# Die charakteristische Funktion von Hilbert für Potenzen von Hauptklassenidealen.*

Von

**P. Anton Plattner** O. F. M., Innsbruck.

*(Eingelangt am 21. Januar 1954.)*

## Einleitung und Zusammenfassung.

Die charakteristische Funktion eines homogenen Polynomideals ($H$-Ideals) ist von *D. Hilbert* in einer grundlegenden Arbeit [1] in allgemeinster Form definiert und in ihren wichtigsten Eigenschaften bestimmt worden. Schon *Hilbert* machte in dieser Arbeit darauf aufmerksam, daß die charakteristische Funktion eine Verallgemeinerung der von *A. Cayley*, *G. Salmon*, *S. Roberts* und *A. Brill* eingeführten Postulationsformel ist, und daß die Koeffizienten der charakteristischen Funktion in engem Zusammenhang mit den von *M. Noether* definierten und behandelten Geschlechtszahlen der zugehörigen algebraischen Mannigfaltigkeiten stehen.

Im Jahre 1909 hat *Severi* [2] mit Hilfe der Postulationsformel die „virtuellen arithmetischen Geschlechter" einer algebraischen Mannigfaltigkeit definiert und viel Mühe darauf verwendet, die Invarianz dieser Zahlen gegenüber birationalen Transformationen wenigstens bei niederen Dimensionen zu zeigen, was u. a. auch von *H. T. Muhly* und *O. Zariski* [3] mit einem gewissen Erfolg durchgeführt worden ist. Wenn auch diese Bemühungen noch zu keinem abschließenden Ergebnis geführt haben, so haben sie doch außer Zweifel gerückt, daß der Grundgedanke richtig ist und daß in der Hilbertfunktion implizit eine Reihe von birationalen Invarianten enthalten sind, deren reine Darstellung noch nicht völlig gelungen sein dürfte.

---

* Auszug aus einer am Mathematischen Seminar der Universität Innsbruck ausgearbeiteten Dissertation.

Vielleicht kann es bei diesen Untersuchungen nützen, die etwas schwerfälligen geometrischen Begriffe der klassischen algebraischen Geometrie beiseitezustellen und diese Frage mit derselben Methode weiter zu behandeln, die *Hilbert* bereits in der oben zitierten Arbeit mit so durchschlagendem Erfolg benützt hat. Die inzwischen hochentwickelte Idealtheorie vermag in vielen Fällen weitreichende Hilfsmittel bereitzustellen. In diesem Sinne habe ich in zwei neueren Arbeiten [5], [6] versucht, unter allgemeinsten Gesichtspunkten zu erforschen, in welcher Weise die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}_x)$ und $H(t; \mathfrak{a}_y)$ zweier $H$-Ideale $\mathfrak{a}_x$ und $\mathfrak{a}_y$ zusammenhängen, von denen das eine durch eine rationale Transformation $(y_j = \varphi_j(x))$ aus dem anderen hervorgeht. Dieser Zusammenhang läßt sich in der folgenden einfachen Formel darstellen:

$$H(t; \mathfrak{a}_y) = H(t; \mathfrak{a}_x) - H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}^t),$$

wo $\mathfrak{u} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und $\mu$ der gemeinsame Grad aller Formen $\varphi_j$ ist.

Es ist hier interessant zu bemerken, daß *Northcott* [7] vor kurzem in dem Bestreben, eine verallgemeinerte Hilbertfunktion für Ideale in Stellenringen zu erklären, eine in wesentlichen Punkten übereinstimmende Formel aufgestellt hat; demnach könnte man die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}_y)$ des transformierten Ideals auch als „verallgemeinerte Hilbertfunktion" des ursprünglichen Ideals $\mathfrak{a}_x$ deuten.

Jedenfalls aber geht aus dieser Formel die Bedeutung des in der nachfolgenden Arbeit behandelten Problems hervor, die explizite Berechnung der Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ für die Potenzen eines $H$-Ideals $\mathfrak{a}$ durchzuführen. Es ist dies als erster Schritt zu werten, das in der obigen Formel auftretende Glied $H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}^t)$ näher zu bestimmen.

Es ist naheliegend, diese Untersuchung zunächst auf Hauptklassenideale

$$\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$$

zu beschränken, deren Basisformen alle denselben Grad $\tau$ haben. Für diese Ideale ist es gelungen, mehrere geschlossene Formeln abzuleiten, mit denen man die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ berechnen kann [Formel (3), (5), (7)]. Ferner konnte bewiesen werden, daß die Koeffizienten der Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ selbst Polynome in $\varrho$ sind, deren Grad genau angegeben werden kann [Satz (19)].

