Math. Z. 149, 69–77 (1976)

Mathematische Zeitschrift

Zur L^∞-Konvergenz linearer finiter Elemente beim Dirichlet-Problem

Rolf Rannacher*

Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Beringstr. 4–6, D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

Summary. For piecewise linear Ritz approximation of second order elliptic Dirichlet problems $Au=f$ over domains $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ global L^∞ error bounds $O(h^2\,|\ln h|^\nu)$ are obtained under the assumption $f\in L^\infty(\Omega)$. The proof rests on interpolation of $H^2(\Omega)$-functions with second derivatives in the space of John and Nirenberg by piecewise linear splines and a technique of Nitsche [7] using weighted Sobolev norms.

1. Einleitung

Auf einem beschränkten, offenen (konvexen) Gebiet Ω des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, $n\geqq 2$, mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ wird das elliptische Dirichlet-Problem betrachtet

$$\text{(D)}\quad Au:=-\partial_i(a_{ik}\,\partial_k u)=f \quad \text{in } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

unter den Voraussetzungen

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &a_{ik}=a_{ki}\in C^{1+\alpha}(\bar\Omega), \qquad f\in L^\infty(\Omega)\\ &m\,|\xi|^2\leqq a_{ik}(x)\,\xi^i\,\xi^k\leqq M\,|\xi|^2, \qquad \xi\in\mathbb{R}^2, \quad x\in\bar\Omega. \end{aligned}$$

Wir verwenden hier die übliche Summationskonvention und die Bezeichnungen $\partial_i:=\partial/\partial x_i, i=1,\dots,n$, für die partiellen Ableitungen. $L^p(\Omega)$ und $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ sind die bekannten (reellen) Lebesgueschen und Sobolewschen Funktionenräume mit den zugehörigen Normen $\|\cdot\|_{L^p}$ und $\|\cdot\|_{H^m}$. Ferner bezeichnet im folgenden „c" stets eine positive generische Konstante, welche nur von den gegebenen Daten und insbesondere *nicht* von dem Parameter h und der Lösung u abhängt.

Die einfachste Methode der finiten Elemente zur Approximation der Lösung $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ von (D) liefert Näherungen $u_h\in S_h$ als (eindeutige) Lösungen

* Diese Note wurde verfaßt mit der Unterstützung des Sonderforschungsbereiches 72 der DFG, Bundesrepublik Deutschland

der linearen Gleichungssysteme

$$(\mathrm{D}_h) \qquad \int_{\Omega_h} a_{ik}(\cdot)\partial_k u_h \partial_i v_h \, dx = \int_{\Omega_h} f v_h \, dx \qquad \forall\, v_h \in S_h .$$

Dabei sind $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ endlich dimensionale Teilräume stetiger Funktionen, welche bezüglich einer Folge von „Triangulationen“ von $\Omega_h \subset \Omega$ stückweise linear sind und auf dem Rand $\partial\Omega_h$ verschwinden. Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen sind hierfür eine Reihe von asymptotischen Fehlerabschätzungen bekannt:

$$\|u-u_h\|_{L^2} + h\,\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leqq c h^2 \|f\|_{L^2} \qquad \text{(Nitsche [6])}, \tag{1}$$

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)} \leqq c_{\delta\varepsilon} h^{2-\delta} \|f\|_{L^\infty}, \qquad \Omega^\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\} \tag{2}$$

(Natterer [5] für $A = -\Delta$ und $n=2$),

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leqq c h^2 |\ln h|\, \|u\|_{W^{2,\infty}} \tag{3}$$

(Scott [9] für $A = -\Delta + 1$ mit Neumann-Randbedingungen und $n=2$),

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leqq c h^m \|u\|_{W^{m,\infty}} \tag{4}$$

(Nitsche [7] für finite Elemente der Ordnung $m \geqq 3$).

