, daß zwei Unterringe genau dann ein distributives Paar bilden, wenn sie ein distributives Paar von Gruppen in der additiven Gruppe des gegebenen Ringes bilden (Thm. 3.3)! Daraus ergab sich dann eine vollständige Analogie zu den Ernissen Suzukis über Gruppen!

Bezeichnungen

Alle betrachteten Ringe sind assoziativ, aber nicht notwendig kommutativ oder mit Einselement. "$<\ldots>$" steht für das Ringerzeugnis der zwischen den Klammern aufgeführten Elemente, und ähnlich bezeichnet "$\cup$" ein Ringerzeugnis (und wird in dieser Arbeit niemals lediglich im Sinne mengentheoretischer Vereinigung verwendet!) "Monogenität" eines Ringes heißt, daß er als Ring von einem Element erzeugt wird. "(a)" ist das von einem Element a eines Ringes erzeugte zweiseitige Ideal. "$\oplus$" bezeichnet die direkte Summe in der Kategorie der Summanden und R^+ die additive Gruppe des Ringes R.

Für ein nilpotentes Element a eines Ringes R ist "exp a" die kleinste natürliche Zahl n mit $a^n=0$, entsprechend "exp R", falls bereits R nilpotent ist. Bezüglich der Begriffsbildungen aus der Gruppentheorie sei auf [4] verwiesen. Im übrigen bezeichnen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ die Menge der natürlichen, der ganzen und der rationalen Zahlen, und X ist stets eine Unbestimmte.

DEF.: R_1, R_2 seien Unterringe des Ringes R. R_1, R_2 bilden genau dann ein distributives Paar, wenn für jeden Unterring S von R gilt:

(D) $$S\cap(R_1\cup R_2)=(S\cap R_1)\cup(S\cap R_2).$$

2. Über distributive Paare von Ringen

Zunächst einige einfache Feststellungen, die an entsprechender Stelle ohne besonderen Hinweis benutzt werden:

1. Um die Distributivität eines Paares (R_1,R_2) von Unterringen eines Ringes R nachzuweisen, genügt es, Bedingung (D) für alle monogenen Unterringe von R zu verifizieren.
2. Weiterhin betrifft (D) lediglich die Unterringe von $R_1\cup R_2$ und ist für diejenigen Unterringe, die in R_1 oder R_2 enthalten sind, trivialerweise erfüllt. Bilden also die Ringe R_1, R_2 ein distributives Paar im Ring R, so auch in jedem Ring, der R enthält.
3. Ist S ein Unterring von R und das Paar (R_1,R_2) distributiv, so ist auch $(S\cap R_1, S\cap R_2)$ ein distributives Paar von Unterringen in S.
4. Ist $-:R\rightarrow R'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, dessen Kern in $R_1\cup R_2$ enthalten ist, und bilden R_1,R_2 ein distributives Paar von Unterringen in R, so ist $(\overline{R}_1,\overline{R}_2)$ distributiv in R'. Denn: Sei $\overline{s}\in\overline{R}_1\cup\overline{R}_2$ und s ein Urbild von $\overline{s}$. Da der Kern des Homomorphismus in $R_1\cup R_2$ enthalten ist, gilt: $s\in R_1\cup R_2$. Weil (R_1,R_2) distributiv ist also:
$$s\in(\langle s\rangle\cap R_1)\cup(\langle s\rangle\cap R_2),\ \text{und folglich}$$
$$\overline{\langle s\rangle}\subset(\overline{\langle s\rangle\cap R_1})\cup(\overline{\langle s\rangle\cap R_2})\subset(\langle\overline{s}\rangle\cap\overline{R}_1)\cup(\langle\overline{s}\rangle\cap\overline{R}_2).$$

2.5 SATZ (Lemma 2.2.2 in [9], p. 28):
Sei $R=R_1 \oplus R_2$ direkte Summe zweier monogener Ringe R_1, R_2, etwa $R_i \cong X\mathbb{Z}[X]/I_i$ mit Idealen I_i aus $X\mathbb{Z}[X]$ $(i=1,2)$. Seien die r_i die Bilder von X in R_i $(i=1,2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(I) $\langle r_1+r_2\rangle = \langle r_1\rangle \oplus \langle r_2\rangle$

(II) $I_1+I_2 = X\mathbb{Z}[X]$

(III) Ist $\bar{r}_1$ (bzw. $\tilde{r}_2$) von 0 verschiedenes kanonisch homomorphes Bild von r_1 (bzw. r_2), so existiert kein Ringisomorphismus $i:\langle \bar{r}_1\rangle \longrightarrow \langle \tilde{r}_2\rangle$ mit $i(\bar{r}_1)=\tilde{r}_2$.

BEWEIS:
(I)$\Longleftrightarrow$(II): (I) bedeutet $r_1 \in \langle r_1+r_2\rangle$, und d.h.: $\exists\, \lambda_i \in \mathbb{Z}$:
$r_1=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (r_1+r_2)^i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_1^i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_2^i$. Wegen der Direktheit

von $R=R_1 \oplus R_2$ also: $\exists\, \lambda_i \in Z$: $r_1=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_1^i \wedge 0=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_2^i$, oder mit anderen

Worten: $\exists f(X) \in X\mathbb{Z}[X]$: $f(X) \in I_2 \wedge X-f(X) \in I_1$, also $X \in I_1+I_2$.

