Mh. Math. 83, 43—52 (1977)

Monatshefte für **Mathematik**

Eine Bemerkung zu den Nielsen-Transformationen

Von

G. Rosenberger und **F. Tessun**, Hamburg

(Eingegangen am 15. Oktober 1975)

Abstract

Remark on Nielsen Transformations. Let $G = H_1 *_A H_2$ a free product with amalgamation with

$$H_1 = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = 1 \rangle,\ \alpha_i \geqslant 2,\ m \geqslant 2,$$

a free product of m cyclic groups. If we ask for the generation of G, the following questions are significant: 1) For which α_i and m there is a set $\{x_1, \ldots, x_m\}$ of generators of H_1 with $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, and what can we say about α and $x_2, \ldots, x_m$? 2) For which α_i and m there is a set $\{x_1, \ldots, x_m\}$ of generators of H_1 with $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha$, $x_2 = h(s_1 \ldots s_m)^\beta h^{-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $h \in H_1$, and what can we say about α, β, h and $x_3, \ldots, x_m$? In this note we give a complete solution of these questions.

Einleitung

Sei $G = H_1 *_A H_2$ freies Produkt von Gruppen H_1 und H_2 mit Amalgam $A = H_1 \cap H_2$, wobei $H_1 = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = 1 \rangle$, $\alpha_i \geqslant 2$, freies Produkt zyklischer Gruppen ist. Will man einen Überblick über die Erzeugendensysteme von G erhalten, so sind, wie man sofort Satz 1.1 von [2] entnimmt, folgende Fragen von Bedeutung:

1. Für welche α_i und m gibt es ein Erzeugendensystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ von H_1 mit $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, und welche Aussagen kann man über α und $x_2, \ldots, x_m$ machen?

2. Für welche α_i und m gibt es ein Erzeugendensystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ von H_1 mit $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha$, $x_2 = h(s_1 \ldots s_m)^\beta h^{-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $h \in G$, und welche Aussagen kann man über α, β, h und $x_3, \ldots, x_m$ machen?

Diese Fragen werden in dieser Note vollständig behandelt.

Diese Arbeit verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [2] (und [3]). Wie in [2] gewinnen wir oft aus einem System $\{x_1, \ldots, x_n\}$ durch freie Übergänge (Nielsen-Transformationen) ein neues und bezeichnen es mit denselben Symbolen.

Es bedeute:

$\langle a_1, \ldots, a_q \rangle$ die von $a_1, \ldots, a_q$ erzeugte Gruppe.

$|G:H|$ den Index von H in G.

§ 1. Vorbemerkungen

Sei $G = H_1 *_A H_2$ freies Produkt der Gruppen H_1 und H_2 mit Amalgam A. In G sei eine Ordnung und eine Länge L wie in [4, § 1] definiert; die Ordnung genüge der Bedingung (1.9.a) von [4, § 1], d. h. vor einem Produkt von Restklassenvertretern $r_1 \ldots r_{m-1} r_m$ von A in den H_i, $i = 1, 2$, liegen nur endlich viele Produkte $r_1 \ldots r_{m-1} r$, wobei r ein Restklassenvertreter aus dem selben Faktor H_i wie r_m ist.

Aus Satz 1.1 von [2] und Korollar 2 von [3] erhalten wir folgenden Satz:

Satz 1.1: *Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem des freien Produktes $H_1 *_A H_2$ mit Amalgam, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu einem System $\{y_1, \ldots, y_n\}$, für das einer der folgenden Fälle vorliegt:*

1. *Es ist $y_i \in H_1$ oder H_2 für $i = 1, \ldots, n$.*

2. *Es gibt ein Produkt $a = \prod_{j=1}^{q} y_{\nu_j}^{\varepsilon_j}$ mit $\nu_j \in \{1, \ldots, n\}$, $a \neq 1$ und $y_{\nu_j} \in A$ $(j = 1, \ldots, q)$ und einen Faktor H_i sowie ein Element $x \in H_i$, $x \notin A$, so daß eine Relation $x a x^{-1} \in A$ gilt.*