*W. Gröbner.*

Es liegt ein homogener Polynomring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über einen beliebigen Körper $K$ zugrunde. Es wird ein Hauptklassenideal

$$\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$$

betrachtet, dessen Basisformen $\varphi_i$ alle denselben Grad haben. Folgende Bezeichnungen werden hier festgehalten:

| | |
|---|---|
| $n + 1$ | Anzahl der Variablen des homogenen Polynomringes; |
| $d$ | Dimension des Ideals; |
| $r$ | Rang des Ideals; |
| $\varrho$ | Potenz, zu welcher das Ideal genommen wird. Dabei gilt allgemein $a^0 = (1)$; |
| $t$ | Grad der Formen des Ideals, deren Anzahl untersucht wird; |
| $\varphi$ | Basisformen des Ideals; |
| $\tau$ | Grad der Basisformen $\varphi$; |

$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{cases} \binom{m}{n} & \text{für } m \geqq 0, \\ 0 & \text{für } m < 0. \end{cases}$$

## I. Eine Rekursionsformel.

*Hilfssatz*: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale eines kommutativen Ringes und $\varphi$ ein Element desselben, das kein Nullteiler ist, so gilt:

$$[\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}] = \varphi\, [\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}]. \tag{1}$$

Setzt man nämlich $[\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}] = \varphi\, \mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{c} \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}] : \varphi = [\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}]$. Andererseits ist $\varphi\, [\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}]$, also

$$[\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}] = \varphi\, \mathfrak{c} \subseteq \varphi\, [\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\, \mathfrak{b}],$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir betrachten ein Ideal $\mathfrak{a}$ der Hauptklasse $r$[1] und fügen eine zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form $\varphi = \varphi_{r+1}$ hinzu, so daß das neue Ideal $(\mathfrak{a}, \varphi)$ wieder ein Hauptklassenideal ist. Für die $\varrho^{\text{te}}$-Potenz dieses Ideals hat man

$$(\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho = \mathfrak{a}^\varrho + \varphi\, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho - 1}.$$

Die Hilbertfunktion der Summe dieser zwei Ideale ist[2]:

$$H(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = H(t; \mathfrak{a}^\varrho) + H(t; \varphi\, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}) - H(t; [\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}]).$$

[1] Das ist ein Ideal des Ranges $r$ oder der Dimension $d = n - r$, das eine $r$-gliedrige Basis besitzt ([4], S. 122).

[2] Vgl. [4], S. 158.

Es ist zu bemerken, daß jede Potenz eines $P$-Ideals der Hauptklasse ungemischt ist[3], d. h. aus $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}^\varrho : \varphi = \mathfrak{a}^\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots$. Unter diesen Voraussetzungen folgt mit Verwendung des Hilfssatzes (1):

$$[\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,[\mathfrak{a}^\varrho : \varphi, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,[\mathfrak{a}^\varrho, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}]$$

und wegen $\mathfrak{a}^\varrho \subset (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}$ erhält man

$$[\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,\mathfrak{a}^\varrho.$$

Man kann überlegen, daß allgemein gilt:

$$H\,(t; \varphi\,\mathfrak{c}) = H\,(t; (\varphi)) + H\,(t - \tau; \mathfrak{c}).$$

Aus diesen Erwägungen ergibt sich eine wertvolle Rekursionsformel für die Hilbertfunktion:

$$H\,(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = H\,(t; \mathfrak{a}^\varrho) - H\,(t - \tau; \mathfrak{a}^\varrho) + H\,(t - \tau;\ (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}). \tag{2}$$

Für $\varrho = 1$ reduziert sich diese Formel auf die bekannte:

$$H\,(t; (\mathfrak{a}, \varphi)) = H\,(t; \mathfrak{a}) - H\,(t - \tau; \mathfrak{a})^4,$$

da $(\mathfrak{a}, \varphi)^0$ das Einheitsideal und daher $H\,(t - \tau; (\mathfrak{a}, \varphi)^0) = 0$ ist.

