Zur Topologie der Abbildungen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 3. September 1957)

Sind P, Q geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, P dreidimensional, Q zweidimensional, a ein Punkt aus Q und F eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F eine Abbildung f derart, daß die Menge $f^{-1}(a)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen besteht. Seien K eine simpliziale Zerlegung von $f^{-1}(a)$, ferner A_1, A_2, ... die 1-Simplexe von K und α_i die unten erklärte Vielfachheit modulo 2 von A_i bei (f, a).

Wenn P und Q orientierbar sind, so sei x_i eine Orientierung von A_i und β_i die unten definierte Multiplizität von x_i bei (f, a). Setzt man

$$x_\alpha = \Sigma\, \alpha_i\, A_i \text{ und } x_\beta = \Sigma\, \beta_i\, x_i,$$

so ist x_α ein Zyklus modulo 2 und x_β ein ganzzahliger Zyklus. Und es gilt:

Ist F eine unwesentliche Homotopieklasse, liegt also in F eine Abbildung f' mit $f'(P) \neq Q$, so ist

$$x_\alpha \sim 0 \text{ modulo } 2$$

in bezug auf die Mannigfaltigkeit P. Sind P, Q orientierbar und F unwesentlich, so ist $x_\beta \sim 0$ in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.

Weiter seien S eine 3-Sphäre, T eine 2-Sphäre, q ein Punkt aus T, Φ eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von S in T und φ eine bestimmte Abbildung aus Φ. Die Menge $\varphi^{-1}(q)$ bestehe aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen B_1, B_2, ... Für alle i seien B_i^2 ein offenes 2-Simplex und b_i^2 eine Orientierung von B_i^2. Bezeichne σ_i eine stetige Abbildung von $\overline{B}_i^2$ in S, so daß $\sigma_i \mid \overline{B}_i^2 - B_i^2$ eineindeutig und

$$\sigma_i(\overline{B}_i^2 - B_i^2) = B_i.$$

Es wird also in jedes B_i das stetige Bild eines 2-Simplexes eingespannt. Schließlich seien b_i die von $\sigma_i(b_i^2)$ in B_i induzierte Orientierung und t eine Orientierung von T. Hierauf gilt:

Es bezeichne γ_i den Brouwerschen Grad der Abbildung $\varphi\,\sigma_i : b_i^2 \to t$ und δ_i die Multiplizität von b_i bei (φ, q). Ist dann

$$\Sigma\, \gamma_i\, \delta_i = 0,$$

so stellt Φ eine unwesentliche Abbildungsklasse dar.

Sind F_1, F_2 zwei Homotopieklassen stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F_1 eine Abbildung f_1 und in F_2 eine Abbildung f_2 derart, daß die Menge aller Punkte p aus P mit $f_1(p) = f_2(p)$ ein endliches Polyeder C einer Dimension ≤ 1 ist. Seien L eine simpliziale Zerlegung von C und $y_1, y_2, \ldots$ die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe aus L. Dann gilt:

Wenn P, Q orientierbar und ε_i die Multiplizität von y_i bei (f_1, f_2), so ist $y = \Sigma\, \varepsilon_i\, y_i$ ein ganzzahliger Zyklus. Wenn überdies

$$F_1 = F_2 \text{ und } y \sim 0,$$

so liegen in F_1 Abbildungen g_1, g_2 derart, daß $g_1(p) \neq g_2(p)$ in allen Punkten p aus P.

In der vorliegenden Arbeit wird nur nachgewiesen, daß die Abbildungen f_1, f_2 existieren und daß die ganzzahlige 1-Kette $\Sigma\, \varepsilon_i\, y_i$ ein Zyklus ist. Die übrigen Ergebnisse werden in einer Fortsetzung hergeleitet.

1. Erläuterungen und Ergänzungen

Für diesen ganzen Abschnitt bezeichnen P eine dreidimensionale und Q eine zweidimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, P^* eine Orientierung von P und Q^* eine Orientierung von Q.