(II)$\Longleftrightarrow$(III): Die kanonisch homomorphen Bilder der r_i sind bis auf kanonische Isomorphie von der Form $X+J_i$ mit $J_i \supset I_i$ $(i=1,2)$, weil die r_i die Bilder von X unter den kanonischen Homomorphismen
$X\mathbb{Z}[X] \longrightarrow X\mathbb{Z}[X]/I_i$ sind, und die Isomorphismen
$$(X\mathbb{Z}[X]/I_i)/(J_i/I_i) \cong X\mathbb{Z}[X]/J_i \quad \text{für Ideale } J_i \supset I_i$$
ebenfalls kanonisch sind.

Es ist I_1+I_2 in jedem Ideal enthalten, das sowohl I_1 als auch I_2 umfaßt, und ist $\wp: X\mathbb{Z}[X]/J_1 \longrightarrow X\mathbb{Z}[X]/J_2$ ein Isomorphismus mit $\wp(X+J_1)=X+J_2$, so bedeutet (III) wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} & X\mathbb{Z}[X] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X\mathbb{Z}[X]/J_1 \arrow[rr, "\wp"] & & X\mathbb{Z}[X]/J_2 \end{tikzcd}$$

- alle Abbildungen kanonisch -

daß es in $X\mathbb{Z}[X]$ kein echtes Ideal gibt, das I_1 und I_2 enthält.

Qed.

Der wesentliche Inhalt von 2.5 ist die Äquivalenz der Bedingungen (I) und (III). Aber abgesehen von der beweistechnischen Bequemlichkeit, die der Einschub von Bedingung (II) bietet, mag sie bei der Beschreibung von Ringen mit Bedingung (I) durch Erzeugende und Relationen ganz nützlich sein.

2.6. Corollar:

R sei Ring, R_1, R_2 Ideale in R und $\overline{}: R \to R/R_1 \cap R_2$ der kanonische Homomorphismus. (R_1, R_2) ist genau dann ein distributives Paar von Unterringen, wenn es keine Elemente $r_i \in R_i$ $(i=1,2)$ mit $\bar{r}_i \neq 0$ und kanonisch homomorphe Bilder $\varphi_i(\bar{r}_i) \neq 0$ gibt so, daß $\langle\varphi_1(\bar{r}_1)\rangle$ isomorph zu $\langle\varphi_2(\bar{r}_2)\rangle$ mit $\varphi_1(\bar{r}_1) \mapsto \varphi_2(\bar{r}_2)$ ist.

BEWEIS:

"$\Rightarrow$" Zunächst einmal ist $\bar{R}_1 \cup \bar{R}_2 = \bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2$, und $(\bar{R}_1, \bar{R}_2)$ ist ein distributives Paar in $\bar{R}$. Seien nun die $r_i \in R_i$ $(i=1,2)$ beliebig mit $r_i \notin R_1 \cap R_2$. Dann ist aber $\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle = (\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle \cap \bar{R}_1) \cup (\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle \cap \bar{R}_2)$.
Folglich existieren Polynome $f(X), g(X) \in X\mathbb{Z}[X]$ mit
$\bar{r}_1+\bar{r}_2 = f(\bar{r}_1+\bar{r}_2)+g(\bar{r}_1+\bar{r}_2)$ und $f(\bar{r}_1+\bar{r}_2) \in \bar{R}_1$, $g(\bar{r}_1+\bar{r}_2) \in \bar{R}_2$.
Aus der Direktheit von $\bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2$ ergibt sich nun:
$f(\bar{r}_1+\bar{r}_2) = f(\bar{r}_1)+f(\bar{r}_2)$ und $g(\bar{r}_1+\bar{r}_2) = g(\bar{r}_1)+g(\bar{r}_2)$; aus
$f(\bar{r}_1+\bar{r}_2) \in \bar{R}_1$ also $f(\bar{r}_2)=0$ und analog $g(\bar{r}_1)=0$. Dann ist:

$$\bar{r}_1 - f(\bar{r}_1) = g(\bar{r}_2) - \bar{r}_2 \in \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 = 0,$$

d.h. $f(X)$ ist ein Polynom mit $f(\bar{r}_1)=\bar{r}_1$ und $f(\bar{r}_2)=0$. Die Behauptung folgt nun aus der Äquivalenz von (II) und (III) in 2.5.

"$\Leftarrow$" Sei $\langle s\rangle$ Unterring von $R_1 \cup R_2$ mit $s \notin R_i$ $(i=1,2)$, so folgt $s = s_1+s_2$ für geeignete $s_i \in R_i$ und $s_i \notin R_1 \cap R_2$. Es genügt, $s_i \in \langle s\rangle$ zu zeigen. Aus der Voraussetzung und der Äquivalenz von (I) und (III) in 2.5 folgt: $\langle\bar{s}\rangle = \langle\bar{s}_1\rangle \oplus \langle\bar{s}_2\rangle$, also $\bar{s}_i \in \langle\bar{s}\rangle$. Aus der kanonischen Isomorphie $\langle s+R_1 \cap R_2\rangle / R_1 \cap R_2 \cong \langle s\rangle / \langle s\rangle \cap R_1 \cap R_2$ ergibt sich dann $s_i + (\langle s\rangle \cap R_1 \cap R_2) \subset \langle s\rangle$.

