Mh. Math. 101, 227–243 (1986)

Monatshefte für
Mathematik

Die metrische Theorie der linearen Komplexbündel vom Typ 1 des einfach isotropen Raumes $J_3^{(1)}$

Von

Hans Sachs, Leoben

(Eingegangen am 6. März 1985; in modifizierter Fassung am 5. August 1985)

Herrn em. o. Prof. Dr. W. Wunderlich zum 75. Geburtstag gewidmet

Abstract. The Metric Theory of the Bundles of Linear Line Complexes of Type 1 of the Simply Isotropic Space $J_3^{(1)}$. According to K. STRUBECKER ([18]—[21]) a three dimensional real affine space with the metric $ds^2 = dx^2 + dy^2$ is called a simply isotropic space $J_3^{(1)}$. In $J_3^{(1)}$ exist 41 types of bundles of linear line complexes. In this paper we study the metric theory of a bundle of type 1. Especially we investigate the congruence of axis, we give some isotropic and affine results and we study the complementary bundle.

Wie in [15] gezeigt, stellt unter den 41 Typen linearer Komplexbündel des einfach isotropen Raumes $J_3^{(1)}$ der Typus 1 den allgemeinen Typ dar. Hierbei liegt genau dann der *Typ* 1 vor, wenn die Fernkurve c des Gebüschachsenregulus Φ_0 eine *D-Ellipse* ist, d. h. ein Kegelschnitt ist, der zu einer Ellipse metrisch-dual ist, wenn man beachtet, daß in der Fernebene ω des $J_3^{(1)}$ eine dual-euklidische Metrik herrscht. Ein Bündel dieses Typs wird nach ([15], S. 188) durch drei *Fundamentalinvarianten* k_A, k_B, k_C beschrieben [1]. Gemäß der hervorragenden Bedeutung der Theorie der linearen Komplexmannigfaltigkeiten in der *Kinematik* und *Statik* (vgl. [2], [22] und [23]) und der zunehmenden Tendenz, Begriffe dieser Art auch in *nichteuklidischen Räumen* zu untersuchen (vgl. [1], S. 433f., [3], [10]—[16]), soll in dieser Note die metrische Theorie der Komplexbündel vom Typ 1 im einfach isotropen Raum systematisch dargestellt werden.

[1] Im folgenden beziehen wir uns stets auf die Bezeichnungen und Resultate aus [15].

1. Die Achsenkongruenz des Komplexbündels

Die Menge der Achsen der Gewinde eines linearen Komplexbündels vom Typ 1 ist eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit, die als *Achsenkongruenz* $\mathcal{K}$ bezeichnet werden möge. Für viele Fragen der Praxis ist gerade die Verteilung der Gewindeachsen, die im folgenden untersucht werden soll, von großer Bedeutung (vgl. [23], 303f.). Um $\mathcal{K}$ zu beschreiben, beachten wir, daß aus der *natürlichen Darstellung* (1.14) des Bündels in [15], S. 188, zunächst folgt

$$\bar{g}_6 - k_C \bar{g}_3 = 0, \tag{1.1}$$

d. h. die Achsen liegen in dem vollisotropen Gewinde (1.1) vom Parameter k_C. Andererseits erhält man aus (1.4) in [15] die beiden Gleichungen $\frac{\bar{g}_4}{\bar{g}_1} = k_A - k$, $\frac{\bar{g}_5}{\bar{g}_2} = k_B - k$ und hieraus

$$(k_B - k_A)\bar{g}_1\bar{g}_2 + \bar{g}_2\bar{g}_4 - \bar{g}_1\bar{g}_5 = 0. \tag{1.2}$$

Die Gleichung (1.2) beschreibt einen *speziellen quadratischen Kettenkomplex*, der insbesondere von J. CARDINAAL (vgl. [5]) ausführlich untersucht wurde; seine Komplexkurven sind Parabeln. Da $\mathcal{K}$ als Schnitt von (1.1) mit (1.2) entsteht, haben wir den

Satz 1: *Die Achsenkongruenz $\mathcal{K}$ eines linearen Komplexbündels vom Typ* 1 *des einfach isotropen Raumes ist von der Ordnung und Klasse* 2 *und läßt sich als Schnitt eines vollisotropen Gewindes vom Parameter k_C mit dem quadratischen Kettenkomplex* (1.2) *erzeugen.*

Um $\mathcal{K}$ geometrisch zu beschreiben, muß noch für (1.2) eine *geometrische Erzeugungsweise* angegeben werden. Es gilt der

Satz 2: *Der quadratische Komplex* (1.2) *läßt sich als Menge der Erzeugendennormalen eines Plücker-Konoids Ψ gewinnen, das die Achsen $\bar{G}$ und G^* der Fundamentalgewinde K_A und K_B zu Mittelerzeugenden hat und dessen doppelte Leitgerade die vollisotrope Gerade durch den Schnittpunkt von $\bar{G}$ und G^* ist. Der Abstand der beiden Torsallinien von Ψ beträgt $2h := k_A - k_B$.*

Beweis: Wird ein Plücker-Konoid Ψ in der Darstellung

$$\mathfrak{x}(r, \varphi) = \{0, 0, h \sin 2\varphi\} + r\{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\} \tag{1.3}$$

vorgegeben, wobei $2h$ den Abstand der Torsallinien bezeichnet, dann lauten die Plücker-Koordinaten von Ψ

$$q_1 : \ldots : q_6 = \cos\varphi : \sin\varphi : 0 : -h\sin\varphi\sin 2\varphi : h\cos\varphi\sin 2\varphi : 0 \,. \tag{1.4}$$

Für eine Gerade $p(p_1 : \ldots p_6)$, die eine Erzeugende (1.4) orthogonal schneidet, gilt einerseits die *Schnittbedingung*

$$\begin{aligned}\Omega(p,q) = & -h p_1 \sin\varphi \sin 2\varphi + h p_2 \cos\varphi \sin 2\varphi + \\ & + p_4 \cos\varphi + p_5 \sin\varphi = 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

und andererseits die *Orthogonalitätsbedingung*

$$p_1 \cos\varphi + p_2 \sin\varphi = 0 \,. \tag{1.6}$$

Aus beiden Bedingungen entsteht mit $p_i = \bar{q}_i (i = 1, \ldots, 6)$ und $2h := k_A - k_B$ die Gleichung (1.2). Das Plücker-Konoid Ψ besitzt ersichtlich die Achse $\bar{G}(1:0:0:0:0:0)$ des Gewindes K_A und die Achse $G^*(0:1:0:0:0:0)$ des Gewindes K_B als Mittelerzeugenden.

w. z. z. w.