Wenn f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q und A die Menge aller Punkte p aus P mit $f_1(p) = f_2(p)$, so heiße A auch kurz der „Schnitt" von f_1 und f_2. Wie üblich ist, wenn B Teilmenge eines Euklidischen Raumes E, $\overline{B}$ die abgeschlossene Hülle von B bezüglich E. Die weiterhin auftretenden „Simplexe" sind offen und gradlinig. Wenn C ein solches Simplex und φ eine eineindeutige simpliziale Abbildung von $\overline{C}$ in E, so heiße $\varphi(C)$ eine „Zelle" und $\varphi(\overline{C} - C)$ eine „Sphäre". Wenn a, b Punkte aus E, so bedeute $d(a, b)$ den Abstand dieser Punkte. Es sei $d(B)$ der Durchmesser von B.

Seien $m > n$ natürliche Zahlen, A ein m-Simplex, B ein $(m-n)$-Simplex in A, p_0 ein Punkt aus B und C ein n-Simplex in A mit $p_0 \in C$ und $\overline{B} \,.\, (\overline{C} - p_0) = 0$. Weiter seien $p_1, \ldots, p_m$ Punkte mit

$$p_i \in B \text{ für } i \leq m - n \text{ und } p_i \in C \text{ für } i > m - n$$

derart, daß die Punkte $p_0, \ldots, p_n$ linear unabhängig. Sind dann A^* die von $(p_0, \ldots, p_n)$ in A, weiter B^* die von $(p_0, \ldots, p_{m-n})$ in B und C^* die von $(p_0, p_{m-n+1}, \ldots, p_m)$ in C induzierte Orientierung, so heiße C^* auch die „von (A^*, B^*) in C induzierte Orientierung".

Zur Erklärung von Vielfachheit und Multiplizität seien nun $m > n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit, A ein $(m-n)$-dimensionales endliches Polyeder in M, K eine simpliziale Zerlegung von A, B ein $(m-n)$-Simplex aus K, weiter f, f' stetige Abbildungen von M in N mit A als Schnitt und q ein Punkt aus B. Dann existieren n-Simplexe C, D mit

$$q \in C \subset M, \; A \,.\, (\overline{C} - q) = 0, \; f(C) + f'(C) \subset D \subset N.$$

Für $p \in \overline{C} - C$ sei $\varphi(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $f'(p)$. Wenn nunmehr $\pm \beta$ die beiden Brouwerschen Grade (vergleiche etwa [1] und [2]) der Abbildung $\varphi : \overline{C} - C \to \overline{D} - D$ sind, so heiße β mod 2 die „*Vielfachheit*" modulo 2 von B bei (f, f'). Hierauf möge M eine Orientierung M^* und N eine Orientierung N^* besitzen. Es seien B^* eine Orientierung von B, C^* die von (M^*, B^*) in C und D^* die von N^* in D induzierte Orientierung, ferner C' die von C^* in $\overline{C} - C$ und D' die von D^* in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung. Dann heiße der Grad der Abbildung $\varphi : C' \to D'$ die „*Multiplizität*" von B^* bei (f, f', M^*, N^*).

Sind f, g, h stetige Abbildungen von P in Q und $h(P)$ ein Punkt a aus Q, so ist die Multiplizität bezüglich (f, g) näherhin die Multiplizität bezüglich (f, g, P^*, Q^*), die Multiplizität bezüglich (f, a) genauer die Multiplizität bezüglich (f, h, P^*, Q^*). Seien A ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 in P, ferner A der Schnitt von (f, g) und K eine simpliziale Zerlegung von A. Sofern $\dim A = 1$, seien $x_1, x_2, \ldots$ die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe von K und α_i die Multiplizität von x_i bei (f, g); hier heiße $\Sigma\, \alpha_i\, x_i$ eine „*charakteristische Kette*" von (f, g). Wenn $\dim A < 1$, so sei die Zahl Null die charakteristische Kette von (f, g).

Satz 1. *Sind F_1, F_2 Homotopieklassen stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F_1 eine Abbildung f_1 und in F_2 eine Abbildung f_2 derart, daß der Schnitt von f_1 und f_2 ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.*

Eine Verschärfung des vorstehenden Satzes findet sich im zweiten Abschnitt bewiesen. Im dritten Abschnitt wird der folgende Satz verallgemeinert.