Qed.

BEMERKUNGEN:

1. Im obigen Beweis "$\Longrightarrow$" folgt aus "(I)$\Longleftrightarrow$(II)" in 2.5 noch $\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle(=(\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle\cap\bar{R}_1)\cup(\langle\bar{r}_1+\bar{r}_2\rangle\cap\bar{R}_2))=\langle\bar{r}_1\rangle\oplus\langle\bar{r}_2\rangle$.
   Diese Schlußfolgerung werden wir im Beweis von 3.3 noch einmal benötigen.
2. 2.6 liefert insbesondere ein Kriterium für die Zerlegbarkeit von Unterringen $S\subset R_1\oplus R_2$ nach den direkten Summanden.
3. Betrachtet man anstelle von Idealen lediglich Unterringe R_1,R_2 von R, so liefert 2.6 immer noch ein notwendiges Kriterium für die Distributivität von (R_1,R_2), wenn man statt $-:R\rightarrow R/R_1\cap R_2$ nun den Homomorphismus $\sim:R\rightarrow R/(R_1)\cap(R_2)$ betrachtet, wobei wegen 2.2 o.E. $R=R_1\cup R_2$ vorausgesetzt werden darf und (R_i) das von R_i erzeugte (zweiseitige) R-Ideal ist $(i=1,2)$. Daß jedoch 2.6 in dieser Situation nicht hinreichend ist, liegt daran, daß keine Aussagen über die Ringe "zwischen" $R_1\cap R_2$ und $(R_1)\cap(R_2)$ gemacht werden können.

3. Distributive Paare von Nilringen

Bilden R_1,R_2 ein distributives Paar von Unterringen eines Nilringes $R=R_1\cup R_2$, so läßt sich zwar immer noch nicht viel über die Struktur von $(R_1)\cap(R_2)$ aussagen, dafür aber umso mehr über das Ringerzeugnis $R_1\cup R_2$!

3.1 LEMMA:

<u>R_1,R_2 seien Unterringe des Nilringes R. R_1,R_2 bilden genau dann ein distributives Paar von Unterringen, wenn für jeden Unterring S von $R_1\cup R_2$ gilt:</u> $S^+=(S\cap R_1)^++(S\cap R_2)^+$.

Nach 3.1 gilt in einem Nilring für ein distributives Paar von Unterringen R_1,R_2 also insbesondere: $(R_1\cup R_2)^+=R_1^++R_2^+$.

3.1 besagt noch nicht, daß R_1^+,R_2^+ ein distributives Paar von Untergruppen in der abelschen Gruppe R^+ bilden! (s. jedoch 3.3).

BEWEIS:

"$\Longrightarrow$" Gäbe es einen Ring S, so daß $S^+ \supsetneqq (S\cap R_1)^+ + (S\cap R_2)^+$ ist, so existiert ein $s\in S$ mit $\langle s\rangle^+ \supsetneqq (\langle s\rangle\cap R_1)^+ + (\langle s\rangle\cap R_2)^+$. Unter den Elementen aus $R_1\cup R_2$ mit dieser Eigenschaft besitze etwa s minimalen Exponenten. Wegen der Distributivität von R_1,R_2 als Paar von Unterringen läßt sich s in der Form $s=f_o(s)+\sum_{i=1}^{n} f_i(s)g_i(s)+g_o(s)$

schreiben, mit $f_i(s)\in\langle s\rangle\cap R_1, g_i(s)\in\langle s\rangle\cap R_2$, $i=0,\dots,n$ und die $f_i(X),g_i(X)\in X\mathbb{Z}[X]$. Nach Wahl von s ist $\langle s^2\rangle^+ = (\langle s^2\rangle\cap R_1)^+ + (\langle s^2\rangle\cap R_2)^+$, und entsprechendes gilt auch für die höheren Potenzen von s. Daraus folgt unmittelbar $(\langle s\rangle^2)^+ = (\langle s\rangle^2\cap R_1)^+ + (\langle s\rangle^2\cap R_2)^+ \subset$

$(\langle s\rangle\cap R_1)^+ + (\langle s\rangle\cap R_2)^+$; also $\sum_{i=1}^{n} f_i(s)g_i(s)\in(\langle s\rangle\cap R_1)^+ + (\langle s\rangle\cap R_2)^+$.

Mit der obigen Darstellung von s also insgesamt $\langle s\rangle^+ = (\langle s\rangle\cap R_1)^+ + (\langle s\rangle\cap R_2)^+$: Widerspruch!

"$\Longleftarrow$" ist trivial wegen $(S\cap R_1)^+ + (S\cap R_2)^+ \subset \left[(S\cap R_1)\cup(S\cap R_2)\right]^+$.

Qed.