Die Sätze 1 und 2 liefern nun die Möglichkeit, einerseits $\mathcal{K}$ mit Methoden der *Darstellenden Geometrie* in den Griff zu bekommen und andererseits $\mathcal{K}$ eingehender zu studieren. Was die darstellend-geometrische Behandlung betrifft, deren Methodik in den *hervorragenden Darstellungen* [28] und [29] *des Jubilars* nachgelesen werden kann, so können die beiden durch einen Raumpunkt P verlaufenden Kongruenzstrahlen wie folgt ermittelt werden:

1) Der *Komplexkegel Γ* von P ist ein *quadratischer Kegel*, der als Menge der euklidischen (isotropen) Normalen von P auf die Erzeugenden von Ψ erhalten werden kann. Die Menge der *Normalenfußpunkte* ist ein Kreis *k elliptischen Typs* des einfach isotropen Raumes, d. h. eine Ellipse in einer Ebene ε, die bei Normalprojektion auf die Grundrißebene $z = 0$ als Kreis erscheint. Die Ebene ε läßt sich sofort durch eine Fallgerade festlegen (vgl. [8], S. 207f.).

2) Das vollisotrope Gewinde (1.1), dessen Gleichung sich schon in *euklidischer Normalform* befindet, besitzt die doppelte Leitgerade von Ψ als *euklidische Gewindeachse a* und k_C als *euklidischen Gewindeparameter*. Die Nullebene $\Pi(P)$ des Punktes P läßt sich somit nach der bekannten Möbius-Formel $k_C = d\tan\lambda$ (vgl. [7], S. 87) ermitteln, wobei d den euklidischen Abstand des Punktes P von a und λ den Neigungswinkel von Π gegen a bezeichnet. Nach Einmessen einer Geraden l durch P, die auf der Normalen von P auf a senkrecht steht und gegen a unter dem Winkel λ geneigt ist, liegt Π eindeutig fest.

3) Die Schnittgerade s von ε mit Π kann konstruiert und mit k geschnitten werden, was im algebraischen Sinn die Schnittpunkte 1 und 2 liefert. Dies kann besonders zweckmäßig im Grundriß ausgeführt werden, wo s' mit dem Kreis k' zu schneiden ist. Die Verbindungsgeraden von 1 bzw. 2 mit P sind die gesuchten Kongruenzstrahlen durch P.

Die beschriebene Methode zeigt einerseits, wie die durch einen Punkt P laufenden Kongruenzstrahlen mit *Zirkel* und *Lineal konstruierbar* sind, sie liefert andererseits auch die Möglichkeit, die *Realitätstypen* der Kongruenzstrahlen durch einen Punkt P zu überblicken. Dazu benötigen wir allerdings vorher eine Aussage über die Größen k_A, k_B, k_C, die gleichzeitig eine hübsche Kennzeichnung des Fundamentalgewindes K_A über eine *Extremaleigenschaft* liefert.

Satz 3: *Für ein Komplexbündel vom Typ* 1 *des einfach isotropen Raumes besitzt das Fundamentalgewinde K_A — das zum singulären Punkt A des konjugiert-komplexen Geradenpaares im Kegelschnittbüschel $\{c, f_{12}\}$ gehört — einen extremalen Gewindeparameter. Es ist k_A maximal (minimal), wenn der Parameter k_C des einzigen vollisotropen Gewindes des Bündels negativ (positiv) ist.*

Beweis: Die Funktion $k(\psi,\chi) = k_A \cos^2\psi + k_B \sin^2\psi + k_C\chi^2$ (vgl. [15], (1.13)), hat wegen $\dfrac{\partial k}{\partial\psi} = (k_B - k_A)\sin 2\psi = 0$, $\dfrac{\partial k}{\partial\chi} = 2k_C\chi = 0$ die kritischen Punkte $(0,0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 0)$ und $(3\pi/2, 0)$, denn es gilt stets $k_A \neq k_B$. Weiter gilt wegen ([15], (1.9)) $\Delta := k_{\psi\psi}k_{\chi\chi} - k_{\psi\chi}^2 = 4k_C^2 \dfrac{a-1}{b}\cos 2\psi$ und wegen[3] $0 < a < 1$ und $b < 0$ ist $\operatorname{sgn}\Delta = \operatorname{sgn}\cos 2\psi$. Beachtet man noch $\dfrac{\partial^2 k}{\partial_\chi^2} = 2k_C$, so folgt hieraus die Behauptung, wobei die Werte $(0,0)$ und $(\pi, 0)$ die zu K_A gehörige Gewindeachse $\bar{G}$ liefern. Wegen $\Delta < 0$ liegt für $(\pi/2, 0)$ bzw. $(3\pi/2, 0)$ in der Achse G^* kein Extremum vor. w. z. z. w.

Aus dem Satz 3 ziehen wir noch die wichtige *Folgerung:*
Es gilt stets

$$k_A - k_B > 0 \text{ für } k_C < 0 \text{ bzw.} \tag{1.7a}$$

$$k_A - k_B < 0 \text{ für } k_C > 0. \tag{1.7b}$$

---

[2] Wir bezeichnen mit f_1, f_2 die absoluten Geraden und mit F den absoluten Punkt des isotropen Raumes $J_3^{(1)}$. Die Figur 1 in ([15], S. 186) zeigt die geometrische Situation, die dem Satz 3 zugrunde liegt.

[3] Bezüglich dieser Voraussetzung vgl. ([15], 185f.).