Satz 2. *Sind f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q, der Schnitt von f_1, f_2 ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 und x eine charakteristische Kette von (f_1, f_2), so ist $\dot{x} = 0$.*

Die in Satz 2 in Rede stehende Kette heiße auch ein „*charakteristischer Zyklus*" von (f_1, f_2). Man bestätigt sofort:

Satz 3. *Sind f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q und der Schnitt von (f_1, f_2) ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1, so sind alle charakteristischen Zyklen von (f_1, f_2) untereinander homolog in bezug auf P und die ganzen Zahlen.*

Zu der Frage, ob die Umkehrung des in der Einleitung angeführten Satzes über Abbildung von 3-Sphären in 2-Sphären richtig ist, gibt der nachstehende Satz einen einfacheren Anhaltspunkt.

Satz 4. *Seien S eine 3-Sphäre, T eine 2-Sphäre, q ein Punkt aus T und X ein 2-Simplex in S. Dann existiert eine unwesentliche Abbildung f von S in T mit*

$$f^{-1}(q) = \overline{X} - X$$

und der Eigenschaft, daß der Grad der Abbildung $f \mid \overline{X} \to T$ von Null verschieden ist.

Beweis. Seien E der 3-dimensionale Euklidische Raum, a ein Punkt aus E, A die Menge aller Punkte p aus E mit $d(p, a) = 1$, ferner b, c antipodische Punkte auf A, E_2 die Ebene durch a senkrecht auf $\overline{bc}$, B die offene 2-dimensionale Vollkugel in E_2 mit a als Mittelpunkt und 1 als Radius.

Für $p \in \overline{B} - a$ bedeute $C(p)$ die Projektion von $\overline{bp} + \overline{pc}$ auf A mit a als Projektionszentrum. Für $p \in E$ sei $x(p)$ derjenige Punkt in $\overline{B}$, der von p den kleinsten Abstand hat. Es bezeichne D ein 3-Simplex in E mit $\overline{B} \subset D$.

Wir setzen $\varphi(a) = b$ und $\varphi(\overline{B} - B) = c$. Wenn p ein Punkt aus $B - a$, so sei $\varphi(p)$ der durch die Beziehung

$$d(b, \varphi(p)) = 2\, d(a, p)$$

bestimmte Punkt auf $C(p)$. Offenbar ist die Abbildung $\varphi \mid B$ topologisch. Der Grad der Abbildung $\varphi : \overline{B} \to A$ ist von Null verschieden.

Für $p \in \overline{B} - a$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei $\varphi(p, \tau)$ derjenige Punkt auf $C(p)$, der von b den Abstand $\tau\, d(b, \varphi(p))$ hat. Für $0 \leq \tau \leq 1$ sei $\varphi(a, \tau) = b$. In allen Punkten p aus E sei

$$\zeta(p) = d(p, E-D)/(d(p, E-D) + d(p, B)).$$

Mit Hilfe von x, φ und ζ wollen wir nun eine Abbildung $g: E \to A$ definieren. Es sei $g(p) = \varphi(x(p), \zeta(p))$ für alle $p \in E$. Offenbar ist g eine stetige Abbildung von E in A.

Für $p \in \overline{B}$ ist $x(p) = p$ und $\zeta(p) = 1$, daher $g(p) = \varphi(p, 1) = \varphi(p)$. Aus $g(p) = \varphi(p)$, $p \in \overline{B}$, folgt, daß $(g \mid \overline{B})^{-1}(c) = \overline{B} - B$. Zum Beweis, daß

$$g^{-1}(c) = \overline{B} - B,$$

bedeute p einen Punkt aus $E - \overline{B}$. Dann ist $\zeta(p) < 1$. Nach der Erklärung von φ ist $\varphi(q, \tau) \neq c$ für alle (q, τ) mit $q \in \overline{B}$ und $\tau < 1$. Mithin $g(p) \neq c$. Schließlich kann man g unter Festhaltung auf $E-D$ in den Punkt b deformieren. Hierzu sei

$$g^\tau(p) = \varphi(x(p),\ (1 - \tau)\,\zeta(p))$$

für alle (p, τ). Dann ist $g^0 = g$. In allen p ist $g^1(p) = \varphi(x(p), 0) = b$.