Die L^∞-Abschätzung (2) ist nur lokaler Art und enthält auch nicht die optimale Konvergenzordnung. Dagegen impliziert (3) starke Einschränkungen für f, da i. allg. aus $f \in L^\infty(\Omega)$ *nicht* $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ folgt. In dieser Note beweisen wir daher mit Hilfe einer Technik von Nitsche [7] die folgende Verfeinerung der Abschätzung (2) für das allgemeine Problem (D) und beliebige Dimensionen $n \geqq 2$:

Satz. *Es sei $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $f \in L^\infty(\Omega)$ und die Voraussetzung* (A) *erfüllt. Ist dann die Zerlegungsfolge $(T_h)_{h>0}$ von Ω im unten präzisierten Sinne* (T) *regulär, so gilt für die Lösungen u von* (D) *und $u_h \in S_h$ von* (D_h) *die asymptotische Fehlerabschätzung*

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} + h\,|\ln h|^\nu\, \|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leqq h^2 |\ln h|^{\nu\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{3}{2}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

mit $\nu = \frac{3}{2}$ für $n=2$ und $\nu = \frac{1}{2}$ für $n \geqq 3$.

Der Beweis des Satzes wird zeigen, daß der Übergang von der Voraussetzung $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ zu $f \in L^\infty(\Omega)$ lediglich einen zusätzlichen Faktor $|\ln h|$ erzeugt. Die Abschätzung (3) läßt daher vermuten, daß unser Resultat zumindest für $n=2$ nicht optimal ist. In der Tat kann in [4] mit einer anderen, leider auf $n=2$ beschränkten Technik die Fehlerordnung erzielt werden:

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leqq c h^2 |\ln h|^2 \|f\|_{L^\infty}.$$

Zur Definition der Räume S_h seien für $0<h<1$ $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$ eingeschriebene Polyeder mit sämtlichen Eckpunkten auf $\partial\Omega$ und T_h „Triangulationen“ von Ω_h in (abgeschlossene) n-dimensionale Simplexe $T \in T_h$

$$\Omega_h = \bigcup_{T \in T_h} T \subset \bar{\Omega}, \tag{5}$$

wobei je zwei Simplexe üblicherweise nur Begrenzungsflächen gleicher Dimension gemeinsam haben. Die zugehörigen endlich dimensionalen Teilräume $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ sind dann definiert durch

$$S_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h \equiv 0 \text{ auf } \Omega - \Omega_h,\ v_h \equiv \text{linear auf } T \in T_h\}. \tag{6}$$

Es sollen die Regularitätsbedingungen erfüllt sein

(T) i) $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_h) \leqq c h^2$

ii) *Jedes Element $T \in T_h$ enthält eine n-Kugel mit Radius $c_0 h$ und ist in einer mit Radius $c_1 h$ enthalten.*

Für jede Funktion $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gilt dann die bekannte Approximationsbeziehung

$$\inf_{v_h \in S_h} \|v - v_h\|_{H^k(\Omega_h)} \leqq c h^{2-k} \|\nabla^2 v\|_{L^2(\Omega_h)}, \qquad k = 0,1. \tag{7}$$

Die Konvexität des Gebietes Ω dient hier hauptsächlich dazu, diese Eigenschaft der Räume S_h zu garantieren. Alle anderen Resultate, insbesondere die Lemmas 1, 3 und 5 sowie der Beweis des Satzes bleiben sinngemäß auch für allgemeine Gebiete richtig. Bei Verwendung von Elementen mit gekrümmten Randflächen entlang des Randes $\partial\Omega$ wie in [7] kann (7) unter den Voraussetzungen (T) mit $\Omega_h = \bar{\Omega}$ stets erfüllt werden (vgl. z. B. Zlamal [10]). In diesem Fall liefern die hier benutzten Methoden analoge Sätze auch für finite Elemente höherer Ordnung $m \geqq 3$.

2. Hilfssätze

Für den Beweis des Konvergenzsatzes werden einige Hilfsmittel bereitgestellt.