3. *Es liegen $p, p \geqslant 2$, der y_i in einer zu H_1 oder H_2 konjugierten Untergruppe von G, und ein Produkt in ihnen ist zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert.*

4. *Es ist $y_1 \notin A$, aber es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y_1^k \in A$.*

Im weiteren benötigen wir noch des öfteren folgende Sätze:

Satz 1.2 ([1]): *Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem des freien Produktes $H_1 * H_2$, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu einem System $\{y_1, \ldots, y_n\}$ mit $H_1 = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle$, $H_2 = \langle y_{k+1}, \ldots, y_m \rangle$, $y_{m+1} = \ldots = y_n = 1$.*

Speziell ist $\operatorname{Rang}(H_1 * H_2) = \operatorname{Rang}(H_1) + \operatorname{Rang}(H_2)$.

Satz 1.3 ([2], Satz 3): *Die Gruppe $G = \langle s_1, \ldots, s_r \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_r^{\alpha_r} = s_1 \ldots s_r = 1 \rangle$, $\alpha_i \geqslant 2$, $r \geqslant 3$ hat den Rang*

a) $r-2$ *falls r gerade und alle α_i bis auf eines gleich 2 sind und letzteres ungerade ist;*

b) $r-1$ *sonst.*

Satz 1.4 ([2], Satz 1): *Sei* $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = 1\rangle$, $(\alpha_i \geqslant 2)$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset G, (n \leqslant m)$, *und* X *die von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *erzeugte Untergruppe von* G. *Gilt* $y^{-1}(s_1 \ldots s_m)^\alpha y \in X$ *für ein* $\alpha \neq 0$, $y \in G$, *so tritt einer der folgenden Fälle ein:*

1. *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von* $s_1 \ldots s_m$ *oder von einem* s_i *konjugiert ist.*

2. $n = m$.

3. *Es ist* m *ungerade,* $n = m - 1$, *alle* $\alpha_i = 2$; *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *zu* $\{s_1 s_2, s_1 s_3, \ldots, s_1 s_m\}$. *Das Produkt aller* s_i *liegt nicht in der von diesem System erzeugten Untergruppe von* G, *sondern nur die geraden Potenzen von* $s_1 \ldots s_m$.

§ 2. Erzeugende freier Produkte zyklischer Gruppen

Lemma 1 ([3], *Lemma* 6): *Sei* $G = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^q = 1\rangle, q \geqslant 2$. *Erzeugen die Elemente* $(s_1 s_2 s_3)^2$, $s_2 s_3$, x *die Gruppe* G, *so gilt:*

1. *Es gibt einen freien Übergang von* $\{(s_1 s_2 s_3)^2, s_2 s_3, x\}$ *zu* $\{(s_1 s_2 s_3)^2, s_2 s_3, s_1 s_2\}$.

2. *Es gibt einen freien Übergang von* $\{(s_1 s_2 s_3)^2, s_2 s_3, x\}$ *zu* $\{s_1, s_2, s_3^2\}$.

3. *Es ist* $q = 2k + 1$, $k \geqslant 1$.

Beweis: Wir schreiben G als freies Produkt $\langle s_1\rangle * \langle s_2\rangle * \langle s_3\rangle$. In G sei eine Ordnung und eine Länge L wie in [4, § 1] definiert. Die Ordnung möge der Bedingung (1.9.a) von [4, § 1] genügen. Setze

$$a := (s_1 s_2 s_3)^2,\ b := s_1 s_2 s_3 s_1,\ c := s_2 s_3 \text{ und } H := \langle a, c\rangle.$$

Es ist $H = \langle b, c\rangle$; H ist freie Gruppe vom Rang 2, und es haben b und c die Nielsensche Eigenschaft (bzgl. L), (siehe [2, § 1] oder [3, § 1]). Der Übergang von $\{a, c\}$ zu $\{b, c\}$ ist frei. Wir können — eventuell nach freien Übergängen, bei denen b nicht ersetzt zu werden braucht — annehmen, daß gilt:

i) x und c haben die Nielsensche Eigenschaft;

ii) $L(x^\varepsilon h) \geqslant L(x)$, $\varepsilon = \pm 1$, $h \in H$, und

iii) $L(x^\eta h x^\varepsilon) > 2L(x) - L(h)$; $\varepsilon, \eta = \pm 1$, $h \in H$.