Ferner hat die Hilbertfunktion $H\,(t; \mathfrak{a})$ eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ den Wert null, wenn $t$ eine negative ganze Zahl ist. Wenn man dies festhält und die Voraussetzung $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$ erfüllt ist, so gilt die Formel (2) ganz allgemein für $t = 0, 1, 2, \ldots$ und für $\varrho = 1, 2, \ldots$ Es ist nicht gefordert, daß die Basisformen alle denselben Grad haben, ja $\mathfrak{a}$ selbst braucht kein Hauptklassenideal zu sein.

## II. Einige Formeln für die Hilbertfunktionen für Potenzen von Hauptklassenidealen mit gleichgradigen Basisformen.

Zuerst soll die Hilbertfunktion für die erste Potenz von Hauptklassenidealen behandelt werden. Es wird zunächst die Formel angegeben, welche hierauf mittels Induktionsschluß bewiesen wird.

$$H\,(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ {t - j\,\tau + n \atop n} \right\}. \tag{3}$$

*Beweis*: Durch Einsetzen bekommt man für $r = 1$ das richtige Ergebnis:

$$H\,(t; (\varphi)) = \binom{t+n}{n} - \left\{ {t - \tau + n \atop n} \right\}^5.$$

[3] Vgl. [4], S. 129.

[4] Vgl. [4], S. 158 (9e).

[5] Vgl. [4], S. 162.

Nun wird vorausgesetzt, daß die Formel für Ideale der Klasse $r$ bereits gilt und es wird gezeigt, daß sie auch für $r+1$ richtig ist, solange $r+1 \leqq n+1$ ist. Auf Grund der Rekursionsformel (2), für $\varrho = 1$, folgt für ein Hauptklassenideal $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})$, dessen Basisformen alle denselben Grad $\tau$ haben:

$$H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})) = H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r) - H(t-\tau; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)).$$

Benützt man die Induktionsvoraussetzung, so können diese zwei Hilbertfunktionen durch die folgenden Summen dargestellt werden:

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ {t-j\,\tau+n \atop n} \right\} - \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ {t-(j+1)\,\tau+n \atop n} \right\}.$$

Faßt man diese zwei Summen zusammen, so folgt:

$$H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \binom{r+1}{j} \left\{ {t-j\,\tau+n \atop n} \right\},$$

was zu beweisen war.

Kennt man die Hilbertfunktion für die Potenzen des Ideals $\mathfrak{a}$, und ist $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$, so kann man durch $\varrho$-malige Anwendung der Rekursionsformel (2) auch die Hilbertfunktion für $(\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho$ berechnen:

$$H(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = \sum_{j=0}^{\varrho-1} [H(t - j\,\tau; \mathfrak{a}^{\varrho-j}) - H(t-(j+1)\,\tau; \mathfrak{a}^{\varrho-1})]. \tag{4}$$

Auch hier ist wieder zu beachten, daß die Hilbertfunktion für ein negatives Argument $t$ gleich null zu setzen ist. Im übrigen gilt diese Formel ganz allgemein für $\varrho = 1, 2, \ldots$

Die folgende Formel beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich $r$ und $\varrho$.

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ {t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\} \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

*Beweis*: Durch Einsetzen sieht man, daß die Formel für $r = 1$ richtig ist.

$$H(t; (\varphi)^\varrho) = \binom{t+n}{n} - \left\{ {t-\varrho\,\tau+n \atop n} \right\}$$

Ferner gilt (5) für $\varrho=1$ und alle $r=1, 2, \ldots, n+1$, weil sie dann mit (3) übereinstimmt.

Nun setzen wir voraus, daß die Formel (5) bereits für alle Potenzen des Ideals $\mathfrak{a}$, sowie für die Exponenten $1, 2, \ldots, \varrho-1$ des Ideals $(\mathfrak{a}, \varphi)$ bewiesen sei. Dann folgt aus (2) mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$H(t;(\mathfrak{a},\varphi)^{\varrho})=\binom{t+n}{n}-\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{\varrho+j-1}{j}\binom{\varrho+r-1}{r-1-j}\left\{{t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}$$
$$+\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{\varrho+j-1}{j}\binom{\varrho+r-1}{r-1-j}\left\{{t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}$$
$$-\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{\varrho+j-2}{j}\binom{\varrho+r-1}{r-j}\left\{{t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}.$$

Das erste Glied der ersten und dritten Summe und das letzte der zweiten und dritten Summe werden aus der Summenformel herausgenommen und für sich behandelt. Sie ergeben zusammengefaßt die beiden Glieder:

$$\binom{\varrho+r}{r}\left\{{t-\varrho\,\tau+n \atop n}\right\},\qquad (-1)^{r+1}\binom{\varrho+r-1}{r}\left\{{t-(\varrho+r)\,\tau+n \atop n}\right\}.$$

