Ein allgemeines Extremalproblem für konvexe Körper

Von

D. Ohmann, Milano

(Eingegangen am 13. Juni 1957)

Das Extremalproblem, unter allen konvexen Körpern K des n-dimensionalen euklidischen Raumes, die mit dem festen konvexen Körper K' positiven Volumens das vorgegebene gemischte Volumen $V(K'; K, \ldots, K)$ besitzen, denjenigen maximalen Volumens zu bestimmen, wird bekanntlich durch die Gleichheitsbedingung für die Minkowskische Ungleichung $V(K'; K, \ldots, K)^n \geq V(K')\, V(K)^{n-1}$ ($V(K) =$ Volumen von K) eindeutig gelöst. Demnach wird der Extremalkörper durch einen zu K' homothetischen konvexen Körper repräsentiert.

Die Voraussetzungen für dieses Extremalproblem lassen sich in drei Schritten erweitern: (a) An die Stelle des gemischten Volumens $V(K'; K, \ldots, K)$ tritt das noch näher zu beschreibende Oberflächenintegral $J(g; K)$ mit einer beliebigen richtungsabhängigen Funktion $g(\zeta)$. (b) Man faßt gleichzeitig die Oberflächenintegrale mit einer Anzahl $k \geq 1$ vorgegebener Funktionen $g_\varkappa(\zeta)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) ins Auge. (c) Die Oberflächenintegrale werden nicht alle fest vorgegeben, sondern unterliegen zum Teil lediglich bestimmten Ungleichheitsrelationen.

Im folgenden wird das Extremalproblem in dem eben umrissenen Umfang in Angriff genommen und bis auf die Beantwortung einer Existenzfrage auch vollständiger Lösung zugeführt. Das Kernstück des einfachen Beweises stellt dabei die oben angeführte Minkowskische Ungleichung. Ungeklärt bleibt jedoch die Frage, ob die Menge der jeweils zur Konkurrenz zuzulassenden Körper auch in jedem der Fälle, in denen das Extremalproblem einen Sinn besitzt, tatsächlich einen Körper der von uns in Betracht zu ziehenden Extremalkörperklasse enthält. Bei Einhaltung einschränkender Bedingungen (Stetigkeit und Positivität der beteiligten Funktionen und Fortfall der Erweiterung (c)) ist dies zu bejahen und kann durch Induktion bezüglich der Anzahl k der

Funktionen erwiesen werden. Im Interesse weitester Anwendungsmöglichkeiten ist jedoch auf die Einführung der genannten Einschränkungen verzichtet.

Die im Anschluß an das allgemeine Problem als Anwendungsbeispiele zu besprechenden speziellen Extremalprobleme bieten zumeist nichts völlig Neues, sondern stellen hauptsächlich Verallgemeinerungen schon bekannter Extremalprobleme dar. Es scheint jedoch, daß ihr Zusammenhang und damit auch die Möglichkeit einer gemeinsamen Lösungsmethode bisher nicht erkannt wurden.

§ 1. Das allgemeine Problem

Zunächst einige Definitionen: Das Oberflächenintegral $J(g; K)$ des konvexen Körpers K mit der auf die Richtung ζ bezogenen Funktion $g(\zeta)$ wird durch die Formel

$$J(g; K) = \int_K g(\zeta)\, dF \tag{1}$$

erklärt. Dabei bezeichnet ζ unter dem Integral die äußere Normalenrichtung des Flächenelements dF von K. Führt man hier noch die Voraussetzung ein, daß $g(\zeta)$ beschränkt ist, und daß das Integral (1) für die Einheitskugel existiert, so ist auch die Existenz aller Integrale (1) sichergestellt. Wir wollen $g(\zeta)$ dann kurz als *integrierbar* bezeichnen.

Ist $g(\zeta)$ mit der Stützfunktion $h(K'; \zeta)$ eines festen konvexen Körpers K' identisch, so bezeichnen wir das Oberflächenintegral auch einfach durch $J(K'; K)$. Damit ergibt sich die folgende Beziehung zu den Minkowskischen gemischten Volumina:

$$J(K'; K) = n\, V(K'; K, \ldots, K), \tag{2}$$

womit die eingangs erwähnte Minkowskische Ungleichung die Gestalt

$$J(K'; K)^n \geq n^n\, V(K')\, V(K)^{n-1} \tag{3}$$

gewinnt.