Wir wollen nun nach den möglichen Werten von x fragen.

(2.1) *Beh.:* x *ist nicht zu einer Potenz von einem* s_i *konjugiert.*

Beweis von (2.1): Angenommen x ist zu einer Potenz von einem s_i konjugiert. Wir führen die Relation $s_i = 1$ ein und unterscheiden drei Fälle:

a) $i = 1$: Dann ist die Gruppe $\langle s_2, s_3 \mid s_2^2 = s_3^q = 1 \rangle$ zyklisch, und das ist ein Widerspruch.

b) $i = 2$: Dann wird die Gruppe $\langle s_1, s_3 \mid s_1^2 = s_3^q = 1 \rangle$ von $s_1 s_3 s_1$ und s_3 erzeugt, und das ist ein Widerspruch. □

c) $i = 3$: Dann wird die Gruppe $\langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle$ von $s_1 s_2 s_1$ und s_2 erzeugt, und das ist ein Widerspruch.

Der Übergang von $\{a, c, x\}$ zu $\{b, c, x\}$ ist frei.

Angenommen $L(x^\eta b^\varepsilon) \geqslant L(b) = 4$; $\varepsilon, \eta = \pm 1$. Wir können annehmen, daß es keine verkürzenden freien Übergänge mehr gibt. Nach Satz 2 besitzt dann das System $\{b, c, x\}$ die Nielsensche Eigenschaft, oder es ist x zu einer Potenz von einem s_i konjugiert. Ersteres kann wegen $G = \langle b, c, x \rangle$ nicht eintreten, denn sonst wären die Elemente der Länge 1 nicht als Wort in b, c und x darstellbar. Letzteres kann wegen (2.1) nicht eintreten.

Also ist einmal $L(x^\eta b^\varepsilon) < L(b) = 4$; $\varepsilon, \eta = \pm 1$. Wir behandeln den Fall $\eta = -1$. Analog wird der Fall $\eta = +1$ erledigt.

Sei also $\eta = -1$. Wegen $L(x) \leqslant L(x^{-1} b^\varepsilon)$ kann $L(x)$ nur 1, 2 oder 3 sein.

$L(x) = 1$ scheidet aus, da sonst $x = s_1$ wäre, und das ist nach (2.1) nicht möglich. $L(x) = 3$ scheidet ebenfalls aus, da sonst wegen $L(x^{-1} b^\varepsilon) = 3$ und $s_1^2 = 1$ gerade $x = s_1 s_2 s_1$ oder $x = s_1 s_3^\gamma s_1$ wäre, und das ist nach (2.1) nicht möglich.

Also ist $L(x) = 2$ und

$$x = s_1 s_2 \text{ oder } x = s_1 s_3^{-\alpha},\ \alpha \not\equiv 0\,(q).$$

Für $x = s_1 s_2$ ist damit 1. bewiesen.

Sei nun $x = s_1 s_3^{-\alpha}$. Dann ist notwendig $\varepsilon = -1$. Angenommen $\alpha \not\equiv -1\,(q)$ und $\alpha \not\equiv 1\,(q)$. Dann besitzt das System $\{s_3^{\alpha-1} s_2 s_1, c, x\}$ die Nielsensche Eigenschaft. Das steht aber im Widerspruch zu $G = \langle s_3^{\alpha-1} s_2 s_1, c, x \rangle$, denn sonst wären die Elemente der Länge 1 nicht als Wort in $s_3^{\alpha-1} s_2 s_1, c$ und x darstellbar. Also ist $\alpha \equiv 1\,(q)$ oder $\alpha \equiv -1\,(q)$.