Nun kann die Achsenkongruenz $\mathscr{K}$ näher studiert werden! Bezeichnen wir die Punkte

$$\begin{aligned} &F_1\left(i\sqrt{(k_B-k_A)\,k_C},0,0\right) \quad \text{und}\\ &F_2\left(-i\sqrt{(k_B-k_A)\,k_C},0,0\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

die auf der Mittelerzeugenden $\bar{G}$ von Ψ liegen als *Fokalpunkte* 1. *Art*, und nennt man die auf G^* gelegenen Punkte

$$\begin{aligned} &F_3\left(0,\sqrt{-k_C(k_A-k_B)},0\right) \quad \text{und}\\ &F_4\left(0,-\sqrt{-k_C(k_A-k_B)},0\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Fokalpunkte 2. *Art*, dann gilt der

Satz 4: *Durch jeden Punkt $P \notin \Psi$ laufen im algebraischen Sinn genau zwei Kongruenzstrahlen. Die Mittelerzeugenden $\bar{G}$ und G^* von Ψ gehören zu $\mathscr{K}$. Durch die Kuspidalpunkte $T_1, T_2 \in a$ existiert genau eine Gerade aus $\mathscr{K}$, während durch die Fokalpunkte erster bzw. zweiter Art ein ganzes Büschel komplexer bzw. reeller Strahlen aus $\mathscr{K}$ verläuft. Durch alle weiteren Punkte von Ψ laufen genau zwei reelle, verschiedene Geraden von $\mathscr{K}$.*

Beweis: Die erste Aussage folgt daraus, daß der Komplexkegel Γ eines Punktes $P \notin \Psi$ von der Nullebene $\Pi(P)$ nach zwei Erzeugenden im algebraischen Sinn geschnitten wird. Liegt P auf der doppelten Leitgeraden von Ψ und ist P von den Kuspidalpunkten T_1, T_2 verschieden, dann zerfällt Γ in zwei Geradenbüschel; diese Büschel mit Zentrum P liegen in den Normalebenen ν_1 und ν_2, die man in P auf die durch P laufenden Erzeugenden e_1 und e_2 legen kann. Da $\Pi(P)$ eine Normalebene von a in P ist, folgt sofort die zweite Aussage des Satzes. Für $P = T_1$ oder $P = T_2$ gilt $\nu_1 = \nu_2$, womit die Behauptung über die Kuspidalpunkte gezeigt ist. Gilt schließlich $P \in \Psi$, $P \notin a$, dann zerfällt Γ in zwei Geradenbüschel mit Zentrum P, von denen das eine in der Normalebene $\nu(P)$ der durch P laufenden Erzeugenden liegt, und das andere in einer allgemeinen Trägerebene η durch P liegt. Die Ebene η enthält nur dann die Erzeugende e des Punktes P, wenn e von einer weiteren Erzeugenden $\bar{e} \in \Psi$ orthogonal geschnitten wird. Dies trifft genau für das Erzeugendenpaar $\bar{G}, G^*$ zu. Wir haben somit gesehen, daß durch jeden Punkt $P \in \Psi$, $P \notin a$, $P \notin \bar{G}$, G^* genau zwei reelle Kongruenzstrahlen laufen, nämlich die Schnittgeraden $\Pi(P)\nu(P)$ und $\Pi(P)\eta(P)$. Somit bleibt nur mehr der Fall zu diskutieren, ob Punkte $P \in \bar{G}$ bzw. $P \in G^*$ existieren, für die $\Pi(P) = \eta(P)$ gilt. Berechnet man die Nullebene $\Pi(P)$ für $P(x_0, 0, 0)$, so stellt sich

$$z = \frac{1}{k_C} x_0 y \tag{1.10}$$

ein. Andererseits kann man auch die Gleichung von $\eta(P_0)$ rasch gewinnen, wenn man beachtet, daß die Bedingungen (1.5) und (1.6) für die mit P inzidenten Geraden $p(p_j)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ erfüllt sein müssen. Man findet so für η

$$z = \frac{1}{x_0}(k_A - k_B) y \, . \tag{1.11}$$

Aus (1.10) und (1.11) folgt nun, daß $\Pi(P)$ und $\eta(P)$ genau für $\frac{1}{k_C} x_0 = \frac{1}{x_0}(k_A - k_B)$ übereinstimmen, d.h. in den Fokalpunkten 1. Art (1.8). Das Normalenbüschel um P in η stimmt dort mit dem Büschel der Gewindestrahlen um P überein. Analog zeigt man die Existenz der reellen Fokalpunkte $F_3, F_4 \in G^*$. w.z.z.w.

Eine gute Einsicht in die Kongruenz $\mathcal{K}$ erhält man, wenn man jene *Regelflächen* Φ_{k_0} studiert, die von Achsen $\bar{g}$ zu *konstantem Gewindeparameter* k_0 gebildet werden; $k_0 = 0$ liefert ja den Gebüschachsenregulus Φ_0. Wird (1.13) in [15] nach χ aufgelöst, so findet man aus (1.14) in [15] als Parameterdarstellung der gesuchten Flächen Φ_{k_0}

$$\mathfrak{x}(\psi, t) = \begin{cases} 0 & + t\cos\psi \\ -\dfrac{\sqrt{k_C}}{\cos\psi}\sqrt{k_0 - k_A\cos^2\psi - k_B\sin^2\psi} & + t\sin\psi \\ \tan\psi\,[k_B - k_0) + t\dfrac{1}{\sqrt{k_C}}\sqrt{k_0 - k_A\cos^2\psi - k_B\sin^2\psi} & \end{cases} \tag{1.12}$$

wobei t einen auf den Erzeugenden von Φ_{k_0} laufenden Parameter bezeichnet. Eine längere Rechnung liefert für $k_0 \neq k_A$, $k_0 \neq k_B$ die *algebraische Flächengleichung*

$$\frac{x^2}{k_C(k_0 - k_B)} + \frac{y^2}{k_C(k_0 - k_A)} - \frac{z^2}{(k_0 - k_A)(k_0 - k_B)} = 1 \, . \tag{1.13}$$

Die Flächen Φ_{k_0} sind daher *Reguli* in den *einschaligen Hyperboloiden*

(1.13). Die Quadriken (1.13) sind *konzentrisch* mit dem Mittelpunkt M im Koordinatenursprung; M ist isotrop-invariant erklärt und soll als *Mittelpunkt* des Komplexbündels bezeichnet werden. Die Gewindeachsen $\bar{G}$, G^* und die Doppelgerade a von Ψ sind die isotrop-invariant erklärten *Hauptachsen* aller Flächen Φ_{k_0}. Die *Fernkurven* der Flächen Φ_{k_0}, die durch

$$x_0 = (k_0 - k_A)\,x_1^2 + (k_0 - k_B)\,x_2^2 - k_C x_3^2 = 0 \tag{1.14}$$

erfaßt werden, enthalten die vier Schnittpunkte $S_1, \ldots, S_4$ von c mit den absoluten Geraden $\{f_1, f_2\}$, so daß die Quadriken Φ_{k_0} als *konzyklisch* im isotropen Sinn anzusprechen sind. Es bleiben noch die beiden Sonderfälle $k_0 = k_A$ bzw. $k_0 = k_B$ zu diskutieren:

a) Gilt $k_0 = k_A$, dann vereinfacht sich (1.12) zu

$$\left\{\begin{aligned} x &= && + t\cos\psi \\ y &= \mp\sqrt{k_C}\sqrt{k_A - k_B}\tan\psi && + t\sin\psi \\ z &= (k_B - k_A)\tan\psi && \pm t\frac{1}{\sqrt{k_C}}\sqrt{k_A - k_B}\sin\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