Der Funktion $g(\zeta)$ läßt sich eine weitere richtungsabhängige Funktion eindeutig durch die Festlegung $\bar{g}(\zeta) = \liminf g(\zeta')$ $(\zeta' \to \zeta)$ zuordnen, wobei ζ für den Moment festzuhalten ist, und ζ' beliebig variiert und auch mit ζ selbst zusammenfallen darf. Wir bezeichnen $\bar{g}(\zeta)$ als *Unterfunktion* zu $g(\zeta)$. Aus der Definition ergibt sich für konvergente Richtungsfolgen $\zeta_\mu (\mu = 1, 2, \ldots; \lim \zeta_\mu = \zeta)$ unmittelbar die Beziehung

$$\bar{g}(\zeta) \leq \liminf \bar{g}(\zeta_\mu) \quad (\zeta_\mu \to \zeta), \tag{4}$$

mit deren Hilfe unschwer festzustellen ist, daß die Unterfunktion $\bar{g}(\zeta)$ mit $g(\zeta)$ integrierbar ist.

Der Halbraum $H(g; \zeta)$ umfasse alle Punkte $\mathfrak{x}$, für die $\zeta\, \mathfrak{x} \leq g(\zeta)$ ausfällt. Dabei steht ζ auch für den Einheitsvektor der Richtung ζ, und es gibt $\mathfrak{x}$ gleichzeitig den zum Punkt $\mathfrak{x}$ hinweisenden Ortsvektor an, so daß $\zeta\, \mathfrak{x}$ als skalares Produkt anzusehen ist. Ist der Durchschnitt aller $H(g; \zeta)$ alsdann nicht leer, so stellt er einen konvexen Körper dar. Dieser wird als *Rumpfkörper* der Funktion $g(\zeta)$ mit R_g bezeichnet.

Mit diesen Definitionen gestattet das allgemeine Extremalproblem und dessen Lösung die folgende Formulierung:

Hauptsatz: *Bei Vorgabe der integrierbaren Funktionen* $g_\varkappa(\zeta)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k)$ *und der festen Größen* $c_\varkappa$ *möge die Menge* $\mathfrak{K}$ *der konvexen Körper* K *positiven Volumens dadurch bestimmt sein, daß für alle* $K \in \mathfrak{K}$ *bei festem* $\varkappa$ *die gleiche der drei Relationen* $J(g_\varkappa; K) \geq c_\varkappa, = c_\varkappa$ *bzw.* $\leq c_\varkappa$ *gültig ist. Läßt sich den* $c_\varkappa$ *unter Einhaltung der Voraussetzung*

$$\lambda_\varkappa \left[J(g_\varkappa; K) - c_\varkappa\right] \leq 0 \qquad (K \in \mathfrak{K}) \tag{5}$$

jeweils ein festes Koeffizienten-k-Tupel $\lambda_\varkappa$ *zuordnen, so daß der Rumpfkörper* R_g *der Linearkombination* $g(\zeta) = \Sigma\, \lambda_\varkappa\, g_\varkappa(\zeta)$ *den Bedingungen*

$$\text{(a) } R_g \in \mathfrak{K}, \quad \text{(b) } J(g; R_g) = J(\bar{g}; R_g), \quad \text{(c) } \lambda_\varkappa \left[J(g_\varkappa; R_g) - c_\varkappa\right] = 0 \tag{6}$$

genügt, so besitzt R_g *unter allen* $\mathfrak{K}$ *angehörenden Körpern maximales Volumen. Darüberhinaus kommt nur den zu* R_g *translationsgleichen*[1] *Körpern die Extremaleigenschaft zu.*

Wir merken an, daß die Bedingungen (5) und (6c) durch die Zulassung von Ungleichheitsbeziehungen erforderlich werden. Die für stetige Funktionen trivialerweise erfüllte Bedingung (6b) muß bei Betrachtung unstetiger Funktionen hinzutreten; schon im Falle $k = 1$ ist leicht einzusehen, daß sie für die Existenz eines Extremalkörpers notwendig ist.

Zum Beweis erschließen wir mit Hilfe von (5) zunächst

$$\Sigma\, \lambda_\varkappa\, c_\varkappa \geq J(\bar{g}; K). \tag{7}$$

Weiter entnehmen wir den Definitionen die Beziehung

$$\bar{g}(\zeta) \geq h(R_g; \zeta), \tag{8}$$

aus der unmittelbar

$$J(\bar{g}; K) \geq J(R_g; K) \tag{9}$$

fließt. Bei Benutzung von (3) ergibt sich daher

[1] Zwei Körper mögen translationsgleich heißen, wenn sie durch eine geeignete Translation einer der Körper miteinander zur Deckung gebracht werden können.

$$(\Sigma \lambda_\varkappa c_\varkappa)^n \geq n^n V(R_g) V(K)^{n-1} \qquad (K \in \mathfrak{K}). \tag{10}$$

