Walshfunktionen und endlichdimensionale Hilberträume

Von

Roman Liedl, Innsbruck

(Eingegangen am 17. Dezember 1965)

§ 1. Vorbemerkungen

Über die Theorie der Walshfunktionen gibt es keine ausführlichen Literaturangaben. Daher möchte ich am Ende dieser Arbeit eine anfügen. Ich kann allerdings nicht behaupten, daß diese Aufstellung vollständig ist.

Das Walshsche Funktionensystem bildet in vieler Hinsicht ein bemerkenswertes Orthogonalsystem. Durch seine enge Verwandtschaft mit dem bezüglich seiner Konvergenzeigenschaften schon sehr gut erforschten Haarschen Orthogonalsystems ist auch das Walshsche Orthogonalsystem schon in vielen Arbeiten Gegenstand von Konvergenzuntersuchungen gewesen. Abgesehen von diesen Konvergenzuntersuchungen, die befruchtend auf die Theorie der multiplikativ orthogonalen Systeme und damit auf die trigonometrischen Reihen gewirkt haben, gibt es interessante charakteristische Eigenschaften des Walshsystems.

So zeigte *Sergio Toni*[1], daß ein in $L^2[0, 1]$ reelles Orthonormalsystem $\{w_n(x) \mid n=0, 1, 2, \ldots\}$, für das $|w_n(x)| = 1$ und $w_n(0)=1$ gilt, und für das die Anzahl der Unstetigkeitsstellen der n-ten Funktion $w_n(x)$ in $[0, 1]$ gleich n ist, bis auf eine Umnumerierung der Funktionen identisch mit dem Walshschen Funktionensystem ist. *Paul Civin*[2] zeigte mittels eines kurzen Beweises, daß ein in $L^2\,[0, 1]$ multiplikativ abgeschlossenes Orthonormalsystem unter geringfügigen zusätzlichen Voraussetzungen durch eine eineindeutige maßtreue Transformation des Einheitsintervalles auf sich selbst sich in das Walshsche Funktionensystem überführen läßt. Mir[3] gelang es unabhängig von *Paul Civin* mittels eines anderen Beweisverfahrens zu zeigen, daß sogar ein in $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ multiplikativ abgeschlossenes, vollständiges Orthonormalsystem eine multiplikative Gruppe bildet, in der jedes Element zu sich selbst invers ist, wie dies bei den Walshfunktionen der Fall ist.

---

[1] *Sergio Toni* [1].
[2] *P. Civin* [1].
[3] *R. Liedl* [1].

Dabei stellte sich heraus, daß die bei *Paul Civin* gegebenen Voraussetzungen, daß das Maß des Grundintervalls $\mu\{(-\infty, +\infty)\} = 1$ (bei *Paul Civin* die Länge des Intervalls [0, 1]) und daß die Integratorfunktion μ stetig ist (bei *Paul Civin* die Verwendung des Lebesgue-Integrals), eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von unendlichen, multiplikativ abgeschlossenen, vollständigen Orthonormalsystemen (kurz G-Systemen) ist. Auch bei den unendlichen G-Systemen über $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ stellte sich eine enge Verwandtschaft mit dem Walshsystem heraus.

Es ist klar, daß nach dem oben gesagten bei unstetigen Integratoren μ keine unendlichen G-Systeme existieren. Wir werden nun in dieser Arbeit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ableiten, daß für einen unstetigen Integrator μ in dem dann notwendigerweise endlichdimensionalen Hilbertraum $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ ein endliches G-System existiert.

§ 2. Endlichdimensionale G-Systeme

Definition: Ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem $\{g_n(x)\}$ *über* $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ *heißt G-System, falls für alle* $x \in (-\infty, +\infty)$ *und für alle r, s gilt*

$$g_r(x) \cdot g_s(x) = g_{t(r,s)}(x) \text{ mit } g_{t(r,s)}(x) \in \{g_n(x)\}.$$

G-Systeme sind also bezüglich der Multiplikation Halbgruppen.

Wegen der Vollständigkeit eines G-Systems folgt aus der endlichen Mächtigkeit eines G-Systems die endliche Dimension des zugehörigen Hilbertraumes $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$, wobei wir die Anzahl der Funktionen des G-Systems, die gleich der Dimension des Hilbertraumes ist, mit m bezeichnen.

Damit der Hilbertraum $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ endlichdimensional ist, ist es notwendig und hinreichend, daß eine Menge von Punkten $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ mit zugehörigen Gewichten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} > 0$ existiert, so daß für eine beliebige Funktion $f(x)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\mu = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \cdot f(\alpha_i).$$

Zwei Funktionen aus $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$, die in den Punkten $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ übereinstimmen, unterscheiden sich also nur um eine Nullfunktion. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen eines Orthogonalsystems gilt daher der

Hilfssatz: Zwei Funktionen aus $\{g_n(x)\}$, die in den Punkten $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{m-1}\}$ übereinstimmen, sind identisch.