Dies sind zwei *konjugiert-komplexe Geradenbüschel* mit den Zentren in den Fokalpunkten F_1, F_2 erster Art (vgl. (1.8)). Trägerebenen der beiden Büschel sind die *Fokalebenen*

$$\pm y\sqrt{k_A - k_B} = iz\sqrt{|k_C|}\,. \tag{1.16}$$

b) Gilt $k_0 = k_B$, dann vereinfacht sich (1.12) zu

$$\left\{\begin{aligned} x &= && + t\cos\psi \\ y &= \pm\sqrt{k_C}\sqrt{k_B - k_A} && + t\sin\psi \\ z &= && \pm t\frac{1}{\sqrt{k_C}}\sqrt{k_B - k_A}\cos\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{1.17}$$

Dies sind wegen (1.7a, b) zwei *reelle Geradenbüschel* mit den Zentren in den Fokalpunkten F_3, F_4 zweiter Art (vgl. (1.9)).

Trägerebenen der beiden Büschel sind die reellen Fokalebenen

$$\pm x\sqrt{k_A - k_B} = z\sqrt{-k_C}\,. \tag{1.18}$$

Die Schnitte der Flächen Φ_{k_0} mit der *Grundrißebene* Π_1 ($z = 0$) sind Kegelschnitte, die auf der Achse G^* stets *reelle Scheitel*

$$S_{1,2}(0, \pm\sqrt{k_C(k_0 - k_A)}, 0) \tag{1.19}$$

besitzen, wie man aus (1.7a, b) und (1.13) folgert. Ist $k_C < 0$, so liegen für $k_0 < k_B$ ($k_0 > k_B$) Ellipsen (Hyperbeln) vor, während $k_C > 0$ für $k_0 < k_B (k_0 > k_B)$ Hyperbeln (Ellipsen) liefert. In beiden Fällen zeigt eine einfache Rechnung, daß die Fokalpunkte F_1, F_2 bzw. F_3, F_4 die komplexen bzw. reellen *euklidischen Brennpunkte* aller dieser Kegelschnitte sind. Wir fassen zusammen im

Satz 5: *Die Gewindeachsen aller nichtisotroper Gewinde von konstantem Gewindeparameter $k_0 \neq k_A$, k_B eines Komplexbündels vom Typ 1 des einfach isotropen Raumes bilden Reguli auf konzentrischen und konzyklischen einschaligen Hyperboloiden mit den Geraden $\bar{G}$, G^* und a als Hauptachsen. Die Gewindeachsen mit $k_0 = k_A$ bzw. $k_0 = k_B$ bilden je zwei konjugiert-komplexe bzw. reelle Geradenbüschel in den Fokalebenen, wobei die Büschelzentren die Fokalpunkte sind, die gleichzeitig die gemeinsamen Brennpunkte der konfokalen Kegelschnitte $\Phi_{k_0} \cap \Pi_1$ sind.*

2. Isotrope und affine Resultate

Die Reguli (1.12) sind Regelflächen des einfach isotropen Raumes vom Typ V gemäß der Klassifikation von W. O. VOGEL (vgl. [24], S. 198), wobei die in Π_1 gelegenen Kegelschnitte $\Phi_{k_0} \cap \Pi_1$ ihre Striktionslinien sind. Wird eine Regelfläche Φ dieses Typs durch

$$\mathfrak{x}(\psi, t) = \mathfrak{y}(\psi) + t\,\mathfrak{e}(\psi) \text{ mit } \bar{\mathfrak{e}}^2 = 1 \tag{2.1}$$

beschrieben — wobei $\mathfrak{y}(\psi)$ eine Leitkurve der Fläche ist und $\mathfrak{e}$ einen isotropen Einheitsvektor auf den Erzeugenden von Φ bezeichnet —, dann kann gemäß ([9], S. 13) eine Differentialinvariante 1. Ordnung, der *Drall* durch

$$\delta_I = \frac{\operatorname{Det}(\dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})}{\dot{\bar{\mathfrak{e}}}^2} \tag{2.2}$$

erklärt werden. Nach einiger Rechnung folgt mit (2.2) für die Regelflächen Φ_{k_0} aus (1.12)

$$\delta_I = \frac{(k_B - k_0)(k_0 - k_A)}{k_0 - k_A\cos^2\psi - k_B\sin^2\psi}\,. \tag{2.3}$$

Bezeichnet $d = d(\bar{g}, M)$ den Abstand einer Erzeugenden $\bar{g} \in \Phi_{k_0}$ vom Bündelmittelpunkt M, dann läßt sich (2.3) in der geometrisch einsichtigeren Gestalt

$$\delta_I = \frac{k_C(k_B - k_0)(k_0 - k_A)}{d^2} \tag{2.4}$$

schreiben. Hieraus folgt der

Satz 6: *Der Drall δ_I in einer Gewindeachse $\bar{g}$ eines Komplexbündels vom Typ* 1 *des $J_3^{(1)}$ auf der entsprechenden Trägerfläche Φ_{k_0} ist proportional zum Reziprokwert des Abstandsquadrates vom Bündelmittelpunkt. Die Invariante k_A (k_B) läßt sich als Drall in den Nebenscheitelerzeugenden (Hauptscheitelerzeugenden) des Gebüschachsenregulus deuten.*

Beweis: Es bleibt noch die zweite Aussage des Satzes zu zeigen. Hierzu beachten wir, daß sich für $k_0 = 0$ die Formel (2.4) zu

$$\delta_I(\Phi_0) = -\frac{k_A k_B k_C}{d^2} \tag{2.5}$$

vereinfacht. Berechnet man an Hand von (1.13) die auf G^* bzw. $\bar{G}$ gelegenen Scheitel von $\Phi_0 \cap \Pi_1$, so erhält man

$$S_{1,2}(0, \pm\sqrt{-k_A k_C}) \tag{2.6a}$$

$$S_{3,4}(\sqrt{-k_B k_C}, 0)\,. \tag{2.6b}$$

Da für $k_C < 0$ stets $k_A > 0, k_B > 0$ und für $k_C > 0$ stets $k_A < 0, k_B < 0$ gilt, ist $\Phi_0 \cap \Pi_1$ eine *Ellipse* mit den Hauptscheiteln S_1, S_2 und den Nebenscheiteln S_3, S_4. Die mit diesen Punkten inzidenten Erzeugenden sollen entsprechend als Haupt- bzw. Nebenscheitelerzeugende von Φ_0 bezeichnet werden. Nun gilt nach (2.5) $d^2 = -k_B k_C$ genau für $\delta_I = k_A$ bzw. $d^2 = -k_A k_C$ genau für $\delta_I = k_B$. w. z. z. w.