Um die Extremaleigenschaft von R_g zu erweisen, gilt es nun zu zeigen, daß in (10) dann und nur dann Gleichheit auftritt, wenn K und R_g translationsgleich sind. Da die Ungleichung (10) durch Kombination von (3), (7) und (9) entstanden ist, machen wir uns zunächst klar, daß in (7) und (9) unter dieser Voraussetzung Gleichheit besteht. In der Tat folgt dies für (7) wegen der Translationsinvarianz der Oberflächenintegrale sofort aus (6). Für (9) folgert man aus der Definition der Rumpfkörper mit Rücksicht auf Formel (4), daß in jedem Punkt des Randes von R_g eine äußere Normalenrichtung existiert, die der Menge ω der Richtungen ζ angehört, für die in (8) Gleichheit eintritt. Die Randpunkte mit äußeren Normalenrichtungen $\zeta \notin \omega$ sind mithin *singulär*, d. h. in ihnen besitzt R_g wenigstens zwei äußere Normalenvektoren. Nun kommt der Gesamtheit der singulären Randpunkte eines konvexen Körpers jedoch das Maß null zu. Daher gewinnt man aus (8) durch Integration über die Oberfläche von R_g die zu erweisende Beziehung $J(\bar{g}; R_g) = J(R_g; R_g)$, die ersichtlich auch für die mit R_g translationsgleichen Körper gültig ist. Da in der ebenfalls zur Herleitung von (10) verwendeten Minkowskischen Ungleichung (3) im Falle $V(K)$, $V(K') > 0$ genau dann Gleichheit auftritt, wenn die Körper K und K' homothetisch sind, was hier wegen (6a) mit der Translationsgleichheit von K und R_g gleichbedeutend ist, ist der Beweis für die oben formulierte Gleichheitsbedingung der Ungleichung (10) damit abgeschlossen.

§ 2. Spezielle Probleme

Es ist zweckmäßig, hier noch einige allgemeine Vorbemerkungen Platz finden zu lassen.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß auch bei der Behandlung der folgenden Einzelprobleme im allgemeinen nicht auf die Existenzfrage für die Rumpfkörper eingegangen wird. Das bedeutet, daß die Entwicklungen an sich nur für die Fälle Gültigkeit haben, in denen die durch den Hauptsatz gegebenen Bedingungen tatsächlich erfüllt sind. Bei den meisten Beispielen wird jedoch leicht einzusehen sein, daß damit alle Möglichkeiten bis auf vereinzelte Grenzfälle erschöpft sind.

Werden die $g_\varkappa(\zeta)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ durch die Stützfunktionen $h(K_\varkappa; \zeta)$ konvexer Körper $K_\varkappa$ repräsentiert, so lassen sich die Rumpfkörper als Minkowskische Linearkombinationen der $K_\varkappa$ selbst darstellen. In der Tat: definiert man die positive Linearkombination $\Sigma \lambda_\varkappa K_\varkappa$

($\lambda_\varkappa > 0$) und die Minkowskische Differenz $A - B \supset 0$ ($0 =$ leere Menge) der konvexen Körper $K_\varkappa$ bzw. A, B durch die Formeln

$$\text{(a)}\ h(\Sigma\lambda_\varkappa K_\varkappa; \zeta) = \Sigma\, \lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)\ (\lambda_\varkappa > 0),$$

$$\text{(b)}\ h(A - B; \zeta) \leq h(A; \zeta) - h(B; \zeta), \tag{11}$$

wobei im Fall der Differenz hinzuzufügen ist, daß $A - B$ den umfassendsten Körper darstellt, für den eine solche Relation (11b) besteht, so ist der Konstruktion der Rumpfkörper sofort zu entnehmen, daß die Rumpfkörper von $\Sigma\, \lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)$ ($\lambda_\varkappa > 0$) und $h(A; \zeta) - h(B; \zeta)$ mit $\Sigma\, \lambda_\varkappa K_\varkappa$ bzw. $A - B$ übereinstimmen. Bei beliebiger Linearkombination $h(\zeta) = \Sigma\, \lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)$ ordnet man zu $h(\zeta) = \sum\limits_{\lambda_\varkappa \geq 0} \lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta) - \sum\limits_{\lambda_\varkappa < 0} |\lambda_\varkappa|\, h(K_\varkappa; \zeta)$ und erschließt nach Einführung des Symbols $< \Sigma\, \lambda_\varkappa K_\varkappa >$ für die geordnete Linearkombination $\sum\limits_{\lambda_\varkappa \geq 0} \lambda_\varkappa K_\varkappa - \sum\limits_{\lambda_\varkappa < 0} |\lambda_\varkappa|\, K_\varkappa$ die endgültige Formel

$$R_h = < \Sigma\, \lambda_\varkappa K_\varkappa >. \tag{12}$$

Um diesen Sachverhalt zur vereinfachten Konstruktion der Rumpfkörper zu nutzen, notieren wir für die Minkowskische Summe und Differenz noch die bekannten Darstellungen als Vereinigungsmenge und Durchschnitt

$$\text{(a)}\ A + B = \cup\, A^{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x} \in B), \quad \text{(b)}\ A - B = \cap\, A^{\mathfrak{x}}\ (\mathfrak{x} \in \overline{B}). \tag{13}$$