Wir werden den trivialen Fall $m = 1$ erst bei der Formulierung des Ergebnisses unserer Überlegungen berücksichtigen.

Für $0 \leq n \leq m-1$ folgt aus der Definition $g_n(x)$, $[g_n(x)]^2$, $[g_n(x)]^3, \ldots \in \{g_n(x)\}$.

Wegen der Normierung folgt

$$\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \cdot [g_n(\alpha_i)]^{2k} = 1 \text{ für } k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Wegen $\beta_i > 0$ folgt $g_n(\alpha_i) \leq 1$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Die Indexmenge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ unterteilen wir nun in die drei Mengen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{C}_n$, so daß gilt

$$\begin{aligned} |g_n(\alpha_i)| &= 1 \quad \text{für} \quad i \in \mathfrak{A}_n, \\ 0 < |g_n(\alpha_i)| &< 1 \quad \text{für} \quad i \in \mathfrak{B}_n, \\ g_n(\alpha_i) &= 0 \quad \text{für} \quad i \in \mathfrak{C}_n. \end{aligned}$$

Wir haben dann wegen (1)

$$1 = \sum_{i \in \mathfrak{A}_n} \beta_i [g_n(\alpha_i)]^{2k} + \sum_{i \in \mathfrak{B}_n} \beta_i [g_n(\alpha_i)]^{2k} + \sum_{i \in \mathfrak{C}_n} \beta_i [g_n(\alpha_i)]^{2k}.$$

Da die erste und dritte Summe von k unabhängig sind, muß auch die zweite Summe von k unabhängig sein, weil die Addition aller drei Summen von k unabhängig 1 ergibt. Die zweite Summe kann aber nur dann von k unabhängig sein, wenn $\mathfrak{B}_n = \phi$ und damit die zweite Summe null ist. Daraus folgt, daß die erste Summe gleich 1 ist, was

$$\sum_{i \in \mathfrak{A}_n} \beta_i = 1$$

zur Folge hat.

Mit $g_r(x)$ und $g_s(x)$ ist auch $g_r(x) . g_s(x) = g_{t(r,s)}(x)$ eine Funktion aus $\{g_n(x)\}$. Nun ist $\mathfrak{A}_{t(r,s)} = \mathfrak{A}_r \cap \mathfrak{A}_s$.

Daraus und aus

$$\sum_{i \in \mathfrak{A}_r} \beta_i = \sum_{i \in \mathfrak{A}_s} \beta_i = \sum_{i \in \mathfrak{A}_{t(r,s)}} \beta_i = 1$$

folgt, daß $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}$.

Jetzt folgt wegen $\mathfrak{B}_n = \phi$, daß $\mathfrak{C}_r = \mathfrak{C}_s = \mathfrak{C}$.

Wäre nun $\mathfrak{C} \neq \phi$, dann wären in $\{\alpha_i\}_{i \in \mathfrak{C}}$ alle Funktionen aus $\{g_n(x)\}$ null und damit im Widerspruch zur Definition, $\{g_n(x)\}$ nicht vollständig. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, $\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i = 1$ und $| g(\alpha_i) | = 1$.

$[g_n(x)]^2$ und $[g_n(x)]^4$ stimmen also in den Punkten $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ überein.

Nach dem Hilfssatz sind sie also identisch. Aus der Identität

$$[g_n(x)]^2 \equiv [g_n(x)]^4$$

folgt, daß die Funktionen aus $\{g_n(x)\}$ nur die Werte $+1$, -1 und 0 annehmen können. Da $[g_n(\alpha_i)]^2 = 1$ unabhängig vom Index n gilt, folgt nach dem Hilfssatz, daß die Quadrate aller Elemente aus $\{g_n(x)\}$ dasselbe Element aus $\{g_n(x)\}$ sind. Dieses wollen wir ab jetzt mit $g_0(x)$ bezeichnen. Offensichtlich haben alle Elemente aus $\{g_n(x)\}$ genau die Nullstellen, die $g_0(x)$ hat.

Aus $g_n(\alpha_i) . g_0(\alpha_i) = g_n(\alpha_i)$ $(i, n = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ und dem Hilfssatz folgt, daß $g_0(x)$ ein Einselement der Halbgruppe $\{g_n(x)\}$ ist. Mit dem oben gesagten folgt, daß jedes Element aus $\{g_n(x)\}$ zu sich selbst ein Inverses ist.

