Mh. Math. 110, 207—216 (1990)

Monatshefte für
Mathematik

Suites dont la discrépance est comparable à un logarithme

Par

Jean-Piere Borel*, Limoges

(Reçu 21 Juin 1989)

Abstract. Sequences Whose Discrepancy is Like a Logarithm. We use the notion of self-similar sequences, introduced by the author in [1], to obtain in a natural way some sequences of points in the interval [0, 1] with the property:

$$0 < \ell(U) < L(U) < \infty$$

where $L(U)$ and $\ell(U)$ stand respectively for the lim sup and the lim inf of the ratio $N \cdot D_N^*(U)/\mathrm{Log}\, N$. Here $D_N^*(U)$ is the star discrepancy of the sequence U.

1. Introduction

1.1. Soit $U = (u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de [0, 1]. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on définit l'écart au rang N, sur l'intervalle $[0, \alpha[$, de la suite U par:

$$\mathscr{E}(N, \alpha, U) = \mathscr{E}(N, \alpha) = \mathscr{A}(N, \alpha) - \alpha N$$

où $\mathscr{A}(N, \alpha) = \mathrm{card}\{1 \leq n \leq N,\ 0 \leq u_n < \alpha\}$. On définit alors la discrépance à l'origine de la suite U comme étant la suite:

$$N \to D_N^*(U) = \frac{1}{N_0} \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |\mathscr{E}(N, \alpha, U)|.$$

1.2. La question de l'ordre de grandeur de D_N^* avec N a été posée par VAN DER CORPUT, [12], qui a conjecturé que $N \cdot D_N^*$ ne pouvait rester borné. Ce résultat, montré par van AARDENNE-EHREFEST, [11], a été amélioré par ROTH, [8], puis SCHMIDT, [9] qui a montré l'existence d'une constante absolue C telle que pour toute suite U, on a:

* Cet article a été rédigé lors d'un séjour de recherche de l'auteur à l'Université de Provence, à Marseille.

$$L(U) := \limsup_{N \to \infty} \frac{N \cdot D_N^*}{\operatorname{Log} N} \geq C \tag{1}$$

La meilleure valeur de C connue actuellement est $C = 0{,}06\ldots$

1.3. On ne peut faire mieux, puisque l'on connaît de nombreuses suites telles que la lim sup donnée en (1) est finie. Citons la suite de VAN DER CORPUT (lim sup $= 1/(3 \operatorname{Log} 2)$, HABER [5]), la suite $u_n = \{n\xi\}$ où $\xi = (1 + \sqrt{5})/2$ (lim sup $= 3/(20 \operatorname{Log} \xi)$, DUPAIN [2]), ou plus généralement les suites de van der Corput généralisées (FAURE [3]) et les suites $u_n = \{n\alpha\}$, où α a ses quotients partiels constants (RAMSHAW [7]). Dans tous ces cas, la valeur de la limite supérieure est calculée. D'autres familles de suites ayant cette propriété sont connues: suites auto-similaires (voir [1]) dans certains cas, ou suites de Faure modifiées (voir [6] et [10]).

1.4. Mais dans les cas précédents où les calculs ont pu être menés à bien, on a toujours la propriété

$$\ell(U) := \liminf_{N \to \infty} \frac{N \cdot D_N^*}{\operatorname{Log} N} = 0$$

En effet, la discrépance D_N^* est très faible lorsque $N = b^n$ (suites de van der Corput généralisées en base b, n quelconque), ou $N = q_n$ dénominateur d'une réduite de α (travail de RAMSHAW).

1.5. Le but de ce travail est de construire une (en fait une famille infinie) suite U telle que l'on ait

$$0 < \ell(U) \leq L(U) < +\infty$$

La construction de ces suites repose sur la technique de construction des suites auto-similaire développée dans [1], et sur leurs propriétés.