Hier ist $A^{\mathfrak{x}}$ aus A durch Verschiebung um den Vektor $\mathfrak{x}$ hervorgegangen, und $\overline{B}$ aus B durch Spiegelung am Ursprung gewonnen.

Um den speziellen Problemen hinreichende Allgemeinheit und zudem einen gemeinsamen Rahmen zu geben, lassen wir sie der Minkowskischen Relativgeometrie angehören. Wir legen dabei einen konvexen Eichkörper K_0 zugrunde, dessen Oberfläche wir als stetig gekrümmt voraussetzen wollen. Die zu K_0 homothetischen Körper werden als R-Kugeln ($R =$ Relativ) angesprochen; ihr R-Radius wird durch das Ähnlichkeitsverhältnis zu K_0 gegeben. Wir bestimmen noch einen beliebigen, aber von nun an festzuhaltenden Punkt des Inneren des Eichkörpers zu dessen R-Mittelpunkt; allgemein werden die Punkte, die eine ähnliche Lage im Innern einer R-Kugel einnehmen, als deren R-Mittelpunkt bezeichnet. Weiter führen wir für das Oberflächenintegral $J(K_0; K)$ auch die Bezeichnung R-Oberfläche mit dem Symbol F^* ein. Es ist schließlich zu bemerken, daß im folgenden alle Stücke die sich auf den

Eichkörper K_0 beziehen, durch einen unteren Index null gekennzeichnet werden.

A. In dieser ersten Gruppe von speziellen Extremalproblemen seien zur R-Oberfläche Linearkombinationen von Quermaßen vorgegeben. Das Quermaß $Q(K;\eta)$ gibt dabei das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Orthogonalprojektion von K in der Richtung η wieder. Wegen der unmittelbar einzusehenden Beziehung $Q(K;\eta)=J(E_\eta;K)$ ($E_\eta=$ Einheitsstrecke der Richtung η) haben wir hier Spezialfälle unseres allgemeinen Problems vor uns.

1. Es seien F^* und $Q(\eta)$ bei festem η vorgegeben[2]. Nach dem Hauptsatz und unter Beachtung von (12) kommen als Körper maximalen Volumens die Minkowskischen Linearkombinationen $<\lambda_1 K_0+\lambda_2 E_\eta>$ in Betracht. Da diese bei $\lambda_1\leq 0$ nicht existieren bzw. verschwindendes Volumen besitzen, darf $\lambda_1>0$ vorausgesetzt werden. Daher bleiben die Fälle (a) $\lambda_2>0$, (b) $\lambda_2=0$, (c) $\lambda_2<0$ zu unterscheiden. Wie man aus (13) folgert, ergibt sich als Extremalkörper im Falle (a) die Vereinigungsmenge aller R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf der Strecke $\lambda_2 E_\eta$ liegen, im Falle (b) eine R-Kugel des R-Radius λ_1 und schließlich im Falle (c) der Durchschnitt zweier R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Endpunkten der Strecke $\lambda_2 E_\eta$ zusammenfallen. Diese drei Fallunterscheidungen entsprechen ersichtlich den Möglichkeiten

$$\frac{F^*}{Q(\eta)} \gtreqless \frac{F_0{}^*}{Q_0(\eta)}$$

Mit der vorliegenden Aufgabe sind in der Ebene für den Fall, daß der Eichbereich durch den Einheitskreis dargestellt wird, gleichzeitig die Probleme gelöst, die Bereiche maximalen Inhalts unter den konvexen Bereichen zu bestimmen, die bei festem Umfang noch vorgegebene Dicke (Fall (a)) bzw. vorgegebenen Durchmesser (Fall (c)) besitzen[3].

---

[2] Für den speziellen Fall, daß der Eichkörper mit der Einheitskugel übereinstimmt, ist die Lösung des Problems bekannt. Hiefür liegen z. B. Arbeiten von *E. Schmidt* und *A. Dinghas* vor:

E. Schmidt, Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen. Math. Z. 47, 489—642 (1942).

A. Dinghas, Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, Math. Ztschr. 49, 734—792 (1944).

[3] Diese Probleme wurden schon von *T. Kubota* gelöst: *T. Kubota*, Einige Ungleichheitsbeziehungen über Eilinien und Eiflächen. Sci. Rep. Tohoku Univ. 12, 45—65 (1923).