Mit Hilfe von g läßt sich f leicht angeben. Es bedeute d einen Punkt aus S und t eine topologische Abbildung von $S-d$ auf E derart, daß $t(X) = B$. Ferner sei t' eine topologische Abbildung von A auf T mit $t'(c) = q$. Dann braucht man nur $f(p) = t'gt(p)$ für $p \in S-d$ und $f(d) = t'(b)$ zu setzen.

2. Existenz eindimensionaler Schnitte

Sind E ein Euklidischer Raum, ferner $A_1, A_2, \ldots$ in E gelegene Simplexe und ist jeder Punkt aus E zu fast allen A_i fremd, so heiße $\Sigma \overline{A}_i$ ein „Polyeder". Dieses letztere Polyeder ist „endlich" oder „unendlich", je nachdem sein Durchmesser endlich oder nicht.

Satz 5. *Seien M, N geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, dim $M = (\dim N) + 1 > 1$, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von M in N. Dann existiert eine zu g homotope Abbildung γ von M in N mit $d(g, \gamma) < \varepsilon$ derart, daß der Schnitt von f, γ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.*

Beweis. Sind n die Dimension von N, K eine simpliziale Zerlegung von M, ferner $A_1^i, A_2^i, \ldots$ für $i = -1, 0, \ldots, n+1$ die i-Simplexe von K und ist K nur hinreichend fein, so gilt: zu jedem $\overline{A}_k^i$, das einen Punkt p mit $f(p) = g(p)$ enthält, existiert eine n-Zelle B_k^i in Q mit

$$f(\overline{A}_k^i) + g(\overline{A}_k^i) \subset B_k^i \text{ und } d(B_k^i) < \varepsilon.$$

Weiter gibt es eine positive Zahl ζ, so daß, wenn dem Simplex A_k^i keine Zelle B_k^i zugeordnet ist,

$$d(f(p),\ g(p)) > \zeta \text{ für alle } p \in \bar{A}_k^i.$$

Bedeute nun j eine der Zahlen $-1, 0, \ldots, n-1$.

Wir machen die für $j = -1$ richtige Annahme, es existiere eine zu g homotope Abbildung g^j von M in N mit den Eigenschaften:

$$f(p) \neq g^j(p) \text{ für } p \in \Sigma_{k=-1}^j \Sigma_i \bar{A}_k^i,$$
$$f(\bar{A}_k^i) + g^j(\bar{A}_k^i) \subset B_k^i$$

für alle B_k^i, schließlich $d(g, g^j) < \min(\varepsilon, \zeta)$.

Hierauf gibt es eine positive Zahl η, die die Eigenschaft hat: wenn g' eine stetige Abbildung von M in N mit $d(g, g') < \eta$, so ist $f(\bar{A}_k^i) + g'(\bar{A}_k^i) \subset B_k^i$ für alle (i, k), in denen B_k^i definiert.

Weiter existiert zu jedem B_k^{j+1} eine $(n+1)$-Zelle C_k derart, daß die $C_1, C_2 \ldots$ paarweis zueinander fremd und ferner gilt:

$$A_k^{j+1} \subset C_k \subset M, \quad f(\bar{C}_k) + g^j(\bar{C}_k) \subset B_k^{j+1},$$

alle $\bar{A}_r^i$ mit $i \leq j$ sind zu C_k fremd. Alsdann wende man den nachstehenden Hilfssatz auf jedes C_k an.

Dieser Hilfssatz liefert, wenn $j = n-1$ ist, eine zu g homotope Abbildung g^n von M in N, die die Eigenschaften hat:

$$f(p) \neq g^n(p) \text{ für fast alle } p \in \Sigma(\bar{A}_k^{n+1} - A_k^{n+1}),$$

für alle B_k^{n+1} gilt $f(\bar{A}_k^{n+1}) + g^n(\bar{A}_k^{n+1}) \subset B_k^{n+1}$, es ist $d(g, g^n) < \min(\varepsilon, \zeta)$.