a) Sei $\alpha \equiv -1\,(q)$, d. h. $-\alpha \equiv 1\,(q)$. Wir können $-\alpha = 1$ annehmen. Dann gibt es wegen $s_1^2 = s_2^2 = 1$ einen freien Übergang von $\{c, x\}$ zu $\{s_2 s_3, s_1 s_2\}$, denn es ist $s_1 s_2 = x c^{-1}$. Damit ist 1. für $\alpha \equiv -1\,(q)$ bewiesen.

b) Sei $\alpha \equiv 1\,(q)$. Wir können $\alpha = 1$ annehmen. Dann ist $x^{-1}b^{-1} = s_2 s_1 = (s_1 s_2)^{-1} = x^{-1}ca^{-1}$. Damit ist 1. für $\alpha \equiv 1\,(q)$ bewiesen.

Wir haben also einen freien Übergang von $\{a,c,x\}$ zu $\{a,c,s_1 s_2\}$.

Wir wollen jetzt 2. und 3. zeigen. Setze $d = s_1 s_2$. Es ist $d^{-1}ac^{-1}dc = s_3^2$, d. h. es gibt einen freien Übergang von $\{a,c,d\}$ zu $\{s_3^2,c,d\}$. Wegen $G = \langle s_3^2, c, d\rangle$ ist notwendig $q = 2k+1$, und es gibt einen freien Übergang von $\{s_3^2,c,d\}$ zu $\{s_1, s_2, s_3^2\}$. q. e. d.

Mit ähnlichen Methoden erhält man (vgl. auch die Beweise von Lemma 8 von [3] bzw. Hilfssatz 5 von [4]).

Lemma 2: *Sei* $G = \langle s_1, s_2, u \mid s_1^2 = s_2^{2k+1} = 1\rangle$, $k \geqslant 1$. *Erzeugen die Elemente* $(u^{-1}s_1 s_2)^2$, $u^{-1}s_2$, gu^2g^{-1} *mit* $g \in G$, x *die Gruppe* G, *so gibt es einen freien Übergang von* $\{(u^{-1}s_1s_2)^2, u^{-1}s_2, gu^2g^{-1}, x\}$ *zu* $\{(u^{-1}s_1s_2)^2, u^{-1}s_2, s_1s_2, u^2\}$.

Satz 1: *Sei* $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = 1\rangle$ *mit* $2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m$ *und* $m \geqslant 2$. *Sei* $u := s_1 \ldots s_m$ *und* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *ein Erzeugendensystem von* G *mit* $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha = u^\alpha$, $\alpha > 0$. *Dann ist einer der folgenden Fälle erfüllt:*

(2.2) *Es ist* $\alpha = 1$; *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *zu einem System* $\{s_{\nu_1}^{\gamma_1}, \ldots, s_{\nu_{m-1}}^{\gamma_{m-1}}, u\}$ *mit* $\nu_i \in \{1, \ldots, m\}$, $1 \leqslant \gamma_i < \alpha_{\nu_i}$, $(\gamma_i, \alpha_{\nu_i}) = 1$ *und* $\nu_i \neq \nu_j$ *für* $i \neq j$.

(2.3) *Es ist* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 2$, $\alpha_m = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$, $\alpha = 2$ *und* m *ungerade; und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *zu dem System* $\{s_1 u, \ldots, s_{m-1}u, u^2\}$.

(2.4) *Es ist* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 2$, $\alpha = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$ *und* m *ungerade; und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *zu dem System* $\{s_1 s_2, s_1 s_3, \ldots, s_1 s_m, u^\alpha\}$.

Beweis: Ist $\alpha = 1$, so ergibt sich aus Satz 1.2 durch einfache Rechnung gerade (2.2). Sei im folgenden $\alpha \geqslant 2$:

Fügen wir die Relation $u^\alpha = 1$ hinzu, so erhalten wir eine ebene diskontinuierliche Gruppe

$$G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = u^\alpha = 1\rangle,\ 2 \leqslant \alpha,\ 2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m,$$

mit dem Rang $m-1$. Nach Satz 1.3, a) tritt dann einer der folgenden zwei Fälle auf:

(2.5) Es ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 2$, $\alpha_m = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$, $\alpha = 2$ und m ungerade.