Nach entsprechender Veränderung der Summationsbuchstaben bleiben dann noch die drei folgenden Summen:

$$\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j\binom{\varrho+j}{j+1}\binom{\varrho+r-1}{r-2-j}\left\{{t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}$$
$$\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j\binom{\varrho+j-1}{j}\binom{\varrho+r-1}{r-1-j}\left\{{t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}$$
$$\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j\binom{\varrho+j-1}{j+1}\binom{\varrho+r-1}{r-1-j}\left\{{t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\},$$

welche zusammengefaßt ergeben:

$$\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j\binom{\varrho+j}{j+1}\binom{\varrho+r}{r-1-j}\left\{{t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\}.$$

Die zwei Glieder, welche eigens berechnet wurden, werden wieder in die Summe hineingenommen, so daß wir schließlich haben:

$$H(t;(\mathfrak{a},\varphi)^{\varrho})=\binom{t+n}{n}-\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{\varrho+j-1}{j}\binom{\varrho+r}{r-j}\left\{{t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n}\right\};$$

damit ist Formel (5) allgemein bewiesen.

Wichtig ist der Spezialfall $t=\varrho\tau$. Nach Einsetzen in (5) bleibt von der Summe nur das Glied $j=0$ stehen.

$$H(\varrho\tau;\mathfrak{a}^{\varrho})=\binom{\varrho\,\tau+n}{n}-\binom{\varrho+r-1}{r-1},\ \text{für}\ \varrho=1,2,\ldots \tag{6}$$

Eine weitere Formel für die Hilbertfunktion von Potenzen von Hauptklassenidealen mit gleichgradigen Basisformen lautet:

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho})=\sum_{j=0}^{\varrho-1}\binom{r+j-1}{j}\,H(t-j\tau;\mathfrak{a}) \tag{7}$$

*Beweis*: Zunächst wird die Richtigkeit der Formel

$$H\,(t;\,\mathfrak{a}^{\varrho}) = H\,(t;\,\mathfrak{a}^{\varrho-1}) + \binom{\varrho+r-2}{\varrho-1} H\,(t-(\varrho-1)\,\tau;\,\mathfrak{a}) \tag{7a}$$

durch Verwendung von (5) gezeigt. Durch Veränderung des Summationsindex bekommt man:

$$H\,(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j \binom{\varrho+j-2}{j-1}\binom{\varrho+r-1}{r-j}\left\{{t-(\varrho+j-1)\,\tau+n \atop n}\right\}.$$

Die Summe zerlegen wir in zwei dadurch, daß wir folgende Beziehung verwenden:

$$\binom{\varrho+j-2}{j-1}\binom{\varrho+r-1}{r-j} = \binom{r}{j}\binom{\varrho+r-2}{r-1} - \binom{\varrho+j-2}{j}\binom{\varrho+r-2}{r-1-j},$$

deren Richtigkeit man durch einfaches Berechnen der rechten Seite bestätigen kann. Dies führt nach einer leichten Zwischenrechnung auf

$$H\,(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \binom{\varrho+j-2}{j}\binom{\varrho+r-2}{r-1-j}\left\{{t-(\varrho-1+j)\,\tau+n \atop n}\right\} +$$
$$+ \binom{\varrho+r-2}{r-1}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\left\{{t-(\varrho-1+j)\,\tau+n \atop n}\right\},$$

woraus wegen (5) und (3) die zu beweisende Formel (7a) folgt. Wendet man (7a) $\varrho$-mal rekursiv an, so erhält man (7).

## III. Die Hilbertschen Koeffizienten für Potenzen von Hauptklassenidealen.

Die Hilbertfunktion $H\,(t;\,\mathfrak{a}^{\varrho})$ ist für genügend große Werte von $t$ ein Polynom in $t$, dessen Grad gleich der Dimension $d$ des Ideals $\mathfrak{a}$ ist. Während die vorausgehenden Formeln für alle Werte von $t$ gültig waren, ist das bei den folgenden Formeln immer erst von einer unteren Schranke an richtig. Für gewöhnlich schreibt man die Hilbertfunktion in der folgenden Gestalt:

$$H\,(t;\,\mathfrak{a}^{\varrho}) = \sum_{i=0}^{d} h_i \binom{t}{d-i},^{6} \qquad t \geqq T. \tag{8}$$

Im allgemeinen steht fest, daß die Hilbertschen Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots, h_d$ ganze rationale Zahlen sind. Hier werden sie Funktionen von $\varrho$ sein.