Wegen $d(B_k^{n+1}) < \varepsilon$ und $g(\bar{A}_k^{n+1}) \subset B_k^{n+1}$ verbleibt nur noch der Nachweis: sind A ein $(n+1)$-Simplex, B der n-dimensionale Euklidische Raum, ferner φ, γ^n stetige Abbildungen von $\bar{A}$ in B und gilt $\varphi(p) \neq \gamma^n(p)$ für fast alle Punkte p aus $\bar{A}-A$, so existiert eine stetige Abbildung γ^* von $\bar{A}$ in B mit $\gamma^n \mid \bar{A}-A = \gamma^* \mid \bar{A}-A$ derart, daß der Schnitt von φ, γ^* ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.

Das ist leicht einzusehen. Es seien q ein Punkt aus A und $\gamma^*(q) = \varphi(q)$; für $p \in \bar{A}-q$ weiter $w(p)$ die Projektion von p auf $\bar{A}-A$ aus q, $\lambda(q)$ die Zahl $d(p, q)/(d(p, q) + d(p, \bar{A}-A))$ und $\gamma^*(p)$ der Punkt $\varphi(p) + \lambda(p)$ $(\gamma^n w(p) - \varphi\, w(p))$.

Hilfssatz. Seien n eine natürliche Zahl, j eine Zahl mit $0 \leq j \leq n$, S ein $(n+1)$-Simplex, T ein n-Simplex, A ein in S gelegenes j-Simplex, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\bar{S}$ in T mit

$$f(p) \neq g(p) \text{ für } p \in \bar{A}-A.$$

Dann existiert eine stetige Abbildung γ von $\bar{S}$ in T mit $g \mid \bar{S}-S = \gamma \mid \bar{S}-S$ und $d(g, \gamma) < \varepsilon$ derart, daß gilt: wenn $j < n$, so ist $f(p) \neq \gamma(p)$ für alle Punkte p aus $\bar{A}$; wenn $j = n$, so ist $f(p) \neq \gamma(p)$ für fast alle $p \in \bar{A}$, Beweis. Durch Differenzbildung $f-g$ reduziert sich der vorstehende Hilfssatz auf die Aussage: sind E der n-dimensionale Euklidische Raum, q der Nullpunkt von E und φ eine stetige Abbildung von $\bar{S}$ in E mit $\varphi(\bar{A}-A) \subset E-q$, so existiert eine stetige Abbildung φ' von $\bar{S}$ in E mit $\varphi \mid \bar{S}-S = \varphi' \mid \bar{S}-S$ und $d(\varphi, \varphi') < \varepsilon$ derart, daß $\varphi'(A) \subset E-q$ für $j < n$ und $(\varphi' \mid A)^{-1}(q)$ endlich für $j = n$.

Bedeutet φ^* eine stetige Abbildung von $\bar{A}$ in E mit $\varphi \mid \bar{A}-A = \varphi^* \mid \bar{A}-A$, $d(\varphi \mid \bar{A}, \varphi^*) < \varepsilon$, $\varphi^*(\bar{A}) \subset E-q$ für $j < n$ und endlichem $(\varphi^*)^{-1}(q)$ für $j = n$, so existiert nach einem bekannten Fortsetzungstheorem (vergleiche [8]) eine stetige Abbildung φ^{**} von $\bar{S}$ in E mit $\varphi^{**} \mid \bar{A} = \varphi^*$ und $\varphi^{**} \mid \bar{S}-S = \varphi \mid \bar{S}-S$.

Offenbar existiert eine positive Zahl ζ mit $0 < \zeta < \varepsilon$, so daß der Abstand $d(\varphi(p), \varphi^{**}(p)) < \zeta$ für $p \in A + (\bar{S}-S)$. Hierauf sei $\varphi'(p)$ gleich $\varphi^{**}(p)$, wenn $d(\varphi(p), \varphi^{**}(p)) \leq \zeta$; sonst jener Punkt auf dem Halbstrahl aus $\varphi(p)$ durch $\varphi^{**}(p)$, der von $\varphi(p)$ den Abstand ζ hat.