Nach ([24], S. 208) läßt sich für Regelflächen Φ des $J_3^{(1)}$ vom Typ V eine *Torsion* durch

$$\tau = \frac{\mathrm{Det}(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'')}{\bar{\mathfrak{e}}'^2} \tag{2.7}$$

erklären, wobei Striche Ableitungen nach der isotropen Bogenlänge s auf der Striktionslinie von Φ bezeichnet. Bei allgemeiner Parametrisierung der Striktionslinie gilt

$$\tau = \frac{\mathrm{Det}(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}, \ddot{\mathfrak{e}})}{\dot{\bar{\mathfrak{e}}}^2 \dot{s}}\,. \tag{2.8}$$

Mittels (2.8) kann man τ für die Flächen Φ_{k_0} aus (1.12) bestimmen, wobei man die Leitkurve in (1.12) allerdings durch die Striktionslinie $\Phi_{k_0} \cap \Pi_1$ zu ersetzen hat. Eine längere Rechnung liefert das hübsche Resultat $\tau(\Phi_{k_0}) = \dfrac{1}{k_C} =$ konst. Es gilt also der

Satz 7: *Alle Reguli Φ_{k_0} eines Komplexbündels vom Typ* 1 *des einfach isotropen Raumes besitzen dieselbe konstante Windung, und diese stimmt mit dem Reziprokwert der Fundamentalinvariante k_C des Bündels überein.*

Für nicht-konoidale Regelflächen hat H. BRAUNER in ([4], S. 106) eine *Scherungsinvariante a* eingeführt, für die nach ([9], S. 24) gilt

$$a = \delta_I : k_I^{2/3}\,, \tag{2.9}$$

wobei k_I die isotrope konische Krümmung der Regelfläche bedeutet. Ermittelt man a für die Flächen Φ_{k_0}, so stellt sich

$$a^3 = k_C(k_0 - k_A)(k_B - k_0) = \text{konst.} \tag{2.10}$$

ein. Hieraus folgt speziell für $k_0 = 0$ der

Satz 8: *Das Produkt der drei Fundamentalinvarianten $k_A k_B k_C$ eines Komplexbündels vom Typ* 1 *des einfach isotropen Raumes ist eine affine Scherungsinvariante; sie stimmt mit $(-a^3)$ auf dem Gebüschachsenregulus des Bündels überein.*

Wir geben noch eine interessante geometrische Deutung des *Gewindeparameters k* einer Gewindeachse $\bar{g}$ als *Drall* in einer geeigneten Erzeugenden des Achsenregulus Φ_0, die eine Verallgemeinerung von Satz 6 liefert. Betrachtet man zu einer allgemeinen Gewindeachse $\bar{g}$ den parallelen Durchmesser $\hat{\bar{g}}$ von Φ_0 und bezeichnen S_1, S_2 die Schnittpunkte von Φ_0 mit $\hat{\bar{g}}$, dann gilt nach ([15], S. 190)

$$k\,l^2 = -k_A k_B k_C \quad \text{mit} \quad l^2 = \overline{MS_1}^{\,2} = \overline{MS_2}^{\,2}, \tag{2.11}$$

wenn M den Bündelmittelpunkt bezeichnet. Andererseits gilt für jene Erzeugende $\tilde{g}$ auf Φ_0 für die in (2.5) $d = 1$ ist: $\delta_I(\Phi_0) = -\dfrac{k_A k_B k_C}{l^2} = k.$

Damit haben wir den in Abb. 1 veranschaulichten

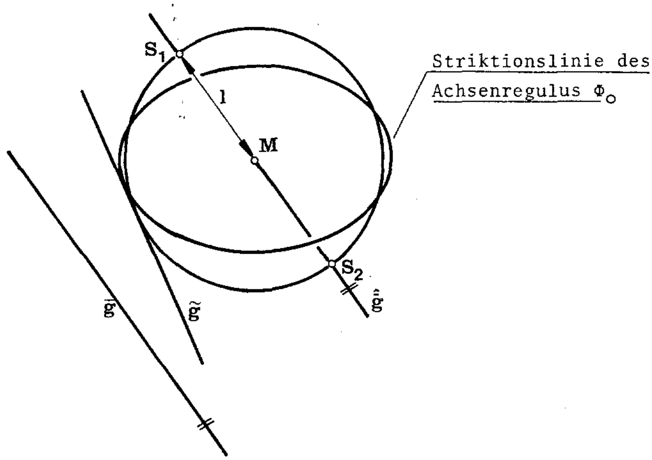

Abb. 1

Satz 9: *Sei $\bar{g}$ eine Gewindeachse mit Parameter k eines Komplexbündels vom Typ 1 des $J_3^{(1)}$ und l die Länge des zu $\bar{g}$ parallelen Halbmessers des Gebüschachsenregulus Φ_0. Dann wird der Drall $\delta_l = k$ in jenen Erzeugenden von Φ_0 angenommen, die vom Mittelpunkt M des Bündels den Abstand l besitzen.*

Die Abb. 1 zeigt den beschriebenen Sachverhalt in einem Grundriß. Die Schnittpunkte S_1, S_2 von $\hat{\bar{g}}$ mit Φ_0 liefern den Radius $l = \overline{MS_1} = \overline{MS_2}$ des Hilfskreises c_0. Bezeichnet e_0 die Striktionsellipse von Φ_0, so sind die gemeinsamen Tangenten von c_0 und e_0 die Grundrisse der gesuchten Erzeugenden $\tilde{g}$. Im *algebraischen Sinn* gibt es somit 4 Erzeugenden auf Φ_0, in denen der Drallwert k angenommen wird.