Für manche Zwecke ist folgende Schreibweise besser:

$$H\,(t;\,\mathfrak{a}^{\varrho}) = \sum_{i=0}^{d} k_i \binom{t+d-i}{d-i}, \qquad t \geqq T. \tag{9}$$

Jede dieser beiden Darstellungen läßt sich in einfacher Weise in die andere überführen.

---

[6] Vgl. [4], S. 161, (15a).

Für die weiteren Ausführungen brauchen wir die folgenden drei Hilfsformeln (10), (11) und (12), bei denen $n$ eine natürliche Zahl, $a$ und $b$ beliebige reelle Zahlen bedeuten:

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{b}{j}\binom{a}{n-j},\,^{7} \tag{10}$$

$$\binom{a-b}{n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{b}{j}\binom{a-j}{n-j}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{(a+j)\,b}{\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \\ (-1)^n\, b^n \quad \text{für } \alpha = n, \\ \text{ein Polynom in } a \text{ vom} \\ \text{Grad } \alpha - n \text{ für } \alpha > n. \end{cases} \tag{12}$$

Die Richtigkeit der Formel (11) kann man mit Hilfe von (10) zeigen; es gilt nämlich:

$$\binom{a-b}{n} = (-1)^n \binom{-a+b+n-1}{n} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{b}{j}\binom{-a+n-1}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{b}{j}\binom{a-j}{n-j}.$$

*Beweis von* (12): Bildet man die $\alpha^{\text{te}}$ Ableitung von $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ und multipliziert mit $(1-x)^n$, so erhält man:

$$(1-x)^{n-\alpha-1} = (1-x)^n \sum_{\nu=-\alpha}^{\infty} \binom{\alpha+\nu}{\alpha} x^\nu.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich geht hervor, daß rechts alle Koeffizienten derjenigen Potenzen von $x$ verschwinden, welche größer als $n-\alpha-1 \geqq 0$ sind. Ist aber $n = \alpha$, so sind die Koeffizienten aller Potenzen von $x$ gleich eins. Daher findet man nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{a+j}{\alpha} = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^n \binom{a}{\alpha-n} \text{ für } \alpha = n, n+1, \ldots, \end{cases} \tag{13}$$

wo $a$ zunächst alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ bedeuten darf. Da aber links der Ausdruck ein Polynom vom Grade $\alpha$ in $a$ darstellt, das für unendlich viele Werte von $a$ mit der rechten Seite, die null oder wieder ein Polynom in $a$ ist, übereinstimmt, so gelten diese Beziehungen identisch in $a$, d. h. für beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen $a$. Im folgenden werden diese Formeln jedoch nur für ganze rationale Zahlen verwendet.

Rechnet man von den Binomialkoeffizienten auf Potenzen um, so folgt:

---

[7] Vgl. [4], S. 162.

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (a+j)^\alpha = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^n n! \quad \text{für} \quad \alpha = n, \\ \text{ein Polynom in } a \text{ vom Grade } \alpha - n \\ \text{für} \quad \alpha > n. \end{cases} \tag{14}$$

Aus (13) und (14) geht (12) hervor.

Die Formel (11) gilt aber nicht mehr für das Symbol $\left\{{a-b \atop n}\right\}$, und daher haben die folgenden Entwicklungen nur für die Werte von $t$ Geltung, die groß genug sind, so daß die Symbole $\left\{{t-j\,\tau-\nu\,\tau+n \atop n}\right\}$ mit den gewöhnlichen Binomialsymbolen übereinstimmen. Infolgedessen muß immer vorausgesetzt werden:

$$t \geqq (\varrho + \nu - 1)\,\tau - n.$$

Durch Einsetzen von (3) in (7) erhält man:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{t-(j+\nu)\,\tau+n}{n}.$$

Mit Hilfe von (11) kann diese Gleichung so umgeformt werden:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{t+n-\mu}{n-\mu} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{\mu},$$

und wegen (12) verschwindet die letzte Summe für alle $\mu < r$. Setzen wir $i = \mu - r$ und $n - r = d$, so folgt:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{i+r} \binom{t+d-i}{d-i} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{r+i}.$$

Aus dieser Formel kann man die $k$-Koeffizienten ablesen.