Da ein Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega \in C^1$ sicher die Segmenteigenschaft besitzt, erschließt man leicht mit Hilfe einer Technik von Agmon [1; Lemma 7.1ff]:

Lemma 1. *Ist $\partial\Omega \in C^1$, und gilt für die polygonalen Gebiete $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$ $\operatorname{dist}(\partial\Omega_h, \partial\Omega) \leqq c h^2$, so genügt jede Funktion $u \in H^1(\Omega)$ der Ungleichung*

$$\int_{\Omega - \Omega_h} |v|\, dx \leqq c h^2 \int_{\Omega} \{|v| + |\nabla v|\}\, dx.$$

Von John und Nirenberg wurde der Raum $E^0(\Omega)$ der Funktionen mit beschränkter mittlerer Oszillation eingeführt:

$$E^0(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{E^0} := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ r > 0}} (r^{-n} \int_{B(x,r) \cap \Omega} |u(y) - u_{x,r}|^2\, dy)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Hierbei bezeichnet $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ die n-Kugel um x mit dem Maß $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ und

$$u_{x,r} := |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r) \cap \Omega} u(y)\, dy \tag{8}$$

den zugehörigen Mittelwert von u.

Es ist

$$L^\infty(\Omega) \subset E^0(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad p \in [1, \infty). \tag{9}$$

Das Beispiel $u(x) = \ln|x|$ zeigt jedoch

$$E^0(\Omega) \neq L^\infty(\Omega).$$

Der Raum $E^0(\Omega)$ wird mit der Norm versehen

$$\|\cdot\|_{L^{2,0}} := \|\cdot\|_{L^2} + \|\cdot\|_{E^0}. \tag{10}$$

Entsprechend bezeichnet $H^{2,0}(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ den Teilraum aller Funktionen $v \in H^2(\Omega)$ mit verallgemeinerten zweiten Ableitungen $\nabla^2 v := |\partial_i \partial_k v| \in E^0(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{H^{2,0}} := \|\cdot\|_{H^2} + \|\nabla^2 \cdot\|_{E^0}. \tag{11}$$

Die Sobolevschen Einbettungssätze ergeben dann

$$H^{2,0}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega}). \tag{12}$$

Wir verschärfen nun eine Abschätzung von Piccinini [8] der Mittelwerte $r^{-n+\lambda} \int\limits_{B(x,r)} |u|^2 \, dy$ für den Grenzfall $\lambda = 0$:

Lemma 2. *Für $u \in E^0(\Omega)$ gilt*

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ r > 0}} \Big\{ r^{-n} |\ln r|^{-2} \int\limits_{B(x,r) \cap \Omega} |u|^2 \, dy \Big\} \leqq c \, \|u\|^2_{L^{2,0}}.$$

Beweis. Zunächst erhalten wir für beliebiges $x \in \Omega$ und Radien $0 < \rho < r$

$$|u_{x,\rho} - u_{x,r}|^2 \leqq c \{ |u_{x,\rho} - u(y)|^2 + |u(y) - u_{x,r}|^2 \}$$

und nach Integration über $y \in B(x, \rho) \subset B(x, r)$

$$\leqq c(\rho^n + r^n)/\rho^n \, \|u\|^2_{E^0}. \tag{+}$$

Mit $d := \operatorname{diam}(\Omega)$ und einem $\mu \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $d e^{-(\mu+1)} \leqq r \leqq d e^{-\mu}$ bzw. $\mu \leqq c(|\ln r| + 1)$ gilt ferner

$$|u_{x,r}| \leqq |u_{x,r} - u_{x,de^{-\mu}}| + |u_{x,de^{-\mu}} - u_{x,d}| + |u_{x,d}|.$$

Wir schätzen die drei Summanden mit Hilfe von $(+)$ ab

$$\begin{aligned} |u_{x,d} - u_{x,de^{-\mu}}| &\leqq \sum_{i=0}^{\mu-1} |u_{x,de^{-i}} - u_{x,de^{-(i+1)}}| \\ &\leqq c \sum_{i=0}^{\mu-1} \left| \frac{e^{-in} d^n + e^{-(i+1)n} d^n}{e^{-(i+1)n} d^n} \right|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{E^0} \\ &\leqq c(|\ln r| + 1) \, \|u\|_{E^0} \end{aligned}$$

$$|u_{x,r} - u_{x,de^{-\mu}}| + |u_{x,d}| \leqq c(\|u\|_{E^0} + \|u\|_{L^2}).$$

Die Behauptung ergibt sich dann aus der Abschätzung

$$\int_{B(x,r)\cap\Omega} |u|^2\,dy \leqq c \int_{B(x,r)\cap\Omega} |u-u_{x,r}|^2\,dy + |B(x,r)|\,|u_{x,r}|^2. \quad \text{Q.E.D.}$$