Wir geben in diesem Zusammenhang noch eine interessante *metrisch-äquiaffine Deutung* des Gewindeparameters k. Bezeichnet $G_1 = \bar{g}\,\Pi_1$ den ersten Spurpunkt einer Gewindeachse $\bar{g}$, so findet man seine Koordinaten zu

$$G_1\left[-\frac{1}{\chi}(k_B - k)\sin\psi,\ \frac{1}{\chi}(k_A - k)\cos\psi, 0\right], \qquad (2.12)$$

während der Schnittpunkt S_1 des zu $\bar{g}$ parallelen Durchmessers $\hat{\bar{g}}$ die Koordinaten

$$S_1\,(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi, \varrho\,\chi) \text{ mit } \varrho = -\frac{k_A k_B k_C}{k} \qquad (2.13)$$

besitzt, wenn k der Gewindeparameter auf $\bar{g}$ ist. Bedeutet $\bar{S}_1$ die Normalprojektion von S_1 auf Π_1, so werde das Dreieck $\{M, G_1, \bar{S}_1\}$ als *Zentraldreieck* der Gewindeachse $\bar{g}$ bezeichnet; es ist isotrop-invariant erklärt. Für seinen Flächeninhalt F_z erhält man aus (2.12) und (2.13)

$$F_z = \frac{1}{2k} k_A k_B k_C^2 \chi \,. \tag{2.14}$$

Bezeichnet andererseits F_0 den Flächeninhalt des Achsenrechtecks der Ellipse $\Phi_0 \cap \Pi_1$, das man *Fundamentalrechteck* nennen könnte, dann findet man aus (2.6a, b)

$$F_0^2 = k_A k_B k_C^2 \,. \tag{2.15}$$

Aus (2.14) und (2.15) fließt nunmehr die Beziehung[4]

$$k = \frac{F_0^2}{2} \frac{\chi}{F_z}$$

und damit der

Satz 10: *Der Gewindeparameter k einer Gewindeachse $\bar{g}$ in einem Komplexbündel vom Typ 1 des $J_3^{(1)}$ ist proportional zum Quotienten aus dem Neigungswinkel von $\bar{g}$ gegen Π_1 zum Flächeninhalt des zugehörigen Zentraldreiecks.*

3. Das ergänzende lineare Komplexbündel

Zu jeder linearen Komplexmannigfaltigkeit $\mathscr{G}$ des dreidimensionalen projektiven Raumes existiert bekanntlich eine *ergänzende lineare Komplexmannigfaltigkeit*, wobei Träger und Achsenmannigfaltigkeit ihre Rollen tauschen. Wir wollen hier das ergänzende Bündel $\hat{\mathscr{D}}$ zum Komplexbündel $\mathscr{D}$ vom Typ 1 studieren. Während der Gebüschachsenregulus von $\mathscr{D}$ durch

$$\bar{g}_1 : \ldots : \bar{g}_6 = \cos\psi : \sin\psi : \chi : k_A \cos\psi : k_B \sin\psi : k_C \chi \tag{3.1}$$

mit $\chi^2 = -\dfrac{k_A}{k_C}\cos^2\psi - \dfrac{k_B}{k_C}\sin^2\psi$ gegeben ist, besitzt der Gebüschachsenregulus von $\hat{\mathscr{D}}$ ersichtlich die Darstellung

$$\hat{\bar{g}}_1 : \ldots : \hat{\bar{g}}_6 = \cos\psi : \sin\psi : -\chi : -k_A \cos\psi : -k_B \sin\psi : k_C \chi \,. \tag{3.2}$$

---

[4] χ läßt sich als zweifacher Flächeninhalt des Stützdreiecks von $\bar{g}$ zur Kathetenlänge 1 deuten.

Betrachtet man in (3.2) die zu den Parameterwerten $\psi = 0$, $\psi = \pi/2$ und $\psi = \pi$ gehörigen Gebüsche, so kann man nach geeigneter Linearkombination dieser Gebüsche das Bündel $\hat{\mathscr{D}}$ durch die drei Gewinde

$$\begin{aligned} &\hat{K}_1 \ldots - p_4 + k_A p_1 = 0, \quad \hat{K}_2 \ldots p_5 - k_B p_2 = 0 \\ &\hat{K}_3 \ldots - p_6 + k_C p_3 = 0 \end{aligned} \qquad (3.3\,\text{a—c})$$

aufspannen und gewinnen so als *Normalform* von $\hat{\mathscr{D}}$

$$(u k_A) p_1 + (-v k_B) p_2 + (w k_C) p_3 - u p_4 + v p_5 - w p_6 = 0 \,. \qquad (3.4)$$

Bezeichnet $\hat{\bar{g}}$ eine allgemeine Gewindeachse von $\hat{\mathscr{D}}$ und bedeuten $\hat{\varphi} = \sphericalangle (\bar{G}, \hat{\bar{g}})$ bzw. $\hat{\chi} = \sphericalangle (\Pi_1, \hat{\bar{g}})$, dann findet man nach ([13], S. 333) für $\hat{\bar{g}}$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} &\hat{\bar{g}}_1 : \ldots : \hat{\bar{g}}_6 = \\ &= \cos\hat{\varphi} : -\sin\hat{\varphi} : \hat{\chi} : -(\hat{k} + k_A)\cos\hat{\varphi} : (\hat{k} + k_B)\sin\hat{\varphi} : -k_C\hat{\chi}, \end{aligned} \qquad (3.5)$$

wobei

$$\hat{k} = -k_A \cos^2\hat{\varphi} - k_B \sin^2\hat{\varphi} - k_C \hat{\chi}^2 \qquad (3.6)$$

den Gewindeparameter auf $\hat{\bar{g}}$ abgibt. Die *Fundamentalinvarianten von* $\hat{\mathscr{D}}$ sind somit der Parameter $\hat{k}_C = k(\hat{K}_3) = -k_C$ des vollisotropen Gewindes in $\hat{\mathscr{D}}$ sowie die Parameter $\hat{k}_A = k(\hat{K}_1) = -k_A$ und $\hat{k}_B = k(K_2) = -k_B$. Wir fassen zusammen und beweisen ergänzend den