3.2 LEMMA:

R sei kommutativer Nilring und für $a,b\in R$ bezeichne $(b)_a$ den von b erzeugten $\langle a,b\rangle$-Modul. Aus $ma\in(b)_a$ für ein $m\in\mathbb{N}$ folgt dann schon $m^k a\in\langle b\rangle$ für passendes $k\in\mathbb{N}$ (im Falle $m=1$ also $a\in\langle b\rangle$).

BEWEIS:

Da R kommutativ ist, folgt aus $ma\in(b)_a$ bereits $ma\in\langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle)^+$. Durch Induktion nach $\vartheta\in\mathbb{N}$ zeigen wir, daß dann sogar $m^\vartheta a\in\langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle^\vartheta)^+ \ \forall\, \vartheta\in\mathbb{N}$ gilt, und die Behauptung folgt dann aus der Nilpotenz von b. Es war $m^\vartheta a\in\langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle^\vartheta)^+$ richtig für $\vartheta=1$. Sei $m^\vartheta a\in\langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle^\vartheta)^+$. Zu zeigen bleibt wegen $m^{\vartheta+1}a\in(m\langle b\rangle)^+ + (m\langle a\rangle\langle b\rangle^\vartheta)^+$ lediglich noch $(m\langle a\rangle\langle b\rangle^\vartheta)^+ \subset \langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle^{\vartheta+1})^+$. Aus $ma\in\langle b\rangle^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle)^+$ folgt: $ma^\mu b^\varkappa\in(\langle a\rangle^{\mu-1}\langle b\rangle^{\varkappa+1})^+ + (\langle a\rangle^\mu\langle b\rangle^{\varkappa+1})^+ \subset (\langle a\rangle\langle b\rangle^{\varkappa+1})^+$ für alle $\mu>1, \varkappa\geq\vartheta$; und für $\mu=1, \varkappa\geq\vartheta$ sogar: $mab^\varkappa\in(\langle b\rangle^{\varkappa+1})^+ + (\langle a\rangle\langle b\rangle^{\varkappa+1})^+$.

Wegen $(m\langle a\rangle\langle b\rangle^{\nu})^{+}=\sum_{\substack{\kappa,\mu\in\mathbb{N}\\ \kappa\geq\nu}} m\mathbb{Z}a^{\mu}b^{\kappa}$ insgesamt:

$$(m\langle a\rangle\langle b\rangle^{\nu})^{+}\subset\langle b\rangle^{+}+(\langle a\rangle\langle b\rangle^{\nu+1})^{+}.$$

Qed.

<u>3.3 THEOREM:</u>

<u>R sei Nilring mit Unterringen R_1,R_2. R_1,R_2 bilden genau dann ein distributives Paar von Unterringen, wenn R_1^+,R_2^+ in R^+ ein distributives Paar von Untergruppen bilden.</u>

<u>BEWEIS:</u>

"$\Rightarrow$" Sei $c\notin R_1,R_2$, aber $c\in R_1^+ + R_2^+$. Nach Lemma 3.1 gilt $\langle c\rangle^{+}=(\langle c\rangle\cap R_1)^{+}+(\langle c\rangle\cap R_2)^{+}$; also existieren $c_i\in\langle c\rangle\cap R_i$ $(i=1,2)$ mit $c=c_1+c_2$, und daher: $\langle c_1+c_2\rangle=\langle c_1,c_2\rangle$. Setze nun $J:=(c_1)_{c_2}\cap(c_2)_{c_1}$, dabei sei $(c_1)_{c_2}$ der von c_1 erzeugte $\langle c_1,c_2\rangle$-Modul, entsprechend $(c_2)_{c_1}$. Ist nun $\bar{\ }:\langle c_1,c_2\rangle\to\langle c_1,c_2\rangle/J$ der kanonische Homomorphismus, so folgt: $\langle\overline{c_1+c_2}\rangle=\langle\bar{c}_1\rangle\oplus\langle\bar{c}_2\rangle$.

Wäre nun etwa $\bar{c}_1=0$, also $c_1\in J\subset(c_2)_{c_1}$, so folgte $c_1\in\langle c_2\rangle\subset R_2$ nach 3.2 (es war $c_1,c_2\in\langle c\rangle$, und $\langle c\rangle$ ist als monogener Ring kommutativ, weiterhin war c nilpotent!) Wegen $c_2\in R_2$ ist mit c_1 also auch c in R_2: Widerspruch! Folglich sind $\bar{c}_1,\bar{c}_2\neq 0$.

Wir zeigen jetzt, daß $\langle\bar{c}_1\rangle\oplus\langle\bar{c}_2\rangle$ Tosionsring ist. Wäre etwa $\bar{c}_1$ kein Torsionselement und T der Torsionsteil von $\langle\bar{c}_1\rangle$, so ist $\langle\bar{c}_1\rangle/(\langle\bar{c}_1\rangle^2\cup T)$ Nullring über $\mathbb{Z}$; denn $\bar{c}_1^{\,2}\in\langle\bar{c}_1\rangle^2\cup T$ ist klar, und ist für ein $m\in\mathbb{N}$ schon $m\bar{c}_1\in\langle\bar{c}_1\rangle^2\cup T$ und $\exp\bar{c}_1=k+1$, so folgt: $m\bar{c}_1^{\,k}\in T$ und iterativ $m_1\bar{c}_1\in T$, also $\bar{c}_1\in T$. $\langle\bar{c}_2\rangle/\langle\bar{c}_2\rangle^2$ ist nun entweder torsionsfrei - und dann Nullring über $\mathbb{Z}$ - oder ein Torsionsring und dann $\cong(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^0$ für ein passendes $m\in\mathbb{N}$.