2. Suites auto-similaires

2.1. Je me placerai ici dans un cas très particulier, le lecteur intéressé par la technique générale des construction des suites auto-similaires pouvant se reporter à [1]. Je noterai:

$\mathscr{A} = \{0, 1\}$;

$\mathscr{A}^*$ ensemble des mots sur $\mathscr{A}$ (i.e. des suites finies $\mathbf{a} = a_1 a_2 \ldots a_k$, $a_i \in \mathscr{A}$). $\underline{e}$ désignera le mot vide, et $|\mathbf{a}| = k$ la longueur du mot $\mathbf{a}$;

$E = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ mot infini sur $\mathscr{A}$ (i.e. $\varepsilon_i \in \mathscr{A}$), tel que $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 1$;

φ_0 et φ_1 les applications données par:

$$\varphi_0\colon [0, 1] \to \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad x \mapsto \frac{x}{2}; \qquad \varphi_1\colon [0, 1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad x \mapsto \frac{x+1}{2}.$$

2.2. Si $N \geq 0$ et $a \in \mathscr{A}$, $N \bullet a$ désigne le nombre de lettres ε_i, $1 \leq i \leq N$, égales à a. On a donc $N = N \bullet 0 + N \bullet 1$, et l'hypothèse faite sur E fait que l'on a toujours $N \bullet a < N$, sauf si $N = 1$ et $a = 0$, ou si $N = 0$ (alors $N \bullet a = N$: $1 \bullet 0 = 1$, $0 \bullet 0 = 0$, $0 \bullet 1 = 0$). On déduit alors de [1], théorème 2.2.

Théorème A. *Il existe une seule suite auto-similaire U associée à $(\mathscr{A}, \varphi_0, \varphi_1, E)$ et telle que $u_1 = 0$. Elle est définie par la propriété*:

$$u_1 = 0$$

$$u_n = \varphi_{\varepsilon_n}(u_{n \bullet \varepsilon_n}), \qquad \textit{si } n \geq 2.$$

Il est clair que cela définit bien, par récurrence sur n, une suite U puisque $n \bullet \varepsilon_n < n$, donc $u_{n \bullet \varepsilon_n}$ aussi. Si la suite E est explicitement donnée, cette construction se programme très facilement.

A titre d'exemple, si ε_n est le reste $(n + 1) \bmod 2$, la suite U ainsi obtenue est la suite de van der Corput.

2.3. Supposons qu'il existe M tel que

$$\forall N \geq 1, \qquad \left| N \bullet 0 - \frac{N}{2} \right| \leq M$$

Alors, d'après le Théorème 8.2 de [1], on a la majoration (avec les notations de [1], on a ici $k = 2$ et $\gamma = 1/2$):

$$L(U) \leq \frac{M}{\operatorname{Log} 2}, \tag{2}$$

majoration qui peut être stricte: dans le cas de la suite de van der Corput, $M = 1/2$).

2.4. Supposons maintenant que l'on ait:

$$\forall N \geq N_0 \quad 0 < M_1 \leq N \bullet 0 - \frac{N}{2} \leq M_2. \tag{3}$$

Théorème. *Si E vérifie* (3), *et si U lui est associée par le Théorème A, on a*:

$$0 < \frac{M_1}{2\,\mathrm{Log}\,2} \leq \ell(U) \leq L(U) \leq \frac{M_2}{\log 2} < \infty .$$

2.5. Il est clair qu'il existe des mots E vérifiant (3), par exemple le mot défini par:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

$$\varepsilon_n = (n+1) \bmod 2, \quad n \geq 6 .$$

En effet, on a alors pour $N \geq 4$:

$$N \bullet 0 = \left[\frac{N+1}{2}\right] + 1$$

et (3) est vérifiée à partir de $N_0 = 4$, avec $M_1 = 1$ et $M_2 = 3/2$.