2. Die R-Oberfläche F^* und die Quermaß-Linearkombination $\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(\eta_\nu) (\alpha_\nu > 0)$ seien vorgegeben. Dabei mögen die Richtungen $\eta_\nu\, (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ein orthogonales n-Tupel bilden. Nun ist $\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(K; \eta_\nu) = J(P; K)\; (P = \Sigma\, \alpha_\nu\, E_{\eta_\nu})$, wobei P das nach den Richtungen η_ν orientierte Parallelotop der Kantenlängen α_ν darstellt. Mithin ergeben sich als Extremalkörper die Minkowskischen Linearkombinationen $< \lambda_1\, K_0 + \lambda_2\, P >$. Wir haben hier die Fallunterscheidungen

$$\text{(a) } \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0; \quad \text{(b) } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0; \quad \text{(c) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0; \quad \text{(d) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0; \quad \text{(e) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \tag{14}$$

zu treffen und erhalten demgemäß die folgenden Extremalkörper: (a) das mit P gleichorientierte Parallelotop mit den Kantenlängen $\lambda_2\, \alpha_\nu - \lambda_1\, b_0(\eta_\nu)$ ($b_0(\eta_\nu)$ = Breite von K_0 in der Richtung η_ν); (b) das zu P homothetische Parallelotop der Kantenlängen $\lambda_2\, \alpha_\nu$; (c) die Vereinigungsmenge aller R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf dem Parallelotop $\lambda_2\, P$ liegen; (d) die R-Kugel des R-Radius λ_1; (e) den Durchschnitt der 2^n R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Ecken des Parallelotops $\lambda_2\, P$ zusammenfallen. Nachdem man den Quotienten $q = \dfrac{F^*}{\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(\eta_\nu)}$ eingeführt und die Beziehung $q(P) \geq q(K_0)$ mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung (3) erschlossen hat, lassen sich die Fälle (a) bis (e) leicht den folgenden Möglichkeiten zuordnen:

$$\text{(a) } q > q(P); \quad \text{(b) } q = q(P); \quad \text{(c) } q(P) > q > q(K_0), \quad \text{(d) } q = q(K_0;) \quad \text{(e) } q < q(K_0).$$

Es sei dazu angemerkt, daß dieses Beispiel mit seinen Fallunterscheidungen als typisch für den allgemeinen Fall anzusehen ist, daß die Oberflächenintegrale mit zwei verschiedenen konvexen Körpern positiven Volumens vorgegeben sind.

3. Es mögen schließlich die einzelnen Quermaße $Q(\eta_\nu)$ bei linear unabhängigem n-Tupel η_ν vorgegeben sein. Als Extremalkörper erscheinen die Linearkombinationen $\Sigma\, \lambda_\nu\, E_{\eta_\nu}$, bei denen ersichtlich alle $\lambda_\nu > 0$ vorauszusetzen sind, womit sich die Extremalkörper als Parallelotope ergeben, die nach den Richtungen η_ν orientiert sind.

B. Bezeichnet ω eine Untermenge der Einheitskugelfläche, und wird eine Funktion durch $g_\omega(\zeta) = \begin{cases} 1 (\zeta \in \omega) \\ 0 (\zeta \notin \omega) \end{cases}$ festgelegt, so lassen sich bei spezieller Wahl von ω durch die Vorgabe von $J(g_\omega; K)$ unterschiedliche

Bedingungen für die Krümmungsverhältnisse des Randes von K gewinnen. Wir geben hierfür einige Beispiele.

1. F^* sei vorgegeben; zudem möge jeder Randpunkt singulär sein, in dem eine Stütznormalenrichtung $\zeta \in \omega$ bei fester Menge ω existiert[4]. ω sei offen und enthalte keine offene Halbkugelfläche. Man kann sodann die Bedingung $J(g_\omega; K) \leq 0$ einführen. Damit kommen die Rumpfkörper der Linearkombinationen $g(\zeta) = \lambda_1 h_0(\zeta) + \lambda_2 g_\omega(\zeta)$ als Extremalkörper in Frage. Diese existieren nur für $\lambda_1 > 0$; weiter muß nach dem Hauptsatz aber auch $\lambda_2 > 0$ sein. Bei hinreichend großem λ_2 stellen die R_g Tangentialkörper der R-Kugeln $\lambda_1 K_0$ dar. Man erhält diese jeweils als Durchschnitt aller Halbräume, die von den Stützebenen an $\lambda_1 K_0$ begrenzt werden, deren Stütznormalenrichtungen der Menge ω nicht angehören. Es ist leicht zu verifizieren, daß die so beschriebenen Tangentialkörper den Bedingungen des Hauptsatzes genügen und mithin die Körper maximalen Volumens darstellen.