Verbleibt, die Existenz von φ^* nachzuweisen. Hierzu sei $j > 0$. Dann gibt es ein j-Simplex B mit $\bar{B} \subset A$ und eine positive Zahl α, so daß

$$d(q, \varphi(p)) > \alpha \text{ für } p \in \bar{A}-B.$$

Dann läßt sich leicht eine simpliziale Abbildung σ von $\bar{A}$ in E angeben mit $d(\varphi, \sigma) < \min(\alpha, \varepsilon)$ derart, daß $\sigma(\bar{A}) \subset E-q$ für $j < n$ und $\sigma^{-1}(q)$ endlich für $j = n$. Hierauf kann man $\lambda(p) = d(p, B)/(d(p, B) + d(p, \bar{A}-A))$ und $\varphi^* = \lambda\, \varphi + (1-\lambda)\sigma$ setzen.

3. Der zyklische Charakter eindimensionaler Schnitte

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt werden hier Urbild- und Bildmannigfaltigkeit als orientierbar vorausgesetzt. Wir wollen zeigen:

Satz 6. *Seien M, N orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = (\dim N) + 1 > 1$, ferner A ein eindimensionales endliches Polyeder in M und f, g stetige Abbildungen von M in N mit A als Schnitt. Dann ist jede charakteristische Kette von (f, g) ein ganzzahliger Zyklus.*

Beweis. Sind M^* eine Orientierung von M, N^* eine solche von N, K eine simpliziale Zerlegung von A und x eine orientiertes 1-Simplex aus K, so bezeichne $\mu(x)$ die Multiplizität von x bezüglich (f, g, M^*, N^*). Ist dann a ein Eckpunkt von K, so genügt es wegen $\mu(-x) = -\mu(x)$, die folgenden Aussagen (1) und (2) nachzuweisen.

(1). Sind $A_1, \ldots, A_m$, $m > 1$, die 1-Simplexe aus K mit a als Eckpunkt und a_i der Eckpunkt $\neq a$ von A_i, so gilt

$$\mu(x_1) = \Sigma_{i>1}\, \mu(x_i),$$

wobei x_1 die Orientierung $a_1 \to a$ von A_1 und x_i für $i > 1$ die Orientierung $a \to a_i$ von A_i.

(2). Wenn in K nur ein 1-Simplex mit a als Eckpunkt liegt und y eine Orientierung dieses 1-Simplexes bezeichnet, so ist $\mu(y) = 0$.

Beweis von (1). Offenbar gibt es in M von τ stetig abhängende n-Zellen B^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, derart, daß $A.(\overline{B}^\tau - B^\tau) = 0$ für alle τ, ferner $A.B^0 = a_1$ und $A.B^1$ aus den Punkten $a_2, \ldots, a_m$ besteht. Seien $C_2, \ldots, C_m$ paarweis zueinander fremde n-Zellen in B^1 mit $a_i \in C_i$ für alle i. Weiter seien

$\omega(B^0)$ die von (M^*, x_1) in B^0 nach einer Erklärung aus Abschnitt 1,

$\omega(B^\tau)$ die von $\omega(B^0)$ vermöge $\{B^\sigma\}$ in B^τ,

$\omega(\overline{B}^\tau - B^\tau)$ die von $\omega(B^\tau)$ in $\overline{B}^\tau - B^\tau$,

$\omega(C_i)$ die von (M^*, x_i) in C_i,

$\omega(\overline{C}_i - C_i)$ die von $\omega(C_i)$ in $\overline{C}_i - C_i$

induzierte Orientierung. Die von $\omega(C_i)$ in B^1 induzierte Orientierung ist gleich $\omega(B^1)$.

Man kann fürs folgende annehmen, die B^τ und C_i seien Simplexe und es existiere ein n-Simplex D in N mit

$$f(\overline{B}^\tau) + g(\overline{B}^\tau) \subset D \text{ für alle } \tau.$$

Für $p \in \overline{B}^\tau - B^\tau$ sei $h^\tau(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$. Für $p \in \overline{C}_i - C_i$ sei $h_i(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$.