Damit läßt sich der Approximationssatz beweisen:

Lemma 3. *Ist der Rand* $\partial\Omega\in C^2$ *und die Bedingung* (T) *erfüllt, so gilt für jede Funktion* $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^{2,0}(\Omega)$

$$\inf_{u_h\in S_h}\{\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}+h\,\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)}\}\leqq c\,h^2\,|\ln h|\,\|u\|_{H^{2,0}}.$$

Beweis. Da $H^{2,0}(\Omega)\subset C^1(\bar\Omega)$ ist, kann die (eindeutig bestimmte) Interpolierende $I_h u\in S_h$ von u gebildet werden:

$$I_h u(x)=u(x) \qquad \text{für alle Eckpunkte } x \text{ der } T\in T_h.$$

Es sei nun $T\in T_h$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Eigenschaft (Tii) existiert dann sicher zu jedem $x\in T$ ein sphärischer n-Kegel $K\subset T$ mit Spitze in x, Radius $c\,h$ und Öffnung $c>0$. Damit folgt durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}|(u-I_h u)(x)| &\leqq c\,h^{-n}\int_K |u-I_h u|\,dy + c\int_K |x-y|^{1-n}|\nabla(u-I_h u)|\,dy\\ &\leqq c\,h^{-n/2}\,\|u-I_h u\|_{L^2(T)}+c\,h\,\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^\infty(T)} \qquad (+)\end{aligned}$$

und ferner wegen der Konstanz von $\nabla I_h u$ über T

$$|\nabla(u-I_h u)(x)|\leqq c\,h^{-n/2}\,\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2(T)}+c\,|\nabla u(x)-|K|^{-1}\int_K \nabla u\,dy|. \qquad (++)$$

Die ersten beiden Summanden rechts werden mit Hilfe von (7) und Lemma 2 abgeschätzt

$$\begin{aligned}\|u-I_h u\|_{L^2(T)}+h\,\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2(T)} &\leqq c\,h^2\,\|\nabla^2 u\|_{L^2(T)}\\ &\leqq c\,h^{2+n/2}\Big(h^{-n}\int_{B(x,h)}|\nabla^2 u|^2\,dy\Big)^{\frac12}\\ &\leqq c\,h^{2+n/2}\,|\ln h|\,\|u\|_{H^{2,0}}.\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in $(++)$ gilt

$$\begin{aligned}|\nabla u(x)-|K|^{-1}\int_K \nabla u\,dy| &\leqq c\,h^{-n}\int_K |\nabla u(x)-\nabla u(y)|\,dy\\ &\leqq c\,h^{\frac12}\Big(\int_{B(x,h)\cap\Omega}|x-y|^{1-n}|\nabla^2 u|^2\,dy\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

Wir definieren $B_i := B(x,h/i)\cap\Omega$, $i\in\mathbb{N}$, und erhalten

$$\int_{B(x,h)\cap\Omega}|x-y|^{1-n}|\nabla^2 u|^2\,dy\leqq c\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{h}{i+1}\Big)^{1-n}\int_{B_i-B_{i+1}}|\nabla^2 u|^2\,dy$$

$$\leqq c\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\Big(\frac{h}{i+1}\Big)^{1-n}-\Big(\frac{h}{i}\Big)^{1-n}\right\}\Big(\frac{h}{i}\Big)^{n}\Big(\frac{h}{i}\Big)^{-n}\int_{B_i}|\nabla^2 u|^2\,dy+c\,h\,h^{-n}\int_{B_1}|\nabla^2 u|^2\,dy$$

sowie mit Lemma 2

$$\leqq c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\ln h/i|^2}{i^2}+|\ln h|^2\right) h\,\|u\|_{H^{2,0}}^2 \leqq c\,h|\ln h|^2\,\|u\|_{H^{2,0}}^2 .$$

Dies in (+ +) und (+) eingesetzt ergibt dann mit $u_h := I_h u$ die Behauptung. Q.E.D.