2. Neben F^* seien Flachstellen der jeweiligen Mindestgröße F_μ bei fester äußerer Normalenrichtung η_μ ($\mu=1, 2, \ldots, m$) vorgeschrieben[5]. Die Mengen ω_μ werden hier mit den η_μ identifiziert; sodann wird $J(g_{\omega_\mu}; K) \geq F_\mu$ gesetzt. Damit bieten sich die Rumpfkörper der Linearkombinationen $\lambda_0 h_0(\zeta) + \Sigma \lambda_\mu g_{\omega_\mu}(\zeta)$ als Extremalkörper an. Zu deren Existenz muß $\lambda_1 > 0$ ausfallen; aus dem Hauptsatz folgt außerdem $\lambda_2 \leq 0$. Man erkennt, daß diese Rumpfkörper durch die Kalottenkörper der R-Kugeln $\lambda_0 K_0$ gebildet werden, die dadurch entstehen, daß man von $\lambda_0 K_0$ senkrecht zu den Richtungen η_μ Kalotten der jeweiligen Höhe λ_μ abschneidet. Die Kalotten dürfen sich dabei gegenseitig überschneiden, so daß in Grenzfällen auch Polyeder auftreten können. Setzt man nun voraus, daß der Menge der zur Konkurrenz zuzulassenden Körper ein Kalottenkörper angehört, dessen Flachstellen jeweils den Inhalt F_μ besitzen, so erfüllt dieser ersichtlich alle Bedingungen des Hauptsatzes und stellt damit den Körper maximalen Volumens dar.

3. Bei festem Einheitsvektor η umfasse ω_1 die offene bzw. ω_2 die abgeschlossene Halbkugel, für deren Normalenvektoren ζ die Beziehung

---

[4] Zum ersten Mal wurde dieses Problem in ähnlicher Formulierung von *A. Dinghas* behandelt:

A. Dinghas, Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichungen für konvexe Körper mit Ecken. Math. Ztschr. 47, 669—675 (1940).

[5] Im Fall der Identität von Eichkörper und Einheitskugel wurde dieses Problem von *H. Hadwiger* aufgeworfen und gelöst:

H. Hadwiger, Über konvexe Körper mit Flachstellen. Math. Ztschr. 52, 212—216 (1949).

$\zeta\,\eta > 0$ bzw. $\zeta\,\eta \geq 0$ erfüllt ist. Durch $J(g_{\omega_1}; K)$ bzw. $J(g_{\omega_2}; K)$ wird dann eine offene bzw. abgeschlossene Halbfläche des konvexen Körpers K vorgegeben. Bei Vorgabe von F^* und festem c_1, c_2 treffen wir nun nacheinander die Zusatzvoraussetzungen (a) $J(g_{\omega_1}; K) \leq c_1$ bzw. $J(g_{\omega_2}; K) \geq c_2$. Die Extremalkörper müssen dann von den Rumpfkörpern der Linearkombinationen

(a) $\lambda_1 h_0(\zeta) + \lambda_2 g_{\omega_1}(\zeta)$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$ bzw. (b) $\lambda_1 h_0(\zeta) - \lambda_2 g_{\omega_2}(\zeta)$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$

gestellt werden. Zu deren Beschreibung stelle K^{η} bzw. $K^{-\eta}$ die Vereinigungsmenge des Körpers K mit dem von ihm in der Richtung η bzw. $-\eta$ zu entwerfenden Projektionshalbzylinder dar. Sodann verifiziert man unschwer, daß diese Rumpfkörper R_1, R_2 sich in folgender Weise als Durchschnitt darstellen lassen: (Ω = Einheitskugel):

a) $R_1 = (\lambda_1 K_0)^{\eta} \cap (\lambda_1 K_0 + \lambda_2 \Omega)$ (b) $R_2 = \lambda_1 K_0 \cap (\lambda_1 K_0 - \lambda_2 \Omega)^{-\eta}$.

R_1 und R_2 erfüllen die Bedingung (6b) und geben daher in ihrer Klasse die Extremalkörper ab.