Im ersten Fall ist $\langle\bar{c}_1\rangle/(\langle\bar{c}_1\rangle^2\cup T)$, und im zweiten Fall ist $\langle\bar{c}_1\rangle/(\langle\bar{c}_1\rangle^2\cup T\cup m\langle\bar{c}_1\rangle)$ kanonisch isomorph zu $\langle\bar{c}_2\rangle/\langle\bar{c}_2\rangle^2$: Beides steht im Widerspruch zur Äquivalenz von (I) und (III) aus 2.5!

Es gilt aber sogar GGT(char $\bar{c}_1$,char $\bar{c}_2$)=1! Denn wäre etwa p ein Primteiler von GGT(char $\bar{c}_1$,char $\bar{c}_2$), so setze m_i:=char $\bar{c}_i/p$ und $\bar{a}_i:=m_i\bar{c}_i$, also char $\bar{a}_i=p$ für i=1,2. Mit 2.3 ergibt sich, daß gilt: $\langle\bar{a}_1+\bar{a}_2\rangle=(\langle\bar{a}_1+\bar{a}_2\rangle\cap\langle\bar{c}_1\rangle)\cup(\langle\bar{a}_1+\bar{a}_2\rangle\cap\langle\bar{c}_2\rangle)$, und wie in der ersten Bemerkung zu 2.6 folgt: $\langle\bar{a}_1+\bar{a}_2\rangle=\langle\bar{a}_1\rangle\oplus\langle\bar{a}_2\rangle$. Aber $\langle\bar{a}_1\rangle/\langle\bar{a}_1\rangle^2$ ist kanonisch isomorph zu $\langle\bar{a}_2\rangle/\langle\bar{a}_2\rangle^2\neq 0$ (beides sind Nullringe, und die Charakteristik der Erzeugenden $\bar{a}_i+\langle\bar{a}_i\rangle^2$ ist p, da $\bar{a}_i\in\langle\bar{a}_i\rangle^2$ in nilpotenten Ringen nur für $\bar{a}_i=0$ möglich ist), im Widerspruch zu "(I)$\Longleftrightarrow$(III)" aus 2.5!
Setze nun m_i:=char $\bar{c}_i$, i=1,2. Aus $m_i c_i\in J$ folgt nach 3.2 bereits $\exists\, \nu_i\in\mathbb{N}$: $m_1^{\nu_1}c_1\in\langle c_2\rangle\subset R_2$; $m_2^{\nu_2}c_2\in\langle c_1\rangle\subset R_1$. Bezeichnet man die kleinste natürliche Zahl n_2, so daß $n_2c\in R_2$ ist, als relative Ordnung von c bezüglich R_2, und ist n_1 die relative Ordnung von c bezüglich R_1, so ist wegen $m_1^{\nu_1}(c_1+c_2)\in R_2$ jedenfalls n_2 ein

Teiler von $m_1^{\nu_1}$ und n_1 ein Teiler von $m_2^{\nu_2}$. Aus GGT(m_1,m_2)=1 folgt die Teilerfremdheit von n_1 und n_2. Die Behauptung folgt dann aus Thm. 1 bei Suzuki ([11] , p. 3)!

"$\Longleftarrow$" Trivial!

Qed.

Als Corollar zu Thm. 1 in [11], p. 3 und Thm. 3.3 erhalten wir

<u>3.4 COROLLAR:</u>

<u>Ein Paar (R_1,R_2) von Unterringen eines Nilringes ist genau dann ein distributives Paar, wenn für jedes Element c aus $R_1\cup R_2$, das weder in R_1 noch in R_2 enthalten ist, dessen relative Ordnungen bezüglich R_1 und R_2 endlich und teilerfremd sind.</u>

3.5 SATZ:

R sei Nilring, (R_1,R_2) ein distributives Paar von Unterringen aus R mit $R_1 \cap R_2 = 0$. Dann ist $R_1 \cup R_2 = R_1 \oplus R_2$ ein Torsionsring, und die Ordnungen der Elemente in R_1 und R_2 sind teilerfremd.

BEWEIS:

Wegen 3.3 und Thm. 3.3 bei Suzuki in [11], p. 4 braucht lediglich $R_1 \cdot R_2 = R_2 R_1 = 0$ nachgewiesen zu werden.
Seien also a und b aus verschiedenen Unterringen R_i $(i=1,2)$.
Nach Suzukis Thm. 3 ([11], p. 4) ist char a,char $b \in \mathbb{N}$ und $d := \mathrm{GGT}(\text{ char } a, \text{char } b\ ) = 1$. Aus $d(ab)=0$ folgt dann $ab=0$.