Satz 11: *Das ergänzende Bündel $\hat{\mathscr{D}}$ zu einem linearen Komplexbündel $\mathscr{D}$ vom Typ* 1 *des einfach isotropen Raumes mit den Fundamentalinvarianten $\{k_A, k_B, k_C\}$ besitzt die Fundamentalinvarianten $\{-k_A, -k_B, -k_C\}$. Zwei Achsen $\bar{g} \in \mathscr{K}$ und $\hat{\bar{g}} \in \hat{\mathscr{K}}$ aus den Achsenkongruenzen $\mathscr{K}$ bzw. $\hat{\mathscr{K}}$ der Bündel $\mathscr{D}$ bzw. $\hat{\mathscr{D}}$ schneiden sich genau dann, wenn $\bar{g}$ und $\hat{\bar{g}}$ entweder entgegengesetzt gleichen Gewindeparameter besitzen oder mit den Torsallinien des Plücker-Konoids Ψ entgegengesetzt gleiche Winkel einschließen. Die Achsenkongruenz $\hat{\mathscr{K}}$ besteht aus den ergänzenden Reguli auf den Flächen Φ_{k_0}.*

Beweis: Wendet man auf (1.14) in [15] und (3.5) die Schnittbedingung $\Omega(\bar{g}, \hat{\bar{g}}) = 0$ an, so findet man

$$(k + \hat{k})\cos(\varphi - \hat{\varphi}) = 0 \,, \qquad (3.7)$$

d.h. es ist entweder $k = -\hat{k}$ oder $\varphi + \hat{\varphi} = \pi/2$ bzw. $\varphi + \hat{\varphi} = 3\pi/2$; diese Winkelbeziehungen besagen aber, daß die Achsen $\bar{g}$ und $\hat{\bar{g}}$ gegen die Torsallinien t_1 und t_2 des Plücker-Konoids Ψ in Satz 2 entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Bestimmt man jene Kongruenzflächen $\Phi_{\hat{k}_0}$ in $\hat{\mathscr{K}}$, die aus Gewindeachsen $\hat{\bar{g}}$ zu konstantem Gewindeparameter $k_0 \neq -k_A, -k_B$ gebildet werden, so erhält man zunächst eine zu (1.12) analoge Parameterdarstellung und bestimmt hieraus die *algebraische Flächengleichung*

$$-\frac{x^2}{k_C(\hat{k}_0 + k_B)} - \frac{y^2}{k_C(\hat{k}_0 + k_A)} - \frac{z^2}{(\hat{k}_0 + k_A)(\hat{k}_0 + k_B)} = 1, \quad (3.8)$$

die für $\hat{k}_0 = -k_0$ mit (1.13) übereinstimmt. Somit sind die Flächen Φ_{k_0} und $\Phi_{\hat{k}_0}$ ergänzende Reguli auf dem einschaligen Hyperboloid (3.8). w. z. z. w.

Die letzte Aussage von Satz 11 ist ein gewisses Analogon zu einem Satz von E. WAELSCH (vgl. [25], S. 796). Um die zweite Aussage von Satz 11 etwas näher zu analysieren, beachten wir zunächst, daß sich die Achsenkongruenz $\hat{\mathscr{K}}$ durch Schnitt des vollisotropen Gewindes

$$\hat{\bar{g}}_6 + k_C \hat{\bar{g}}_3 = 0 \quad (3.9)$$

mit dem quadratischen Komplex

$$(k_A - k_B)\hat{\bar{g}}_1 \hat{\bar{g}}_2 + \hat{\bar{g}}_2 \hat{\bar{g}}_4 - \hat{\bar{g}}_1 \hat{\bar{g}}_5 = 0 \quad (3.10)$$

erzeugen läßt. Der Komplex (3.10) entsteht als Menge der Erzeugendennormalen eines Plücker-Konoids $\hat{\Psi}$, das aus dem Plücker-Konoid Ψ in Satz 2 durch Spiegelung an der Mittelebene Π_1 in vollisotroper Richtung entsteht. Mit jedem Punkt $P \notin a \subset \Psi$ inzidieren im algebraischen Sinn zwei Flächen Φ_1, Φ_2 der Schar (1.13), wobei jede zwei Reguli trägt, womit die mit P inzidenten Gewindeachsen $\bar{g}^{(1)}, \bar{g}^{(2)} \,|\in \mathscr{K}$ bzw. $\hat{\bar{g}}^{(1)}, \hat{\bar{g}}^{(2)} \,|\in \hat{\mathscr{K}}$ gefunden sind. Während die gleich indizierten Gewindeachsen nach Satz 11 zu entgegengesetzt gleichen Gewindeparametern gehören, bilden die ungleich indizierten Gewindeachsen aus $\mathscr{K}$ und $\hat{\mathscr{K}}$ entgegengesetzt gleiche Winkel mit den Torsallinien t_1 und t_2 von Ψ. Man bestätigt dies analytisch dadurch, daß man die mit einem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ inzidenten Kongruenzstrahlen aus $\mathscr{K}$ bzw. $\hat{\mathscr{K}}$ durch die Winkel ψ und χ bzw. $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$ festlegt. Dazu wertet man zunächst die Inzidenzbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{g}_4 &= y_0 \bar{g}_3 - z_0 \bar{g}_2, \quad \bar{g}_5 = z_0 \bar{g}_1 - x_0 \bar{g}_3 \\ \bar{g}_6 &= x_0 \bar{g}_2 - y_0 \bar{g}_1 \end{aligned} \quad (3.11\,\text{a—c})$$

mittels (1.14) in [15] aus, wodurch drei Gleichungen entstehen, aus denen k und χ eliminiert werden können. Schließlich stellt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}(k_B - k_A)\sin\psi\cos\psi + \\ + \frac{1}{k_C}(x_0\cos\psi + y_0\sin\psi)(x_0\sin\psi - y_0\cos\psi) = z_0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

ein und analog gewinnt man

$$\begin{aligned}(k_B - k_A)\sin\hat{\psi}\cos\hat{\psi} + \\ + \frac{1}{k_C}(x_0\sin\hat{\psi} + y_0\cos\hat{\psi})(x_0\cos\hat{\psi} - y_0\sin\hat{\psi}) = z_0\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ist somit $\hat{\psi}$ eine Lösung von (3.13), dann ist auch $\psi = \pi/2 - \hat{\psi}$ eine Lösung von (3.12) und umgekehrt. Wird (3.12) in der Form

$$\begin{aligned}(x_0 y_0 - k_C z_0)\tan^2\psi + \\ + [k_C(k_B - k_A) + x_0^2 - y_0^2]\tan\psi - x_0 y_0 - k_C z_0 = 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

geschrieben, dann folgt nach Vieta, daß für die Lösungen $\tan\psi_1$, $\tan\psi_2$ von (3.14) gilt

$$\tan\psi_1 \cdot \tan\psi_2 = \frac{x_0 y_0 + k_C z_0}{-\,x_0 y_0 + k_C z_0}\,. \tag{3.15}$$