2.6. Plus généralement, on peut representer E comme une ligne brisée dans le plan, en partant de l'origine, et en ajoutant $\vec{\imath}$ si $\varepsilon = 0$, $\vec{\jmath}$ si $\varepsilon = 1$. Il suffit alors que cette ligne reste, à partir d'un certain temps, dans une bande du plan de la forme $x - b \leq y \leq x - a$, avec $0 < a < b$, pour que (3) soit vérifiée. Si $b - a$ est grand, il y a énormément de telles lignes possibles, donc de suites E. Pour des raisons uniquement techniques, on supposera $N \bullet 0 \geq N/2$ pour tout N par la suite, ce qui revient à dire que cette ligne brisée reste dans le secteur angulaire $0 \leq y \leq x$.

3. Auto-similarité et relations sur les écarts

3.1. Le Théorème 8.2 de [1] donne une expression de l'écart $\mathscr{E}(N, u_n)$, qui dépend essentiellement du développement de u_n. Ce développement, unique ici, est associé à $(\mathscr{A}, \varphi_0, \varphi_1, E)$. C'est le mot unique $\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_m$ de $\mathscr{A}^*$ tel que:

$$u_n = \varphi_{\mathbf{a}}(0) = \varphi_{a_1} \circ \dots \circ \varphi_{a_m}(0) .$$

Il est clair, d'après le choix fait pour φ_0 et φ_1, que l'on a alors:

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2^i} .$$

La suite U est donc la suite de van der Corput, réordonnée à l'aide de la suite E.

3.2. Soit u_m le terme de la suite U défini par:

$$u_m = \varphi_{a_1}^{-1}(u_n) = \varphi_{a_2} \circ \varphi_{a_3} \circ \ldots \circ \varphi_{a_m}(0) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1}}{2^i}.$$

d'où $m = n \bullet a_1$, et soit $\varrho(N){:} = N \bullet 0 - N/2$. La formule descendante sur les écarts, donnée en [1], 7.5, s'écrit alors:

$$\mathscr{E}(N, u_n) = \begin{cases} \varrho(N) \,.\, u_m + E(N \bullet 0, u_n) & \text{si } a_1 = 0 \\ \varrho(N) \,.\, (1 - u_m) + \mathscr{E}(N \bullet 1, u_n) & \text{si } a_1 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Proposition. *Soit* $\mathbf{a} = a_1 a_2 \ldots a_j \in \mathscr{A}^*$, $u_n = \varphi_{\mathbf{a}}(0)$, *et* $N \geq 1$. *On a alors*:

$$\mathscr{E}(N, u_n) \geq \frac{1}{2} k \,.\, \varrho$$

où l'on pose:

$$\varrho{:} = \inf_{N > N_0} \varrho(N)$$

$k{:} =$ *nombre de paires* 01 *ou* 10 *dans le préfixe de longueur* j' *de* $\mathbf{a}$;

$$j'{:} = \min(j, r){:}\ \ r{:} = \left[\frac{\operatorname{Log}(N/(N_0 + 2M_2))}{\operatorname{Log} 2}\right].$$

3.3. Par hypothèse, on a $0 \leq N \bullet 0 - N/2 \leq M_2$. On a donc, puisque $N \bullet 1 = N - N \bullet 0$:

$$\forall a \in \mathscr{A}, \quad \left| N \bullet a - \frac{N}{2} \right| \leq M_2 \tag{5}$$

valable pour $N \geq 0$. En itérant cette relation, il vient pour tout mot fini $\mathbf{a} \in \mathscr{A}^*$:

$$\left| N \bullet \mathbf{a} - \frac{N}{2^j} \right| \leq 2 M_2 \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \qquad \text{avec } j = |\mathbf{a}|$$

En effet, cela s'obtient par récurrence sur j: soit $\mathbf{a} = \mathbf{a}' a_j$, et donc $|\mathbf{a}'| = j - 1$. On a alors:

$$\left|N\bullet\mathbf{a}-\frac{N}{2^j}\right|\le\left|N\bullet\mathbf{a}'\bullet a_j-\frac{N\bullet\mathbf{a}'}{2}\right|+\frac{1}{2}\left|N\bullet\mathbf{a}'-\frac{N}{2^{j-1}}\right|\le$$
$$\le M_2+\frac{2}{2}M_2\left(1-\frac{1}{2^{j-1}}\right)=2M_2\left(1-\frac{1}{2^j}\right)$$