Qed.

3.6 THEOREM:

Der Verband L(R) von Unterringen des Nilringes R ist direktes Produkt von Verbänden L_λ $(\lambda \in \Lambda)$: $L(R) = \prod_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ genau dann, wenn der Nilring R direktes Produkt der Nilringe R_λ ist, so daß $L(R_\lambda) \cong L_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ ist und die Ordnungen der Elemente aus R_λ endlich und teilerfremd sind zu den Ordnungen der Elemente aus R_μ $(\lambda \neq \mu)$.

BEWEIS:

Der Beweis von Suzukis Thm. 4 in [11], p. 5 läßt sich wörtlich übernehmen, wenn man nur den Terminus "Untergruppe" durch "Unterring" ersetzt und statt Suzukis Thm. 3 unseren Satz 3.5 verwendet.

Qed.

Daß weder 3.3 noch 3.5 oder 3.6 in beliebigen Ringen gelten, zeigt das folgende

3.7 BEISPIEL:

Sei $R^+ := \langle e \rangle^+ \oplus \langle u \rangle^+$ mit $e^2 = e$, $pe = pu = u^2 = 0$ (p prim) und $eu = ue = u$.
In R bilden dann $\langle e \rangle, \langle u \rangle$ ein distributives Paar von Unterringen, aber nicht von Untergruppen, da etwa die von $e+u$ erzeugte Untergruppe nicht nach den direkten Summanden $\langle e \rangle^+, \langle u \rangle^+$ zerlegbar ist!

4. Arithmetische, nilpotente Ringe

Alle Ergebnisse dieses Abschnittes - bis auf 4.1 b) - sind der Dissertation [9] des Autors entnommen. Sie sind Verallgemeinerungen derjenigen Frl. Bramerets über nilpotente Kettenringe in [2] und gewinnen ihre Aussagekraft durch die Klassifikation der Ringe mit distributivem Unterringverband (i.f. als DUV-Ringe abgekürzt), die Freĭdman in [3] leistete. Des weiteren wird durch 4.1 und Freĭdmans Arbeit eine Frage z.T. gelöst, die Szasz in [12] aufwarf.

Um die Distributivität eines Verbandes L nachzuweisen, genügt es,

$$S_1\cap(S_2\cup S_3)\leq(S_1\cap S_2)\cup(S_1\cap S_3)\,\forall S_i\in L$$

zu zeigen (Lemma 10 in [6], p. 35).

4.1 THEOREM:

a) Ein nilpotenter Ring besitzt genau dann einen distributiven Idealverband, wenn sein Unterringverband distributiv ist.

b) Außer in den Torsionsringen, in denen wenigstens ein Torsionsteil T_p, p prim, eine $\mathbb{F}_p$-Algebra $A=\langle a\rangle$ mit $a^3=0$ und $A^+=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}a^2$ ("anisotrope Bilinearformalgebra der Dimension 2 "nach Borho) ist, ist sogar schon der Untergruppenverband der additiven Gruppe der arithmetischen, nilpotenten Ringe distributiv.

Anstelle von 4.1 a) beweisen wir drei Teilaussagen, die die Struktur der arithmetischern, nilpotenten Ringe bereits weitgehend darlegen und mit den korrespondierenden Ergebnissen Freidmans über DUV-Ringe in [3] sofort das Gewünschte liefern.

Im übrigen werden wir ohne besonderen Hinweis von der Aussage Gebrauch machen, daß homomorphe Bilder von arithmetischen Ringen und von DUV-Ringen ebenfalls arithmetische bzw. DUV-Ringe sind (das folgt durch Liften der Unterringe bzw. Ideale aus der Distributivität und weil der Durchschnitt von Bildern das Bild des Durchschnittes enthält!)

4.2 SATZ:

Für nilpotente p-Ringe - p eine Primzahl - sind folgende drei Eigenschaften äquivalent:

(I) R besitzt linearen Unterringverband

(II) R besitzt distributiven Unterringverband

(III) Der Verband der zweiseitigen Ideale von R ist distributiv.

BEWEIS:

Die Implikationen (I)$\Rightarrow$(II)$\Rightarrow$(III) sind trivial. Daher genügt es (III)$\Rightarrow$(I) nachzuweisen.

Sei also R nilpotenter p-Ring mit distributivem Idealverband.

1) Ist R^+ p-divisibel, so ist R^+ nach Fuchs ([4], Thm. 23.1 p. 104) direkte Summe quasizyklischer Gruppen $Z(p^\infty)$, und R ist Nullring. In diesem Fall ist aber jede Untergruppe von R^+ bereits Ideal. Gäbe es nun mehr als einen direkten Summanden der Form $Z(p^\infty)$ in R^+, so ließen sich a,b aus zwei verschiedenen Summanden der Form $Z(p^\infty)$ finden, die im Sockel von R^+ liegen (und R annullieren). Es ist $(a)=\langle a\rangle$ und entsprechend für $(a+b)$, (b), da a und b im Schnitt des Annullators von R mit dem Sockel liegen.
Außerdem ist dann $\#\langle a\rangle=\#\langle b\rangle=\#\langle a+b\rangle=p$, und folglich: $(a+b)\cap(a)=(a+b)\cap(b)=0$. Dann kann im Widerspruch zur Distributivität des Idealverbandes von R nicht gelten:

$$(a+b)=(a+b)\cap\left[(a)\cup(b)\right]=\left[(a+b)\cap(a)\right]\cup\left[(a+b)\cap(b)\right]=0!$$