Es folgt, daß $\{g_n(x)\}$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe ist, die dem direkten Produkt von zyklischen Zweiergruppen isomorph ist. Daraus folgt, daß die Ordnung von $\{g_n(x)\} = m = 2^l$, also eine Potenz von 2 ist. Damit ist $\{g_n(x)\}$ jeder Untergruppe von der Ordnung 2^l des Walshsystems isomorph. Es sei $\{b_k(x)\}$ eine beliebige Basis der abelschen Gruppe $\{g_n(x)\}$. Eine solche Basis besitzt genau l Elemente. Wir bekommen alle Elemente aus $\{g_n(x)\}$ durch die Bildung aller endlichen Produkte von Basiselementen, wobei in einem Produkt ein Basiselement nur einmal als Faktor aufzutreten braucht. Die Gruppe $\{g_n(x)\}$ hat genau 2^l Untergruppen. Die Funktionswerte einer Funktion aus $\{g_n(x)\}$ sind in einem Punkt $x \notin \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^l-1}\}$ dadurch bestimmt, daß die Basiselemente in x offensichtlich entweder alle gleichzeitig 0 oder jedes für sich beliebig $+1$ oder -1 sein können.

Wir werden nun die Größe der Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^l-1}$ bestimmen. Die Orthonormalitätsrelationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)\, g_n(x)\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, d\mu = \delta_{0n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, 2^l - 1$$

gehen in das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{2^l-1} \beta_i \cdot g_n(\alpha_i) = \delta_{0n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 2^l - 1$$

über, woraus nach einfachen Überlegungen[4] $\beta_i = 2^{-l}$ folgt.

Wir haben also folgendes Ergebnis:

Satz: *In $L^2_\mu(-\infty, +\infty)$ existiert genau dann ein endliches G-System, wenn es in $(-\infty, +\infty)$ 2^l $(l = 0, 1, \ldots)$ Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^l-1}$ gibt, von denen jeder das μ-Maß 2^{-l} hat und jede andere Punktmenge, die keinen der Punkte α_i enthält, das μ-Maß null hat.*

Literatur

G. N. Agaev: [1] A Wiener type theorem for series of Walshfunctions. (Russisch) Dokl. Akad. Nauk. USSR **142** (1962), 751—753.

G. Alexits: [1] Sur la sommabilité des series orthogonales lacunaires. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **4** (1953), 181—188.

G. Alexits: [2] Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Akadémiai Kiadó, Budapest (1960). VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften, Berlin (Lehrbuch).

G. Andreoli: [1] Su due sistemi di funzioni ortogonali constanti a tratti e collegati a determinati Hadamard. Ricera, Napoli **5**, no. 1—2, 3—14 (1954).

R. P. Jr. Boas and *Pollard Hardy:* [1] The multiplicativ completion of sets of functions. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 518—522 (1948).

H. E. Chrestenson: [1] A class of generalized Walsh functions (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 391—392.

H. E. Chrestenson: [2] Some groups of orthonormal functions (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 392.

H. E. Chrestenson: [3] A class of generalized Walsh functions. Pacific J. Math. **5**, 17—31 (1955).

Ci Guan-fu: [1] On absolut convergence of multiple Walsh- and Fourierseries. (Polish, Russian and English summaries) Prace Mat. **5** (1961), 107—117.

Z. Ciesielski, J. Musielak: [1] On absolut convergence of Haarseries. Colloq. Math. **7** (1959), 61—65.

P. Civin: [1] Multiplicative closure and Walshfunctions. Pacific J. Math. **2**, 291—295 (1952).

P. Civin: [2] Orthonormal cyclic groups. Pacific J. Math. **4**, 481—482 (1954).

G. M. Džafarli: [1] On multiplicativ orthogonal systems of functions closed under root extraction. Izv. Akad. Nauk. Azerbaidzan SSR Ser. Fiz.-Math. Teh. Nauk (1961) **6**, 11—23.

N. J. Fine: [1] On the Walsh functions. Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 372—414 (1949).

---

[4] Die Matrix $(G_{ni}) = (2^{-l} \cdot g_n(\alpha_i))$ ist orthogonal.

N. J. Fine: [2] On groups of orthonormal functions I., II. Pacific J. Math. **5**, 61—65 (1955).

N. J. Fine: [3] The generalized Walsh functions. Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 66—77.

N. J. Fine: [4] Fourier-Stieltjes series of Walsh functions. Trans. Amer. Math. Soc. **86** (1957), 246—255.

N. J. Fine: [5] Cesaro summability of Walsh-Fourierseries. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **41** (1955), 588—591.

A. Haar: [1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Mathematische Annalen, t. **69** (1910), p. 331—371.

I. I. Hirschman: [1] The de composition of Walsh- an Fourier series (Memoires). Amer. Math. Soc., no. **15** (1955).

Kacmarz-Steinhaus: [1] Le système orthogonal de M. Rademacher. Studia Mathematica, **2** (1930), 231—247.