Hieraus folgt, daß genau für die Punkte P von Π_1 $(z = 0)$ die beiden durch P laufenden Gewindeachsen einander *orthogonal* schneiden; die Kegelschnitte $\Phi_1 \cap \Pi_1$ und $\Phi_2 \cap \Pi_1$ sind somit *konfokal*. Genau die Punkte in den isotropen Ebenen durch $\bar{G}$ und G^* besitzen Gewindeachsen, welche die Torsallinien t_1 und t_2 von Ψ unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden. Beachtet man noch die aus (3.11 c) und (1.14) in [15] fließenden Gleichungen unter der Bedingung $\psi + \hat{\psi} = \pi/2$, so folgt

$$\begin{aligned}k_C\chi &= x_0\sin\psi - y_0\cos\psi \\ k_C\hat{\chi} &= x_0\cos\psi - y_0\sin\psi\,.\end{aligned} \tag{3.16a, b}$$

Wird ψ aus beiden Gleichungen eliminiert, so erhält man

$$\chi^2 + \hat{\chi}^2 = \frac{1}{k_C^2}\,(x_0^2 + y_0^2) \tag{3.17}$$

und damit eine interessante Deutung der Summe der Quadrate der Neigungswinkel zugehöriger Achsen. Wir fassen zusammen im

Satz 12: *Die durch einen Punkt $P \notin a$ laufenden Kongruenzstrahlen von $\mathcal{K}$ und $\hat{\mathcal{K}}$ liegen auf einschaligen Hyperboloiden Φ_1, Φ_2, deren Striktionslinien $\Phi_1 \cap \Pi_1$ und $\Phi_2 \cap \Pi_1$ konfokale Kegelschnitte sind. Diese Kongruenzstrahlen lassen sich paarweise so zuordnen, daß entsprechende Strahlen mit den Torsallinien von Ψ entgegengesetzt gleiche Winkel einschließen. Die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Neigungswinkel zugeordneter Strahlen gegen Π_1, ist gleich dem Quotienten aus dem Abstand des Punktes P von a und der Invarianten k_C.*

Literatur

[1] BALL, R. ST.: A Treatise on the Theory of Screws. Cambridge: University Press. 1900.

[2] BEYER, R.: Technische Raumkinematik. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer. 1963.

[3] BLASCHKE, W.: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I—III. Hamb. Math. Einzelschriften. Heft 34. Leipzig–Berlin: B. G. Teubner. 1942.

[4] BRAUNER, M.: Eine Scherungsinvariante der Strahlflächen. Mh. Math. **66**, 105—109 (1962).

[5] CARDINAAL, J.: Sur les congruences (3, 2) contenues dans un complexe quadratique de torseurs de Ball. Arch. néerlandaises des sc. **6**, 118—126 (1901).

[6] HUNT, K. H.: Screw Systems in Spatial Kinematics. MMERS 3. Dept. of Mech. Eng. Monash University. 1970.

[7] KOMMERELL, K.: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Stuttgart: Koehler. 1940.

[8] MÜLLER, E., KRAMES, J.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Leipzig–Wien: Deuticke. 1931.

[9] SACHS, H.: Zur Liniengeometrie isotroper Räume. Habilitationsschrift. Univ. Stuttgart (1972).

[10] SACHS, H.: Metrische Geometrie in elliptischen Komplexbüscheln des Flaggenraumes. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **190**, 529—550 (1982).

[11] SACHS, H.: Neuere Resultate aus der Liniengeometrie des $J_3^{(2)}$. Ber. d. Math. Stat. Sektion Forschungsz. Graz 221. 1—32 (1983).

[12] SACHS, H.: Metrische Geometrie in Komplexbündeln vom 1. Haupttyp im Flaggenraum $J_3^{(2)}$. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **193**, 69—92 (1984).

[13] SACHS, H.: Lineare Geradenkomplexe im einfach isotropen Raum. Glasnik mat. **14**, 325—344 (1979).

[14] SACHS, H.: Klassifikationstheorie der linearen Komplexbüschel und Bündel im einfach isotropen Raum. Glasnik mat. Im Druck (1984).

[15] SACHS, H.: Lineare Komplexbüschel im einfach isotropen Raum. J. Geometry **23**, 184—200 (1984).

[16] SACHS, H.: Parabolische Komplexbündel im einfach isotropen Raum. Colloquium on differential geometry. Debrecen. 1984.

[17] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Wiesbaden: Vieweg. 1986.

[18] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes I (Theorie der Raumkurven). Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **150**, 1—53 (1941).

[19] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. (Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$). Math. Z. **47**, 743—777 (1942).

[20] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes III (Flächentheorie). Math. Z. **48**, 369—427 (1942).

[21] STRUBECKER, K.: Loxodromen im isotropen Raum. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **184**, 269—305 (1975).

[22] SUH, C. H., RADCLIFFE, C. W.: Kinematics and Mechanisms Design. New York 1978.

[23] TIMERDING, M. E.: Geometrie der Kräfte. Leipzig 1908.

[24] VOGEL, W. O.: Regelflächen im isotropen Raum. J. reine angew. Math. **202**, 196—214 (1959).

[25] WAELSCH, E.: Über eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **95**, 781—801 (1887).

[26] WUNDERLICH, W.: Böschungsloxodromen und ebene Loxodromen im isotropen Raum. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **187**, 339—361 (1978).

[27] WUNDERLICH, W.: Integrallose Darstellung der Loxodromen im isotropen Raum. Anzeiger d. Öst. Akad. Wiss. (7), 1—3 (1977).

[28] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie I. B. I. Hochschultaschenbücher 96/96a, Mannheim: 1966.

[29] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie II. B. I. Hochschultaschenbücher 133/133a, Mannheim: 1967.

o. Prof. Mag. Dr. HANS SACHS
Institut für Geometrie der
Montanuniversität Leoben
Franz-Josef-Strasse 18
A-8700 Leoben, Austria