(2.6) Es ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 2$, $\alpha = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$ und m ungerade.

Wir zeigen, daß in (2.5) der Fall (2.3) von Satz 1 eintritt; es ist nach Satz 1.2 und Satz 1.4 klar, daß in (2.6) der Fall (2.4) von Satz 1 eintritt.

Es liege nun (2.5) vor:

a) Sei $m=3$. Wir schreiben G als freies Produkt $H_1 *_A H_2$ mit Amalgam A mit

$$H_1 = \langle s_2, s_3 \mid s_2^2 = s_3^{2k+1} = 1 \rangle, (k \geqslant 1),$$

$$H_2 = \langle s_1, u \mid s_1^2 = 1 \rangle \text{ und } A = \langle s_2 s_3 \rangle = \langle s_1 u \rangle.$$

In G sei eine Ordnung und eine Länge L wie in [4, § 1] definiert; die Ordnung möge der Bedingung (1.9.a) von [4, § 1] genügen. Darauf bezogen verkürzen wir $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Da x_1 bzgl. dieser Faktorisierung die Länge 1 hat, bleibt es unverändert erhalten. Mit Satz 1.1 überlegt man sich leicht, daß es einen freien Übergang von $\{x_1, x_2, x_3\}$ zu einem System $\{x_1, (s_2 s_3)^\beta, x\}$ $(\beta \geqslant 1)$ gibt.

Angenommen $\beta > 1$. Fügen wir die Relationen $u^2 = 1$, $(s_2 s_3)^\beta = 1$ hinzu, so ist die Gruppe $K_1 *_A K_2$ zyklisch, wobei

$$K_1 = \langle s_2, s_3 \mid s_2^2 = s_3^{2k+1} = (s_2 s_3)^\beta = 1 \rangle, (k \geqslant 1),$$

$$K_2 = \langle s_1, u \mid s_1^2 = u^2 = (s_1 u)^\beta = 1 \rangle \text{ und } A = \langle s_2 s_3 \rangle = \langle s_1 u \rangle .$$

Das ist aber ein Widerspruch, also $\beta = 1$.

Nach Lemma 1 gibt es einen freien Übergang von $\{u^2, s_2 s_3, x\}$ zu $\{u^2, s_2 s_3, s_1 s_2\}$ und damit auch zu $\{u^2, s_1 u, s_2 u\}$.

b) Sei $m > 3$, m ungerade. Wir schreiben G als freies Produkt $H_1 *_A H_2$ mit Amalgam mit

$$H_1 = \langle s_1, \ldots, s_{m-2} \mid s_1^2 = \ldots = s_{m-2}^2 = 1 \rangle ,$$

$$H_2 = \langle s_{m-1}, s_m, u \mid s_{m-1}^2 = s_m^{2k+1} = 1 \rangle, (k \geqslant 1) \text{ und}$$

$$A = \langle v \rangle = \langle s_1 \ldots s_{m-2} \rangle = \langle (s_{m-1} s_m u^{-1})^{-1} \rangle .$$

In G sei eine Ordnung und eine Länge L wie in [4, § 1] definiert; die Ordnung möge der Bedingung (1.9.a) von [4, § 1] genügen. Darauf bezogen verkürzen wir $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

Da x_1 bzgl. dieser Faktorisierung die Länge 1 hat, bleibt es unverändert erhalten. Nach Satz 1.1 können wir annehmen, daß einer der folgenden Fälle vorliegt:

(2.7) $L(x_i) \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$.

(2.8) Ein x_i, $i \geqslant 2$, liegt im Amalgam.

(2.9) Es liegen $p, p \geqslant 2$, der x_i in einer zu H_1 oder H_2 konjugierten Untergruppe von G, und ein Produkt in ihnen ist zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert.