2) R sei nicht p-divisibel. Setze dann $A_o:=R$, und $A_i:=pA_{i-1}+RA_{i-1}\ \forall\ i\in\mathbb{N}$. Wäre $A_i=A_{i-1}$ für ein $i\in\mathbb{N}$ - also $A_{i-1}=pA_{i-1}+RA_{i-1}$ - so folgte: $RA_{i-1}=pRA_{i-1}+R^2A_{i-1}$, und daher $A_{i-1}=pA_{i-1}+R^2A_{i-1}$. Induktiv also $A_{i-1}=pA_{i-1}+R^\nu A_{i-1}$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$. Für $\nu\geq\exp R$ also insbesondere $A_{i-1}=pA_{i-1}$. Da R nicht p-divisibel sein sollte, ist jedes i mit $A_i=A_{i-1}$ größer als 1, also $pR+R^2\subsetneq R$.

Wie unter 1) folgt nun die Linearität des Unterringverbandes von $\bar{R}:=R/pR+R^2$. Für ein $r\in R$ ist dann $\langle\bar{r}\rangle=\bar{R}$. Wäre $\langle r\rangle\subsetneq R$, so gäbe es ein maximales Ideal $J\subsetneq R$ mit $\langle r\rangle\subset J$ (das folgt etwa aus dem Refinement-Theorem von Kruse und Price: [7], p. 6). Nun ist aber $R^2+pR \subset J$ (ebenfalls [7], p. 6), und folglich: $\overline{\langle r \rangle} \subset \overline{J} \subsetneqq \overline{R} = \overline{\langle r \rangle}$: Widerspruch! R ist also monogen und insbesondere endlich und kommutativ.

Weil aus $A_{i-1}=A_i$ die p-Divisibilität von A_{i-1} folgte, bilden die A_i in dem endlichen Ring R eine <u>echt absteigende Kette monogener Unterringe</u> (alle A_i sind Ideale, und die Ideale in A_i/A_{i+1} sind schon Ideale in R/A_{i+1}; die Monogenität der A_i folgt nun wie die von R). Sei nun S beliebiger Unterring von R, so existiert ein maximales $j \in \mathbb{N} \cup 0$ mit $A_j \supset S$. Dann folgt aber $S+A_{j+1}/A_{j+1}=A_j/A_{j+1}$, weil $pA_j, A_j^2 \subset A_{j+1}$ und A_j monogen ist. Aus der Struktur der A_i (Monogenität!) und der Nilpotenz des p-Ringes R ergibt sich: $S=A_j$.

Qed.

Die Beweisidee ist also, den nilpotenten Ring so zu faktorisieren, daß in dem homomorphen Bild die Ideale mit den Unterringen übereinstimmen und man daher eine schwache Version von 2.5 anwenden kann (ähnlich verhält es sich in dem folgenden Beweis zu 4.3).

<u>4.3 SATZ:</u>

<u>Es gibt keine gemischten nilpotenten Ringe mit distributivem Idealverband</u>

<u>BEWEIS:</u>

Angenommen, R wäre nilpotent, arithmetisch, und R^+ wäre gemischt. Nach Kruse, Price (1.2.6 in [7], p. 3) läßt sich ein Element r aus dem Annullator von R derart wählen, daß char r=0 ist. Wähle $i \in \mathbb{N}$ maximal mit der Eigenschaft "R^i enthält von 0 verschiedene Torsionselemente", und sei $0 \neq s \in R^i$ mit $ps=0$, p geeignete Primzahl. Dann ist sR (und ebenso Rs) Torsionsring in R^{i+1}; und nach Wahl von i ist s daher im Annullator von R. Aus der Distributivität des Idealverbandes von R folgt:

$$(r+s)=(r+s)\cap[(r)\cup(s)]=[(r+s)\cap(r)]\cup[(r+s)\cap(s)].$$

Da r und s im Annullator von R liegen, ist $(r)=\langle r\rangle$ und $(r+s)=\langle r+s\rangle$, und daher ist mit (r) auch (r+s) torsionsfrei; also $(r+s)\cap(s)=0$. Daher ist $(r+s)\subset(r+s)\cap(r)$, d.h. $(r+s)\subset(r)$, und damit $s\in(r)$. Weil aber (r) torsionsfrei war, muß dann s=0 sein: Widerspruch!

Qed.

4.4 SATZ:

R sei torsionsfreier, nilpotenter Ring. R besitzt genau dann einen distributiven Idealverband, wenn $R^2=0$ und R^+ abelsche Gruppe vom Rang 1 ist (R^+ ist dann isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Q}^+$).