On peut donc écrire, ce qui ne perd guère en précision surtout pour $|\mathbf{a}|$ grand:

$$\forall\mathbf{a}\in\mathscr{A}^*,\quad\left|N\bullet\mathbf{a}-\frac{N}{2^{|\mathbf{a}|}}\right|\le 2M_2 \tag{6}$$

3.4. Le choix de r fait dans le lemme entraîne donc, d'après (6):

$$\forall\,\mathbf{a}\in\mathscr{A}^*,\quad |\mathbf{a}|\le r\Rightarrow N\bullet\mathbf{a}\ge N_0 \tag{7}$$

En effet, on a:

$$N\bullet\mathbf{a}\ge\frac{N}{2^{|\mathbf{a}|}}+2M_1\ge\frac{N}{2^r}+2M_1\ge N_0.$$

3.5. Lemme. *Soit* $\mathbf{a}\in\mathscr{A}^*$, *tel que* 01 *ou* 10 *est préfixe de* $\mathbf{a}$. *Soit* $u_n=\varphi_{\mathbf{a}}(0)$. *On a alors*:

$$\mathscr{E}(N,u_n)\ge\frac{\varrho}{2}+\mathscr{E}(N\bullet a_1,\,u_{n\bullet a_1})\quad si\quad N\ge N_0.$$

Démonstration. Si $a_1a_2=01$, $u_m=\varphi_{a_2}\circ\ldots\circ\varphi_{a_m}(0)$ appartient à I_1, donc $u_m\ge 1/2$. D'où le résultat. De même, si $a_1a_2=10$, u_m appartient à I_0, donc $1-u_m\ge 1/2$. ■

3.6. *Démonstration de la proposition.* Elle se montre par récurrence sur N tant que $r=0$: en effet, en utilisant $\varrho(\,.\,)\ge 0$ dans les formules (4), on obtient:

$$\forall N\ge 0,\qquad\forall N\ge 1,\qquad\mathscr{E}(N,u_n)\ge 0$$

Supposons maintenant $r\ge 1$. Soit $j':=\min(j,r)$ et, pour $1\le i\le j'$:

$$N_i:=N\bullet\mathbf{a}_i;\qquad N_0:=N$$
$$n_i:=n\bullet\mathbf{a}_i;\qquad n_0:=n$$

où $\mathbf{a}_i$ est le préfixe de longueur i du mot $\mathbf{a}'$ (ou de $\mathbf{a}$ ...). On peut alors utiliser (4) en prenant pour (N,n) les valeurs successives (N_i,n_i), $0\le i\le j'-1$, et en utilisant les propriétés:

$$u_{n_i} = \varphi_{\mathbf{a}_i'}(0) \quad \text{avec} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_i', \text{ donc } \mathbf{a}_i' \text{ commence par } a_{i+1}$$

$$N_i \bullet a_{i+1} = (N \bullet \mathbf{a}_i) \bullet a_{i+1} = N \bullet \mathbf{a}_{i+1} = N_{i+1}$$

$$n_i \bullet a_{i+1} = n_{i+1}.$$

Or on a:

$$\mathscr{E}(N \bullet a_{j'}, u_{n \bullet a_{j'}}) \geq 0$$

et à chaque étape:

$$\mathscr{E}(N \bullet \mathbf{a}_i, u_{n \bullet \mathbf{a}_i}) \geq \mathscr{E}(N \bullet a_{i+1}, u_{n \bullet a_{i+1}}) \quad \text{en général,} \quad 0 \leq i \leq j' - 1$$

$$\mathscr{E}(N \bullet \mathbf{a}_i, u_{n \bullet \mathbf{a}_i}) \geq \frac{\varrho}{2} + \mathscr{E}(N \bullet a_{i+1}, u_{n \bullet a_{i+1}}) \quad \text{lorsque } \mathbf{a}_i \text{ commence par 01 ou 10.}$$