Khintchine: [1] Über diadische Brüche. Mathematische Zeitschrift, **18** (1923), 109—116.

Khintchine-Kolmogoroff: [1] Über die Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch Zufall bestimmt werden. Recueil de la Soc. Math. de Moscou, **32** (1925), 668—677.

B. M. Levitan: [1] A generalisation of the operation of translation and infinite hypercomplex systems. Mat. Sb. (N. S.) **16** (58) (1945), 259—280; **17** (59) (1945), 9—44; 163—192 (English. Russian summary).

P. Lévy: [1] Sur une généralisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher. Comment. Math. Helv., **16** (1944), 146—152.

R. Liedl: [1] Über eine spezielle Klasse von stark multiplikativ orthogonalen Funktionensystemen. Monatshefte f. Math., **68**. 2. (1964), 130—137.

G. W. Morgenthaler: [1] On Walsh-Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957), 472—507.

R. E. A. C. Paley: [1] A remarcable series of orthogonal functions, I., II. Proceedings London Math. Soc., (2) **34** (1932), 241—279.

Paley-Zygmund: [1] On some series of functions. Proc. of the Chambridge Phil. Soc., **26** (1930), 337—357, 458—474, **28** (1932), 190—205.

J. J. Price: [1] Certain classes of orthonormal step functions (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc., **62** (1956), 388.

H. Rademacher: [1] Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Math. Annalen, **87** (1922), 112—138.

R. Salem: [1] Sur une propriété des séries de Fourier des fonctions de carré sommable. Comtes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris.

R. G. Selfridge: [1] Generalized Walsh transforms. Pacific J. Math., **5** (1955), 451—480.

Sergie Toni: [1] Su un notevole sistema ortogonale di funzioni. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. fis. Ann. 246⁰. Rend XI Ser. **5**, Nr. 1, 225—230 (1958).

Shigeki Yano: [1] On Walsh-Fourier Series. Tôhoku Math. J. ser. **2**, **3** (1951), 223—242.

Shigeki Yano: [2] On Approximation by Walsh Functions. Proc. Amer. Math. Soc., **2**. No. **6** (1951), 962—967.

Shigeki Yano: [3] Cesàro summability of Walsh-Fourierseries. Tôhoku Math. Journ., **9** (1957), 267—272.

A. A. Sneider: [1] On series of Walsh functions with monoton coefficients. Izvestiya Akad. Nauk. USSR, Ser. Math. **12**, 179—192 (1948) (russisch).

A. A. Sneider: [2] On the uniqueness of expansions in Walsh functions. Math. Sbornik, NS. **24** (66), 279—300 (1949).

A. A. Sneider: [3] On the convergence of subsequences of the partial sums of Fourier series of Walsh functions. Doklady Akad. Nauk. USSR, (NS) **70** (1950), 969—971 (russisch).

Sunouchi, Gen-Ichivô: [1] On the Walsh-Kaczmarz series. Proc. Amer. Math., Soc., **2**, 5—11 (1951).

Tsuchikura Tamotsu [1] Absolute summability of Rademacherseries. Tôhoku Math. J., (2) **10** (1958).

P. L. Uljanov: [1] Divergent series over Haarsystem and over bases. Dokl. Akad. Nauk. USSR, **138** (1961), 556—559 (russisch).

H. D. Ursell: [1] On the convergence almost everywhere of Rademacher-series and of Bochner-Féjér sums of functions almost periodic in the sense of Stepanoff. Proceedings L. M. S. (2) **33**, 457—466.

N. Ya. Vilenkin: [1] Über die Theorie lakunärer orthogonaler Systeme. Iswestija Akad. Nauk. USSR, **13** (1949), 245—252.

N. Ya. Vilenkin: [2] Supplement zu „Theorie der Orthogonalreihen" von Kaczmarz-Steinhaus. Amer. Math. Soc. Transl., (2) **17** (1961), 219—250.

J. L. Walsh: [1] A property of Haar's System of orthogonal functions. Math. Annalen, **90**, 38—45 (1923).

J. L. Walsh: [2] A closed set of normal orthogonal functions. Amer. Journal of Math., **55** (1923), 5—24.

C. Watari: [1] On generalized Walsh-Fourierseries. Tôhoku Math. J., (2) (1958), 211—241.

C. Watari: [2] A generalisation of Haar functions. Tôhoku Math. J., (8) (1956), 286—290.

A. Zygmund: [1] On the convergence of lacunary trigonometric series. Fundamenta Mathematicae, **16** (1930), 90—107, Corrigenda Fund. Math., **18** (1932), 312.

A. Zygmund: [2] Note on trigonometrical and Rademacher's series.

A. Zygmund: [3] Trigonometrical series, Warsaw-Lwow (1935).