Die Bedeutung dieses Resultates für das Problem (D) macht der folgende Regularitätssatz von Campanato [3] klar:

Lemma 4. *Ist* $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$ *und* $f\in E^0(\Omega)$, *so gilt für die schwache Lösung* $u\in H_0^1(\Omega)$ *der Randwertaufgabe* (D) $u\in H^{2,0}(\Omega)$ *und*

$$\|u\|_{H^{2,0}}\leqq c\,\|f\|_{L^{2,0}}.$$

Die im folgenden verwendete Technik der gewichteten Sobolewnormen stammt in diesem Zusammenhang von Natterer [5] und Nitsche [7]. Für ein beliebiges (aber fest gewähltes) $x_0\in\Omega$ definieren wir mit einem noch geeignet zu wählenden $\rho:=\rho(h)\geqq h$ die Gewichtsfunktion

$$\sigma(x):=(|x-x_0|^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}$$

und die zugehörigen L^2-Normen

$$\|\cdot\|_{(\mu)}:=\Big(\int_\Omega \sigma^\mu|\cdot|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},\qquad \mu\in\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Offenbar gilt dann

$$|\nabla\sigma|\leqq c,\qquad |\nabla^2\sigma|\leqq c\,\rho^{-1}. \tag{14}$$

Die Approximationseigenschaft (7) der Räume S_h in $H^2(\Omega)$ läßt sich für hinreichend großes $\rho(h)\geqq c\,h$ auch auf die gewichteten Räume übertragen (s. [7]):

$$\inf_{v_h\in S_h}\|\nabla(v-v_h)\|'_{(\mu)}\leqq c\,h\,\|\nabla^2 v\|'_{(\mu)} \tag{15}$$

mit den modifizierten Normen

$$\|\cdot\|'_{(\mu)}:=\Big(\sum_{T\in T_h}\int_T \sigma^\mu|\cdot|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

Wir definieren für $u, v\in H_0^1(\Omega)$ die Sesquilinearform

$$a(u,v):=\int_\Omega a_{ik}\,\partial_k u\,\partial_i v\,dx. \tag{17}$$

Lemma 5. *Für* $v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ *gilt mit* $\nu=\frac{3}{2}$ *für* $n=2$ *und* $\nu=\frac{1}{2}$ *für* $n\geqq 3$

$$\|v\|_{(n-4)}+\|\nabla v\|_{(n-2)}+\|\nabla^2 v\|_{(n)}\leqq c\,\rho^{-1}|\ln h|^\nu\,\|Av\|_{(n+2)}.$$

Beweis. Wir erhalten mit der üblichen L^2-a-priori-Abschätzung für

$\sigma^{n/2}v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 v\|_{(n)}&\leqq c(\|\nabla^2(\sigma^{n/2}v)\|_{L^2}+\|\nabla v\|_{(n-2)}+\|v\|_{(n-4)})\\ &\leqq c(\|Av\|_{(n)}+\|\nabla v\|_{(n-2)}+\|v\|_{(n-4)}).\end{aligned} \tag{+}$$

Die beiden Terme niederer Ordnung werden abgeschätzt durch

$$\|\nabla v\|_{(n-2)}^2 \leqq c(|a(v, \sigma^{n-2} v)| + \int |\nabla v||v||\nabla \sigma^{n-2}|\,dx)$$
$$\leqq c\,\|v\|_{(n-4)}(\|A v\|_{(n)} + \|\nabla v\|_{(n-2)}) \qquad (++)$$

sowie mit der Greenschen Funktion $g(\cdot, \cdot)$ der Randwertaufgabe (D)

$$\|v\|_{(n-4)}^2 = \int \sigma^{n-4}(x) |\int A v(y)\, g(x, y)\, dy|^2\, dx$$
$$\leqq \int \sigma^{n+2}(y) |A v(y)|^2 \int \sigma^{n-4}(x) \int \sigma^{-n-2}(y')\, g(x, y')\, dy'\, g(x, y)\, dx\, dy.$$

Die Greensche Funktion g ist nicht negativ und läßt sich global abschätzen durch die Greensche Funktion des Operators $-\Delta$ über dem $\mathbb{R}^n$

$$g(x, y) \leqq c \begin{cases} 1 + |ln|x-y||, & n=2 \\ |x-y|^{2-n}, & n \geqq 3. \end{cases}$$