C. In der Ebene werden nun einige Probleme behandelt, die keine unmittelbare Übertragung auf den Raum zulassen. Es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung von Problemen auf die R-Geometrie, die von *S. Fukasawa*[6] und *A. S. Besicovitch*[7] für den Fall aufgeworfen und gelöst wurden, daß der Eichbereich B_0 den Einheitskreis darstellt. So werden wir bei gegebenem R-Umfang verlangen, daß die betrachteten Bereiche B einem festen Dreieck D einbeschrieben sind (*Fukasawa*), bzw. daß für sie $B \subseteq B'$ oder $B \supseteq B'$ bei vorgegebenen konvexen Bereich B' besteht (*Besicovich*).

1. Die Bereiche B mögen den gleichen R-Umfang U^* besitzen und sich dem Dreieck D einbeschreiben lassen. Die zweite Bedingung ist äquivalent mit der Vorgabe von $J(D; B)$. Es folgt, daß die Minkowskischen Linearkombinationen $< \lambda_1 B_0 + \lambda_2 D >$ die Extremaleigenschaft besitzen müssen. Bei den nun wieder zu treffenden Fallunterscheidungen (14) ergeben sich daher die folgenden Extremalkörper: (a) und (b) das Dreieck D selbst; (c) Die Vereinigungsmenge aller R-Kreise des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf dem Dreieck $\lambda_2 D$ liegen; (d) der D einbeschriebene R-Kreis; (e) der Durchschnitt der drei R-Kreise des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Ecken des Spiegeldreiecks

[6] *S. Fukasawa*, Ein Maximumproblem über die Eilinien, welche in einem Dreieck eingeschrieben sind. Tohoku Math. J. 26, 118—124 (1926).

[7] *A. S. Besicovitch*, Variants of a Classical Isoperimetric Problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) 3, 42—49 (1952).

$\lambda_2 \overline{D}$ zusammenfallen. Man erkennt, daß die Fallunterscheidungen mit der Einteilung (a) bzw. (b) $U^* = U^*(D)$, (c) $U^*(D) > U^* > \varrho\, U_0^*$ ($\varrho = R$-Inkreisradius von D), (d) $U^* = \varrho\, U_0^*$, (e) $U^* < \varrho\, U_0^*$ korrespondieren.

2. Zur Bewältigung der zweiten Problemklasse benötigen wir einige allgemeine Hilfsbetrachtungen. Dazu seien A und B zwei konvexe Bereiche. Für solche gelten die gleich zu erweisenden Beziehungen:

$$\text{(a) } J(A; B) = J(B; A), \quad \text{(b) } J(A; B_1) \leq J(A; B_2) \quad (B_1 \subseteq B_2) \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a) } (A - B) + B = \cup\, B^{\mathfrak{x}} \; (B^{\mathfrak{x}} \subseteq A) & \\ \text{(b) } A - (A - B) = \cap\, A^{\mathfrak{x}} \; (A^{\mathfrak{x}} \supseteq B) & \quad (16) \\ & \\ \text{(a) } J(A - B; (A - B) + B) = J(A - B; A) & \\ \text{(b) } J(A - B; A - (A - B)) = J(A - B; B) & \quad (17) \end{array}\right\} (A - B \supset 0)$$

Durch (15) werden wegen (2) nur die bekannten Symmetrie- und Monotonie-Eigenschaften des gemischten Flächeninhalts wiedergegeben. Weiter lassen sich die Formeln (16) den Definitionen (13) entnehmen. Danach ist nämlich einerseits $(A - B) + B = \cup\, B^{\mathfrak{x}}$ mit $\mathfrak{x} \in A - B$, woraus auf $\mathfrak{x} \in A^{-\mathfrak{y}}$ für $-\mathfrak{y} \in \overline{B}$ bzw. $\mathfrak{y} \in B$ zu schließen ist. Es folgt $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in A$ und mithin $B^{\mathfrak{x}} \subseteq A$. Andererseits hat man $A - (A - B) = \cap\, A^{\mathfrak{x}}$ unter der Voraussetzung $\mathfrak{x} \in \overline{A - B}$ bzw. $-\mathfrak{x} \in A - B$, woraus jedoch wie eben $B^{-\mathfrak{x}} \subseteq A$ bzw. $B \subseteq A^{\mathfrak{x}}$ folgt.

Zum Beweis von (17) erschließen wir mit Hilfe von (16) $(A - B) + B \subseteq A$ und $A - (A - B) \supseteq B$, merken die Formeln

$$\text{(a) } h((A - B) + B; \zeta) \leq h(A; \zeta), \quad \text{(b) } h(A - (A - B); \zeta) \geq h(B; \zeta) \tag{18}$$

an und folgern aus (11), daß hier für alle die Richtungen ζ Gleichheit auftritt, für die $h(A - B; \zeta) = h(A; \zeta) - h(B; \zeta)$ besteht. Nun erinnern wir uns an ein Ergebnis des § 1, nach dem alle Randpunkte von $A - B$ singulär sind, in denen äußere Normalenrichtungen auftreten, für die diese Relation nicht gilt. Da die Menge der singulären Randpunkte das Maß null besitzt, folgt (17) durch Integration der Beziehungen (18) über den Umfang von $A - B$ und Anwendung der Formel (14a).