BEWEIS:

Der Ring R sei wie im Satz vorausgesetzt. Angenommen, $R^2\neq 0$. O.E. darf $R^3=0$ vorausgesetzt werden, denn ist R torsionsfrei und wäre R/R^3 es nicht, so ist R/R^3 nach 4.3 bereits Torsionsring. Ist dann exp R=k+1, so folgt aus $\forall\, r\in R\ \exists\, n\in\mathbb{N}$: $nr\in R^3$ bereits $nrR^{k-1}\subset R^3R^{k-1}=0$, und wegen der Torsionsfreiheit von R also $rR^{k-1}=0\ \forall\, r\in R$. Dann wäre aber schon $R^k=0$ im Widerspruch zu exp R=k+1.

Sei p prim. Existieren nun $r,s\in R$ mit $rs\neq 0$, so ist R/(prs) nicht torsionsfrei; denn aus $rs\in(prs)$ folgt wegen $R^3=0$ schon rs=mprs für eine ganze Zahl m. Das liefert aber (1-mp)rs=0, und wegen der Torsionsfreiheit von R müßte daher p/1 sein, was unmöglich ist. Folglich ist $rs\notin(prs)$ ein von 0 verschiedenes Torsionselement modulo (prs). Nach 4.3 ist R/(prs) dann bereits Torsionsring. Nun war $R^3=0$, und daher liegt prs im Annullator von R. "R/(prs) ist Torsionsring" beinhaltet dann aber, daß der Rang von R^+ gleich 1 ist. Nach Fuchs (Thm. 121.1 in [5], p. 292) ist R dann Nullring: also rs=0! Daher war die Annahme $R^2\neq 0$ falsch, und insbesondere ist dann jede Untergruppe von R^+ bereits Ideal. Die Behauptung folgt nun aus Thm. 2 in [11], p. 4 (und etwa [8], p. 177; man beachte, daß die in [4] und [8] gegebenen unterschiedlichen Definitionen für den Rang einer Gruppe im torsionsfreien Fall übereinstimmen!)

Daß die angegebenen Ringe tatsächlich arithmetisch sind, ist trivial!

Qed.

Mit den vorangehenden drei Sätzen ist die Struktur der arithmetischen, nilpotenten Ringe weitestgehend beschrieben. Die übrigen Strukturdetails lassen sich bei Freĭdman in [3] nachlesen, und insbesondere folgt 4.1 a) aus Freĭdmans Thm. 1, p. 461, Thm. 3, p. 463 und Thm. 2, p. 462 in [3].

Zum Beweis von 4.1 b): Der Verband der Untergruppen der additiven Gruppe der $\mathbb{F}_p$-Algebra $A=\langle a\rangle$ mit $a^3=0$ und $A^+=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}a^2$ (das ist genau die anisotrope Bilinearformalgebra der Dimension 2 über $\mathbb{F}_p$) ist nicht distributiv, weil etwa $\mathbb{Z}(a+a^2)$ nicht nach $\mathbb{Z}a, \mathbb{Z}a^2$ zerfällt; jedoch ist der Unterringverband von A linear.

Ist andererseits R ein nilpotenter DUV-Ring, so daß der Untergruppenverband von R^+ nicht distributiv ist, so ist R nach 4.4 und 4.3 Torsionsring, und die p-Torsionsteile von R besitzen linearen Unterringverband nach 4.2. Die einzigen Ringe, die der obigen Bedingung genügen sind wegen Thm. 1 in [3], p. 461 dann gerade die in 4.1 b) angegebenen.

Literatur

[1] E.A. Behrens: "Ring theory", Academic Press 1972, New York, London

[2] M.-P. Brameret: "Treillis d'idéaux et structure d'anneaux" C.R. Acad. Sci. Paris (A-B) 255 (1962), p. 1434, 1435

[3] P.A. Freĭdman: "Rings with a distributive lattice of subrings" übersetzt in Math. USSR-Sbornik, Vol. 2 (1967), No. 4, p. 457 - 475

[4] L. Fuchs: "Infinite abelian groups" Bd. I, Academic Press 1970, New York, San Francisko, London

[5] L. Fuchs: "Infinite abelian groups" Bd. II, Academic Press 1970, New York, San Francisko, London

[6] G. Grätzer: "Lattice theory", Freeman and Company 1971, San Francisko

[7] R.L. Kruse, D.T. Price: "Nilpotent rings", Gordon and Breach 1969, New York

[8] A.G. Kurosch: "Gruppentheorie I", Akademie Verlag 1960, Berlin

[9] F. Roehl: "Über eine Vergleichbarkeitsbedingung in Unterringverbänden", Diss., Univ. Hamburg 1977

[10] W. Stephenson: "Modules, whose lattice of submodules is distributive", Proc. London Math. Soc. (3) 28, 1974, p. 291 - 310

[11] M. Suzuki: "Structure of a group and its lattice of subgroups", Springer 1956, Berlin, Göttingen, Heidelberg

[12] F. Szasz: "Radikale der Ringe", VEB 1975, Berlin

Dr. Frank Roehl
Math. Sem. d. Univ. Hamburg
Bundesstraße 55

2000 Hamburg 13

(Eingegangen am 14. November 1977;
in revidierter Fassung am 12. Juli 1979)