(2.10) *Beh.: Kein $x_j, j \geqslant 2$, ist konjugiert zu einer Potenz von v oder von einem s_i.*

Beweis von (2.10): Angenommen, es ist ein $x_j, j \geqslant 2$, konjugiert zu einer Potenz von einem s_i. Durch Wegkürzen dieses s_i und Hinzufügen der Relation $u^2 = 1$ erhalten wir einen Widerspruch zu Satz 1.3.

Angenommen, es ist ein $x_j, j \geqslant 2$, konjugiert zu einer Potenz von v. Wir fügen die Relationen $u^2 = 1$, $v = 1$ hinzu, dann hat die Gruppe $K_1 * K_2$ mit

$$K_1 = \langle s_1, \ldots, s_{m-2} \mid s_1^2 = \ldots = s_{m-2}^2 = s_1 \ldots s_{m-2} = 1 \rangle ,$$

$$K_2 = \langle s_{m-1}, s_{m-1}, s_m, u \mid s_{m-1}^2 = s_m^{2k+1} = u^2 = s_{m-1} s_m u^{-1} = 1 \rangle ,$$

einen Rang $\leqslant m-2$ und das ist nach Satz 1.3 und Satz 1.2 ein Widerspruch. □

Damit kann insbesondere (2.8) nicht eintreten.

Es liege nun (2.7) vor: Nach (2.10) ist $L(x_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, m$; weiter liegen wegen Satz 1.3 notwendig $m-3$ der x_j in H_1 und neben x_1 zwei weitere der x_j in H_2. Bei der Darstellung von H_2 müssen auch Elemente x_j verwendet werden, die in H_1 liegen, denn sonst hätte die Gruppe $\langle s_{m-1}, s_m, u \mid s_{m-1}^2 = s_m^{2k+1} = u^2 = 1 \rangle$ einen Rang $\leqslant 2$. Somit muß sich eine von 1 verschiedene Potenz von v als Produkt von solchen x_j schreiben lassen, die in H_1 liegen, d. h. es tritt mit (2.10) ein Fall (2.9) ein. Wir können uns daher auf die Untersuchung von (2.9) beschränken.

Es liege nun (2.9) vor: Diese p Elemente liegen in H_1, denn andernfalls erhalten wir durch Hinzufügen der Relation $u^2 = 1$ einen Widerspruch zu Satz 1.4 oder (2.10).

Nach Satz 1.4 und (2.10) gibt es damit einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_m\}$ zu einem System $\{s_1 s_2, s_1 s_3, \ldots, s_1 s_{m-2}, y x_1 y^{-1}, y_1, y_2\}$ für ein $y \in G$.

Nun schreiben wir G in anderer Weise als freies Produkt mit Amalgam, nämlich: $G = N_1 *_B N_2$ mit

$$N_1 = \langle s_1, \ldots, s_{m-1} \mid s_1^2 = \ldots = s_{m-1}^2 = 1 \rangle ,$$

$$N_2 = \langle s_m, u \mid s_m^{2k+1} = 1 \rangle, (k \geqslant 1) \text{ und } B = \langle s_1 \ldots s_{m-1} \rangle = \langle u s_m^{-1} \rangle .$$

Die Länge L und die Ordnung beziehen sich nun auf diese Faktorisierung. Darauf bezogen verkürzen wir $\{s_1s_2,\ldots,s_1s_{m-2},yx_1y^{-1},y_1,y_2\}$.

Da $s_1s_2,\ldots,s_1s_{m-2}$ bzgl. dieser Faktorisierung die Länge 1 haben, bleiben sie unverändert erhalten. Weiters wird yx_1y^{-1} höchstens durch Elemente xx_1x^{-1}, $x\in G$, ersetzt. Mit Satz 1.1 und Hilfssatz 4 von [4] (Hinzufügen der Relation $u^2=1$!) überlegt man sich leicht, daß wir annehmen können, daß einer der folgenden Fälle vorliegt:

(2.11) $L(yx_1y^{-1})\leqslant 1$, $L(y_1)\leqslant 1$, $L(y_2)\leqslant 1$.