$$k_i = (-1)^{i+r} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{r+i}, \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{15a}$$

Durch Verwendung von (11) in (5) und mit Rücksicht darauf, daß die $k_i$ nach (15a) Polynome in $\tau$ vom Grade $r+i$ sind, erhält man für die $k_i$ eine weitere Formel:

$$k_i = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r+j+i+1} \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \binom{(\varrho+j)\,\tau}{r+i}. \tag{15b}$$

Die $h$-Koeffizienten berechnet man aus den $k$-Koeffizienten. Mit Hilfe von (10) findet man allgemein:

$$h_i = \sum_{\mu=0}^{i} \binom{d-\mu}{i-\mu} k_\mu. \tag{16}$$

Aus (16) und (15a) folgt somit:

$$h_i = \sum_{\mu=0}^{i} (-1)^{\mu+r} \binom{d-\mu}{i-\mu} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{r+\mu}. \tag{17a}$$

Verwendet man (10) in (5) und berücksichtigt, daß die $h_i$ nach (17a) Polynome in $\tau$ vom Grade $r+i$ sind, so folgt:

$$h_i = \binom{n}{r+i} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-j-1} \binom{n-\varrho\,\tau-j\,\tau}{r+i}, \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{17b}$$

Die Berechnung der $k$-Koeffizienten ist einfacher als die der $h$-Koeffizienten, weil die $k$-Koeffizienten den Faktor $n$ nicht enthalten, welcher die Anzahl der Variablen des zugrundeliegenden Körpers angibt, während ihn die $h$-Koeffizienten enthalten.

Der erste Hilbertsche Koeffizient $h_0 = k_0$ wird als die Ordnung des betreffenden Ideals bezeichnet[8]. Darüber können wir auf Grund (15a) und (12) eine allgemeine Aussage machen.

Die Ordnung $h_0$ der $\varrho^{\text{ten}}$ Potenz eines Hauptklassenideals vom Range $r$, dessen Basisformen alle den Grad $\tau$ haben, ist ein Polynom in $\varrho$ und $\tau$ vom Grade $r$ ,und zwar gleich: (18)

$$k_0 = h_0 = \binom{\varrho+r-1}{r} \tau^r$$

Handelt es sich um ein Hauptklassenideal $\mathfrak{a}$ mit *nicht* gleichgradigen Basisformen, so lautet die Ordnung des Ideals $\mathfrak{a}^{\varrho}$:

$$k_0 = h_0 = \binom{\varrho+r-1}{r} \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r.$$

Abschließend werden noch einige allgemeine Aussagen über die Hilbertschen Koeffizienten gemacht. Diese gelten sowohl für die $h_i$ als auch für die $k_i$. Sie ergeben sich aus (12), (15a) und (17a).

I. Die Hilbertschen Koeffizienten für die Potenz $\varrho$ von Hauptklassenidealen, deren Basisformen alle den Grad $\tau$ haben, sind Polynome in $\tau$, deren Grad gleich ist dem Rang $r$ des betreffenden Ideals, vermehrt um den Index des jeweiligen Koeffizienten. (19)

II. Es verschwinden alle jene Potenzen von $\tau$, welche kleiner als $r$ sind.

III. Die Koeffizienten dieser Polynome in $\tau$ sind Polynome in $\varrho$, deren Grad gleich ist der betreffenden Potenz von $\tau$.

---

[8] Vgl. [4], S. 161, 15.

## Literatur.

[1] *D. Hilbert,* Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. **36** (1890), 473—534.

[2] *F. Severi,* Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. Rend. Circolo mat. Palermo **28** (1909), 33—87. Seconda Memoria. Annali Mat. pura appl. (IV) **32** (1951), 1—81.

[3] *H. T. Muhly-O. Zariski,* Hilbert's characteristic function and the arithmetic genus of an algebraic variety. Trans. Amer. math. Soc. **69** (1950), 78—88.

[4] *W. Gröbner,* Moderne algebraische Geometrie, Springer-Verlag, Wien 1949.

[5] *W. Gröbner,* Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit. Archiv d. Math. **3** (1952), 351—359.

[6] *W. Gröbner,* Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines $H$-Ideals bei rationalen Transformationen. Archiv d. Math., Ostrowski-Widmungsband, im Erscheinen.

[7] *D. G. Northcott,* Hilbert's function in a local ring. Quart. J. Math. Oxford II. Ser. **4** (1953), 67—80.