En effet, $|\mathbf{a}_i| = i \leq j' \leq r$, donc $N \bullet \mathbf{a}_i \geq N_0$, et on peut appliquer le lemme. Or k est justement égal, d'après sa définition, au nombre d'indices i, $a \leq i \leq j' - 1$, tel que $\mathbf{a}_i$ commence soit par 01, soit par 10. donc on a, en prenant $i = 0$:

$$\mathscr{E}(N, u_n) \geq k\,\frac{\varrho}{2} + \mathscr{E}(N \bullet \mathbf{a}_j, u_{n \bullet \mathbf{a}_j}) \geq k\,\frac{\varrho}{2}.$$

D'où la proposition. ■

3.7. Il est clair que l'on peut être plus précis dans la minoration de $\mathscr{E}(N, u_n)$, par exemple en affinant le lemme, en y faisant intervenir le nombre de zéros qui commencent **a**, ou le nombre de 1. On n'y gagne guère, puisque $k\varrho$ est l'ordre de grandeur de $\mathscr{E}(N, u_n)$ dans les cas considérés ici.

4. Preuve du théorème

4.1. Ici, les écarts $\mathscr{E}(N, u_n)$ sont toujours positifs. On a donc:

$$N \cdot D_N^*(U) = \max_{1 \leq n \leq N} (\mathscr{E}(N, u_n) + 1). \tag{8}$$

En effet, la fonction $x \mapsto \mathscr{E}(N, u_n)$ est linéaire par morceaux, a tous ses sauts aux points u_n, $1 \leq n \leq N$, et saute de $\mathscr{E}(N, u_n)$ à $\mathscr{E}(N, u_n) + 1$ en un tel point.

4.2. De la même façon que l'on obtient (7), on a:

$$\left.\begin{array}{l} n > N \\ |\mathbf{a}| < r' := \left\lceil \dfrac{\operatorname{Log}(N/(2+2M_2))}{\operatorname{Log} 2} \right\rceil \end{array}\right\} \Rightarrow n \bullet \mathbf{a} \geq 2.$$

Soit maintenant $u_n = \varphi_{\mathbf{a}}(0)$. On a alors $u_{n \bullet \mathbf{a}} = 0 = u_1$, c'est-à-dire $n \bullet a = 1 < 2$. Donc:

$$|\mathbf{a}| < r' := \left\lceil \frac{\operatorname{Log}(N/(2+2M_2))}{\operatorname{Log} 2} \right\rceil \Rightarrow \varphi_{\mathbf{a}}(0) = u_n \quad \text{avec} \quad n \leq N. \tag{9}$$

4.3. Soit $N \geq N_0 + 2M_2$, r' défini ci-dessus, et $\mathbf{a} := 0101010\ldots$ mot de longueur r' préfixe de la suite infinie de période 01. En reprenant les notations définies en 3.2 dans la proposition, on a $r' \geq r$, donc $j' = r$ et $k = r - 1$. Soit $u_n = \varphi_{\mathbf{n}}(0)$. On a donc $1 \leq n \leq N$ d'aprés (9), et (8) entraîne:

$$N \cdot D_N^*(U) \geq (\mathscr{E}(N, u_n) + 1) \geq \frac{1}{2} k M_1 \geq \frac{r-1}{2} M_1.$$

Comme $r \sim \operatorname{Log} N/\operatorname{Log} 2$ quand N tend vers $+\infty$, cela donne le résultat énoncé. ■

5. Quelques remarques

5.1. On peut remarquer que, si on reprend la démonstration de la proposition 3.2 dans le cas particulier du mot $\mathbf{a} = 0101010\ldots$ utilisé en 4.3, les u_m et les $1 - u_m$ qui apparaissent dans les formules tirées de (4) sont voisins de 2/3. On obtient alors:

$$\mathscr{E}(N, u_n) \geq \frac{2}{3} k \varrho + \text{reste}$$

le reste étant un o(k). La démonstration est cependant rendue plus technique, ce qui est lié à la présence du reste (ici de signe non constant). Cela montre que l'on a en fait, sous les hypothèses du théorème:

$$\frac{2M_1}{3 \log 2} \leq \ell(U) \leq L(U) \leq \frac{M_2}{2 \operatorname{Log} 2}.$$