Mit Hilfe von $-\Delta \sigma^{2-n} = n(n-2)\rho^2 \sigma^{-n-2}$

$$-\Delta(\ln \sigma^{-2}) = (2(n-2)|y-x_0|^2 + 2n\rho^2)\sigma^{-4}$$

erschließt man daher leicht

$$\int \sigma^{-n-2} g(x, y)\, dy \leqq c\rho^{-2} \begin{cases} |ln\,\rho|, & n=2 \\ \sigma^{2-n}(x), & n \geqq 3 \end{cases}$$

sowie

$$\int \sigma^{-2} g(x, y)\, dy \leqq c \begin{cases} |\ln \rho|^2, & n=2 \\ |\ln \rho|, & n \geqq 3. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$\|v\|_{(n-4)} \leqq c\rho^{-1} |\ln h|^{\nu}\, \|A v\|_{(n+2)}.$$

Dies in $(++)$ und $(+)$ eingesetzt ergibt mit $\sigma^{-2} \leqq c\rho^{-2}$ die Behauptung. Q.E.D.

3. Beweis des Satzes

Für einen beliebigen, aber fest gewählten, Punkt $z \in T \in T_h$ gilt

$$|(u-u_h)(z)| \leqq c\, h^{-n} \int_T |u-u_h|\, dx + c\, h\, \|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(T)}$$

sowie aufgrund der Linearität von $I_h u - u_h$ über T

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(T)} \leqq c\, \|\nabla(u - I_h u)\|_{L^\infty(T)} + c\, h^{-n} \int_T |\nabla(u-u_h)|\, dx.$$

Mit der Gewichtsfunktion $\sigma := (|x-z|^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}$, $\rho(h) \geqq$ h, folgt daher

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(T)} \leqq c\rho \left(\frac{\rho}{h}\right)^{n/2} \|u-u_h\|'_{(-n-2)} + c\, h\, \|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(T)},$$
$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(T)} \leqq c\, \|\nabla(u - I_h u)\|_{L^\infty(T)} + c \left(\frac{\rho}{h}\right)^{n/2} \|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)}.$$

Die beiden gewichteten Terme werden nun mit einer Technik von Nitsche [7] abgeschätzt. Wir definieren die Sesquilinearformen

$$a^h(v,w) := \int_{\Omega_h} a_{ik}\,\partial_k v\,\partial_i w\,dx$$

und erhalten für beliebiges $v_h \in S_h$

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-u_h)\|'^2_{(-n)} &\leqq c\,|a^h(u-u_h, \sigma^{-n}(u-u_h))| + c\int_{\Omega_h} |\nabla(u-u_h)|\,|u-u_h|\,\sigma^{-n-1}\,dx\\ &\leqq c\,|a^h(u-u_h, \sigma^{-n}(u-u_h)-v_h)| + c\int_{\Omega_h} \dots\,dx\\ &\leqq c\,\|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)}\{\|\nabla(\sigma^{-n}(u-u_h)-v_h)\|'_{(n)} + \|u-u_h\|'_{(-n-2)}\}.\end{aligned}$$

Die Approximationseigenschaft (15) ergibt bei Infimumbildung

$$\begin{aligned}\|\nabla(\sigma^{-n}(u-u_h)-v_h)\|'_{(n)} &\leqq c\,h\,\|\nabla^2(\sigma^{-n}(u-u_h))\|'_{(n)}\\ &\leqq c\,h\,\rho^{-1}\{\|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)} + \|u-u_h\|'_{(-n-2)}\} + c\,h\,\|\nabla^2 u\|_{(-n)}\end{aligned}$$

Bei geeigneter Wahl von $\rho(h) \geqq c\,h$ folgt daher

$$\|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)} \leqq c\,\|u-u_h\|'_{(-n-2)} + c\,h\,\|\nabla^2 u\|_{(-n)}. \qquad (+)$$

Mit der Lösung der Randwertaufgabe

$$A\,v = \sigma^{-n-2}(u-u_h) \quad \text{in } \Omega, \qquad v=0 \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

gilt weiter für beliebiges $v_h \in S_h$

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|^2_{(-n-2)} &= a(u-u_h, v) = a(u-u_h, v-v_h)\\ &\leqq c\,\|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)}\,\|\nabla(v-v_h)\|'_{(n)} + \int_{\Omega-\Omega_h} |\nabla u|\,|\nabla v|\,dx.\end{aligned}$$