Bedeuten dann $\omega(D)$ die von N^* in D und $\omega(\overline{D} - D)$ die von $\omega(D)$ in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung, ferner γ^τ den Grad der Abbildung

$$h^\tau : \omega(\overline{B}^\tau - B^\tau) \to \omega(\overline{D} - D)$$

und γ_i den Grad der Abbildung $h_i : \omega(\overline{C}_i - C_i) \to \omega(\overline{D} - D)$, so ist

$$\mu(x_1) = \gamma^0 = \gamma^1 = \Sigma\, \gamma_i = \Sigma_{i>1}\, \mu(x_i),$$

womit (1) bewiesen.

Beweis von (2). Es existieren in M von τ stetig abhängende n-Zellen E^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, und in N eine n-Zelle F derart, daß $A\,.\,(\overline{E}^\tau - E^\tau) = 0$ für alle τ, ferner

$$A \,.\, E^0 = a,\ A \,.\, E^1 = 0 \text{ und } f(\overline{E}^\tau) + g(\overline{E}^\tau) \subset F \text{ für alle } \tau.$$

Fürs weitere kann man annehmen, F und die E^τ seien Simplexe. Bezeichne alsdann $w^\tau(p)$ für $p \in \overline{E}^\tau$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{F}-F$ aus $g(p)$. Offenbar hat die Abbildung $w^1 : \overline{E}^1 - E^1 \to \overline{F}-F$ den Grad Null. Somit hat $w^0 : \overline{E}^0 - E^0 \to \overline{F}-F$ den Grad Null. Daher $\mu(y) = 0$, wie behauptet.

4. Andere Probleme aus der Topologie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

Die obigen Sätze handeln vornehmlich über Abbildungen dreidimensionaler in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Der Fall, in dem die Bildmannigfaltigkeit dreidimensional, wird in einer Reihe älterer Arbeiten, so in [4], [7], [9] und [10], behandelt und ist in [3] nochmals von einer anderen Sicht her beleuchtet worden. Wenn die Bildmannigfaltigkeit eindimensional, so bieten sich, wie dies nicht anders erwartet werden kann, verschiedene Möglichkeiten an, die zugehörige Abbildungstheorie elementar aufzubauen.

Daneben steht die Gesamtheit jener Fälle, in denen die Bildmannigfaltigkeit eine Dimension größer als 3 hat. Diese Gesamtheit freilich ist gänzlich unübersehbar. Lediglich für einige Sonderfälle liegen Ergebnisse vor. So finden sich zum Beispiel in [5] die 3-dimensionalen Hurewiczschen Homotopiegruppen der n-dimensionalen Rotationsgruppen mit $n \geq 4$ berechnet. Und die durch [6] eingeleiteten Untersuchungen von Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre in n-dimensionale Sphären haben zu konkreten Ergebnissen geführt, wie man etwa [11] entnimmt.

Literatur

[1] *L. E. J. Brouwer*: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **71**, 97—115 (1912).

[2] *L. E. J. Brouwer*: Sur la notion de „classe" de transformations d'une multiplicité, Proc. 5th Intern. Math. Congr. Cambridge **2**, 9—10 (1912).

[3] *W. Franz*: Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume, Journal Reine Angew. Math. **185**, 65—77 (1943).

[4] *R. Furch*: Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes, Abhandlungen Math. Seminar Hamburg **3**, 237—245 (1923).

[5] *P. J. Hilton*: An introduction to homotopy theory, Cambridge Tracts Math. and Math. Physics **43**, 60 und 62 (1953).

[6] *H. Hopf*: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre in die Kugelfläche, Math. Ann. **104**, 637—665 (1931).

[7] *H. Hotelling*: Three dimensional manifolds of states of motion, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 329—344 (1925).

[8] *W. Hurewicz* and *H. Wallman*: Dimension theory, Princeton Math. Series **4**, 82 (1948).

[9] *H. Kneser*: Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Göttinger Nachr. 128—130 (1925).

[10] *H. Seifert*, Topologie 3-dimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. **60**, 147—238 (1932).

[11] *N. Steenrod*: The topology of fibre bundles, Princeton Math. Series **14**, 108 (1951).