5.2. Pour la suite E particulière donnée en 2.5, on a donc:

$$\frac{2}{3\,\mathrm{Log}\,2} \le \ell(U) \le L(U) \le \frac{3}{2\,\mathrm{Log}\,2}$$

En utilisant les résultats connus sur la suite de van der Corput (travaux de FAURE [4] sur les écarts), on peut montrer que l'on a:

$$\ell(U) = \frac{2}{3\,\mathrm{Log}\,2}; \qquad L(U) = \frac{1}{\mathrm{Log}\,2}$$

(c'est le mot $\mathbf{a} = 0101010\ldots$ qui joue le rôle essentiel...), résultat que je ne montrerai pas ici. Ces valeurs de ℓ et L sont en fait translatées de celles de la suite de van der Corput, de $2/(3\,\mathrm{Log}\,2)$.

5.3. Tout ce qui s'est fait ici peut se généraliser à un alphabet $\mathscr{A}$ et ayant k lettres, l'hypothèse (3) pouvant devenir par exemple (cf [1] pour les notations):

$$\exists\, a \in \mathscr{A},\ \forall N \ge N_0, \qquad 0 < M_1 \le \sum_{a' \le a} N \bullet a' - N \cdot \sum_{a' \le a} |I_a| \le M_2.$$

5.4. Les propriétés d'auto-similarité ne peuvent conduire à des suites telles que $\ell(U) = L(U) < +\infty$. On peut cependant se demander s'il existe de telles suites, et si la réponse est négative, chercher à évaluer:

$$\inf_{L(U) < \infty} \{L(U) - \ell(U)\}.$$

Ce problème, revenant à généraliser [9], paraît donc très difficile.

Je tiens à remercier ici le Professeur H. FAURE, avec lequel j'ai eu de nombreuses et intéressantes conversations sur les questions relatives à la recherche des bonnes discrépances, et qui m'a encouragé à écrire cet article.

Bibliographie

[1] BOREL, J.-P.: Self similar measures and sequences. J. Number Theory **31**, 208—241 (1989).

[2] DUPAIN, Y.: Discrépance à l'origine de la suite $(n \cdot (1 + \sqrt{5})/2)$. Ann. Instit. Fourier **29**, 81—106 (1979).

[3] FAURE, H.: Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension un). Bull. Soc. Math. France **109**, 143—182 (1981).

[4] FAURE, H.: Etude des restes pour les suites de van der Corput généralisées. J. Number Theory **16**, 376—394 (1983).

[5] HABER, H.: On a sequence of points of interest for numerical quadrature. J. Res. Nat. Bur. Standards sect B **70**, 127—134 (1966).

[6] LAPEYRE, B., PAGES, G.: Familles de suites à discrépance faible obtenues par itération de transformations de [0, 1]. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris **308**, 507—509 (1989).

[7] RAMSHAW, L.: On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number. J. Number Theory **13**, 138—175 (1981).

[8] ROTH, K. F.: On irregularities of distribution. Mathematika **1**, 73—79 (1954).

[9] SCHMIDT, W. M.:Irregularies of distributions VII. Acta Arith. **21**, 45—50 (1972).

[10] THOMAS, A.: Discrépance en dimension 1. Ann. Fac. Sci. Toulouse **10**, 369—399 (1989).

[11] VAN AARDENNE-EHRENFEST, T.: Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval. Indag. Math. **7**, 71—76 (1945).

[12] VAN DER CORPUT, J. G.: Verteilungsfunctionnen I et II. Proc. Akad. Amsterdam **38**, 813—821 et 1058—1066 (1935).

J. P. BOREL
U.F.R. des Sciences
123 av. Albert Thomas
F-87060 Limoges Cedex, France