Nun zu unseren beiden Extremalproblemen.

(a) Es bezeichne $\mathfrak{K}$ die Klasse von konvexen Bereichen B, für die $U^*(B) = U^*$ und $B \subset B'$ bei vorgegebenem U^* und festem konvexen Bereich B' besteht. Für $U^* \leq \varrho_1 U_0^*$ ($\varrho_1 = R$-Inkreisradius von B') stellt ersichtlich ein R-Kreis des R-Radius $\varrho = \dfrac{U^*}{U_0^*} \leq \varrho_1$ den Extremalbereich der Klasse $\mathfrak{K}$ dar. Bei $U^*(B') > U^* > U_0^*$ setzt man $B_\varrho = B' - \varrho\, B_0\, (\varrho < \varrho_1)$ und $C_\varrho = B_\varrho + \varrho\, B_0$. Nach (16a) ist $C_\varrho = \cup\, (\varrho\, B_0)^{\mathfrak{x}}\, ((\varrho\, B_0)^{\mathfrak{x}} \subset B')$; mit von 0 gegen ϱ_1 zunehmendem ϱ nimmt C_ϱ daher von B' gegen den R-Inkreis von B' ab. ϱ läßt sich mithin durch $U^*(C_\varrho) = U^*$ bestimmen, womit $C_\varrho \in \mathfrak{K}$ gilt. Wir fassen nun die Klasse $\mathfrak{K}'$ der Bereiche B ins Auge, für die $U^*(B) = U^*$ und $J(B_\varrho;\, B) \leq J(B_\varrho;\, B')$ ausfällt. Wegen (15b) ist $\mathfrak{K}' \supset \mathfrak{K}$. Da für C_ϱ nach (17a) $J(B_\varrho;\, C_\varrho) = J(B_\varrho;\, B')$ besteht, kommt C_ϱ dem Hauptsatz gemäß die Extremaleigenschaft in der Klasse $\mathfrak{K}'$ und erst recht in der Klasse $\mathfrak{K}$ selbst zu. C_ϱ läßt sich kurz als Vereinigungsmenge aller R-Kreise geeigneten R-Radius $\varrho < \varrho_1$ beschreiben, die auf B' Platz haben.

(b) Die Klasse $\mathfrak{K}$ umfasse nun alle konvexen Bereiche B, für die $U^*(B) = U^*$ und $B \supset B'$ gilt. Für $U^* \geq \varrho_2\, U_0^*$ ($\varrho_2 = R$-Umkreis-Radius von B') besitzt jeder B' enthaltende R-Kreis des R-Radius $\varrho = \dfrac{U^*}{U_0^*}$ die Extremaleigenschaft. Ist $U^*(B') < U^* < \varrho_2\, U_0^*$, so schreiben wir hier $B_\varrho = \varrho\, B_0 - B'\, (\varrho > \varrho_2)$ und $C_\varrho = \varrho\, B_0 - B_\varrho$. Gemäß (16b) folgt daraus $C_\varrho = \cap\, (\varrho\, B_0)^{\mathfrak{x}}\, ((\varrho\, B_0)^{\mathfrak{x}} \supset B')$. Nun stellt einerseits C_{ϱ_2} den R-Umkreis von B' dar; andererseits kann B' wegen der stetigen Krümmung des Randes von B_0 bei hinreichend großem ϱ beliebig genau durch die Bereiche $C_\varrho \supseteq B'$ approximiert werden. Aus Stetigkeitsgründen ist ϱ daher wieder so bestimmbar, daß $U^*(C_\varrho) = U^*$ und $C_\varrho \in \mathfrak{K}$ besteht. Die Klasse $\mathfrak{K}'$ der Bereiche B, für die $U^*(B) = U^*$ und $J(B_\varrho;\, B) \geq J(B_\varrho;\, B')$ statthat, umfaßt wegen (15b) auch hier wieder die Klasse $\mathfrak{K}$. Da mit Rücksicht auf (17b) $J(B_\varrho;\, C_\varrho) = J(B_\varrho;\, B')$ gilt, stellt C_ϱ nach dem Hauptsatz den Extremalkörper für die Klassen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}'$ dar. Wir beschreiben C_ϱ als Durchschnitt aller B' enthaltenden R-Kreise geeigneten R-Radius $\varrho > \varrho_2$.