Anwendung von (15) und Lemma 5 ergibt

$$\|\nabla(v-v_h)\|'_{(n)} \leqq c\,h\,\|\nabla^2 v\|'_{(n)} \leqq c\,\frac{h}{\rho}\,|\ln h|^\nu\,\|u-u_h\|_{(-n-2)}.$$

Aus (12) und Lemma 1 folgt ferner

$$\int_{\Omega-\Omega_h} |\nabla u|\,|\nabla v|\,dx \leqq c\,h^2 \int_\Omega (|\nabla v| + |\nabla^2 v|)\,dx\,\|u\|_{H^{2,0}}$$

und wieder über Lemma 5

$$\leqq c\,h^2\,|\ln h|^{\frac{1}{2}+\nu}\,\rho^{-1}\,\|u-u_h\|_{(-n-2)}\,\|u\|_{H^{2,0}}.$$

Wir erhalten damit

$$\|u-u_h\|_{(-n-2)} \leqq c\,\frac{h}{\rho}\,|\ln h|^\nu\,\|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)} + c\,h^2\,|\ln h|^{\nu+\frac{1}{2}}\rho^{-1}\,\|u\|_{H^{2,0}}. \qquad (++)$$

Durch Kombination von $(++)$ und $(+)$ folgt dann bei geeigneter Wahl von $\rho(h) \geqq c\,h\,|\ln h|^\nu$

$$\|u-u_h\|'_{(-n-2)} + \|\nabla(u-u_h)\|'_{(-n)} \leqq c\,h\,\|\nabla^2 u\|_{(-n)} + h\,|\ln h|^{\frac{1}{2}}\,\|u\|_{H^{2,0}}.$$

Mit Hilfe einer Kreisringtechnik, ähnlich der im Beweis von Lemma 3 angewendeten, erschließt man leicht

$$\|\nabla^2 u\|_{(-n)} \leqq c\,|\ln h|^{\frac{3}{2}}\,\|u\|_{H^{2,0}}.$$

Dies alles oben eingesetzt ergibt schließlich unter Berücksichtigung von Lemma 4

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(T)} \leqq c\,h\,|\ln h|^{\nu n/2+\frac{3}{2}}\,\|f\|_{L^\infty}$$

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(T)} \leqq c\,h^2\,|\ln h|^{\nu(n/2+1)+\frac{3}{2}}\,\|f\|_{L^\infty}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Literatur

1. Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton: van Nostrand 1965
2. Bramble, J.H., Hilbert, S.R.: Bounds on a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. Numerische Math. **16**, 362–369 (1971)
3. Campanato, S.: Equazioni ellittiche del II° ordine e spazi $L^{(2,\lambda)}$. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **69**, 321–381 (1965)
4. Frehse, J., Rannacher, R.: Eine L^1-Fehlerabschätzung diskreter Grundlösungen in der Methode der finiten Elemente. Tagungsband „Finite Elemente", Bonn. Math. Schr. 1976
5. Natterer, F.: Über die punktweise Konvergenz finiter Elemente. Numer. Math. **25**, 67–77 (1975)
6. Nitsche, J.: Lineare Spline Funktionen und die Methode von Ritz für elliptische Randwertaufgaben. Arch. rat. Mech. Analysis **36**, 348–355 (1970)
7. Nitsche, J.: L^∞-convergence of finite element approximation. Preprint, 2. Converence on Finite Elements, Rennes, France 1975
8. Piccinini, L.C.: Proprietà di inclusione e interpolazione tra spazi di Morrey e loro generalizzazioni. Tesi di perfezionamento 1969. Scuola Normale Superior Pisa
9. Scott, R.: Optimal L^∞-estimates for the finite element method on irregular meshes. Preprint
10. Zlamal, M.: Curved elements in the finite element method. I. SIAM J. numer. Analysis **10**, 229–240 (1973), II. SIAM J. Numer. Analysis **11**, 347–362 (1974)

Eingegangen am 26. November 1975