(2.12) Es liegen y_1 und y_2 in Untergruppen, die zu N_2 konjugiert sind.

(2.13) Es liegt y_1 oder y_2 in N_1, etwa y_1, und ein Produkt in $s_1s_2,\ldots,s_1s_{m-2},y_1$ ist zu einem von 1 verschiedenen Element aus B konjugiert.

(2.14) *Beh.: y_1 oder y_2 ist nicht konjugiert zu einer Potenz eines s_i.*

Beweis von (2.14): Angenommen, es ist y_1 oder y_2 zu einer Potenz von einem s_i konjugiert. Durch Wegkürzen dieses s_i und Hinzufügen der Relation $u^2=1$ ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 1.3.

(2.15) *Beh.: Es kann nicht* (2.12) *vorliegen.*

Beweis von (2.15): Angenommen, es liegen y_1 und y_2 in zu N_2 konjugierten Untergruppen. Durch Wegkürzen von N_2 erhalten wir, daß die Gruppe $\langle s_1,\ldots,s_{m-1}\,|\,s_1^2=\ldots=s_{m-1}^2=s_1\ldots s_{m-1}=1\rangle$ einen Rang $\leqslant m-3$ hat; und das ist ein Widerspruch zu Satz 1.3.

(2.16) *Beh.: Es kann nicht* (2.11) *vorliegen.*

Beweis von (2.16): Angenommen, es liegt (2.11) vor. Dann kann nicht $y_1,y_2\in N_1$ sein, denn sonst würden nach Hinzufügen der Relation $u^2=1$ alle Elemente eines Erzeugendensystems in N_1 liegen. Nach (2.15) kann auch nicht $y_1,y_2\in N_2$ sein. Damit ist $y_i\in N_2$ mit $L(y_i)=1$ für $i=1$ oder 2. Sei etwa $y_1\in N_2$ mit $L(y_1)=1$. Nach (2.15) ist $y_2\in N_1$ mit $L(y_2)=1$. Weiters ist $yx_1y^{-1}\in N_2$. Es müssen bei der Darstellung von N_2 auch Elemente verwandt werden, die in N_1 liegen. Somit muß sich eine von 1 verschiedene Potenz von $s_1\ldots s_{m-1}$ als Produkt von $s_1s_2,\ldots,s_1s_{m-2},y_1$ schreiben lassen. Dann gibt es nach Satz 1.3 und (2.14) einen freien Übergang von $\{s_1s_2,\ldots,s_1s_{m-2},yx_1y^{-1},y_1,y_2\}$ zu einem System $\{z_1,\ldots,z_{m-3},d(s_1\ldots s_{m-1})^{\nu}d^{-1},zx_1z^{-1},y_2\}, d,z\in G$, $\gamma\neq 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu (2.15); also kann (2.11) nicht vorliegen. □

Es liegt also (2.13) vor. Es ist notwendig $s_1 \ldots s_{m-1} \in \langle s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, y_1 \rangle$, da sonst eine Gruppe $\langle s_m, u \mid s_m^{2k+1} = u^2 = (u s_m^{-1})^\beta = 1 \rangle$, $\beta \geqslant 2$, zyklisch wäre. Mit Satz 1.4 und (2.14) erhalten wir nun einen freien Übergang von $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, y x_1 y^{-1}, y_1, y_2\}$ zu einem System $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, u s_m^{-1}, g x_1 g^{-1}, y_3\}$, $g \in G$.

Wir betrachten nun das System $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, u s_m^{-1}, g x_1 g^{-1}, y_3\}$. Sei $H := \langle s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2} \rangle$. Es ist $|H_1 : H| = 2$ und es lassen sich mittels $s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}$ nur Konjugierte des Quadrats $(s_1 \ldots s_{m-2})^2$ darstellen, also ist $v = s_1 \ldots s_{m-2}$ ein Restklassenvertreter von H_1 nach H und es ist $H_1 = H + vH$.

Wir dürfen damit annehmen, daß y_3 und $g x_1 g^{-1}$ mit einem Faktor aus $H_1 \setminus A$ weder beginnen noch enden. Wegen $v \in H_2$, Satz 1.3, Satz 1.4 und (2.10) können wir weiter annehmen, daß $y_3, g x_1 g^{-1} \in H_2$. Dann ist notwendig

$$H_2 = \langle v^2, u s_m^{-1}, y_3, g x_1 g^{-1} \rangle .$$

Nach Lemma 2 gibt es einen freien Übergang von $\{v^2, u s_m^{-1}, y_3, g x_1 g^{-1}\}$ zu $\{v^2, u s_m^{-1}, s_{m-1} s_m, u^2\}$, der sich zu einem freien Übergang von $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, u s_m^{-1}, y_3, g x_1 g^{-1}\}$ zu $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, u s_m^{-1}, s_{m-1} s_m, u^2\}$ erweitern läßt. Man überlegt sich leicht, daß es einen freien Übergang von $\{s_1 s_2, \ldots, s_1 s_{m-2}, u s_m^{-1}, s_{m-1} s_m, u^2\}$ zu $\{u s_1, \ldots, u s_{m-1}, u^2\}$ gibt. q. e. d.

Als unmittelbares Korollar erhalten wir

Korollar: Sei $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^2 = \ldots = s_m^2 = 1 \rangle$ *mit* $m = 2p + 1$, $(p \geqslant 1)$, *bzw.* $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^2 = \ldots = s_{m-1}^2 = s_m^{2k+1} = 1 \rangle$, $(k \geqslant 1)$, *mit* $m = 2p + 1$, $(p \geqslant 1)$. *Sei* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *mit* $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^{2q+1}$, $(q \geqslant 1)$, *bzw. mit* $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^2$ *ein Erzeugendensystem von* G.

Dann ist $H = \langle x_2, \ldots, x_m \rangle$ *freie Gruppe vom Rang* $m-1$ *mit den freien Erzeugenden* $x_2, \ldots, x_m$.

Die Antwort auf die zweite Frage gibt der folgende Satz. Der Beweis erfolgt mit ähnlichen Methoden (vgl. dazu auch [3, § 5]).

Satz 2: *Sei* $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \ldots = s_m^{\alpha_m} = 1 \rangle$ *mit* $m \geqslant 2$, $2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m$. *Sei* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *ein Erzeugendensystem von* G *mit* $x_1 = (s_1 \ldots s_m)^\alpha$, $\alpha > 0$, *und* $x_2 = h (s_1 \ldots s_m)^\beta h^{-1}$, $\beta > 0$, $h \in G$.

Dann ist $\alpha = \beta = 1$, m *gerade*, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 2$, $\alpha_m = 2k + 1$, $(k \geqslant 1)$, *und es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *zu dem System* $\{s_1 s_2, s_1 s_3, \ldots, s_1 s_{m-1}, s_m (s_1 \ldots s_m) s_m^{-1}, s_1 \ldots s_m\}$ *und weiter zu* $\{s_1, \ldots, s_{m-1}, s_m^2\}$.

Literatur

[1] GRUSHKO, J.: Über die Basen freier Produkte von Gruppen, (Russ.). Mat. Sbornik **8**, 169—182 (1940).

[2] PECZYNSKI, N., G. ROSENBERGER, und H. ZIESCHANG: Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen. Inventiones Math. **29**, 161—180 (1975).

[3] ROSENBERGER, G.: Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam. Habilitationsschrift, Hamburg 1974.

[4] ZIESCHANG, H.: Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam. Inventiones Math. **10**, 4—37 (1970).

G. ROSENBERGER
Fakultät für Mathematik der
Universität Bielefeld
Universitätsstraße
D-4800 Bielefeld,
Bundesrepublik Deutschland

F. TESSUN
Mathematisches Seminar der
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
D-2000 Hamburg 13,
Bundesrepublik Deutschland